ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 2 (513)

УДК 517.968

И.В. САПРОНОВ

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЕННОСТЬЮ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В вещественном банаховом пространстве E зафиксируем норму $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E.$$

В пространстве $C([0,T],E)$ норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\Psi\|_{C([0,T],E)} = \max_{0\le x\le T} \|\Psi(x)\|_E.$$

Наконец, в пространстве C, состоящем из всех непрерывных в норме $L(E)$ на треугольнике $0 \le t \le x \le T$ функций со значениями в $L(E)$, вводится норма

$$\big|\,\|Q\|\,\big|_C = \max_{0\le t\le x\le T} \|Q(x,t)\|_{L(E)}.$$

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра вида

$$x^{m+1}u(x) = \int_0^x \rho(x,t)K(x,t)u(t)dt \quad (0\le x\le T) \tag{1}$$

в $L_1([0,T],E)$, где $K(x,t)$ $(0\le t\le x\le T)$ — заданная функция со значениями в $L(E)$, имеющая непрерывные частные производные до порядка $N+m+1$ (N, m — натуральные числа) включительно, причем все частные производные до порядка $m-1$ равны нулю в точке $(0,0)$, а частные производные m-го порядка не все равны нулю в точке $(0,0)$, $u(x)$ — искомая суммируемая функция на $[0,T]$ со значениями в E $(u\in L_1([0,T],E))$, $\rho(x,t)$ — такая скалярная положительная однородная нулевой степени функция, что $\varphi(s)=\rho(1,s)$ суммируема на $[0,1]$. Отметим, что уравнение вида (1) рассматривалось в более простых ситуациях [1]–[10].

Представим $K(x,t)$ по формуле Тейлора

$$K(x,t) = \sum_{\alpha+\beta=m}^{\alpha+\beta=N+m} K^{\alpha\beta}x^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha+\beta=N+m+1} \widetilde{K}^{\alpha\beta}(x,t)x^\alpha t^\beta$$

и введем операторный пучок

$$Q_\lambda - I = \sum_{\alpha+\beta=m} K^{\alpha\beta}\int_0^1 \varphi(s)s^{\beta+\lambda-1}ds - I. \tag{2}$$

Этот пучок имеет смысл при значениях λ, удовлетворяющих неравенству

$$\int_0^1 \varphi(s)s^{\lambda-1}ds < \infty. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть для уравнения* (1) *выполнены следующие условия*:

1) *пучок* (2) *имеет характеристическое число* $\lambda = \nu + i\mu$ $(\nu > 0)$, *удовлетворяющее неравенству* (3), *и существует такое натуральное число* k, *что* $\overline{\lambda} = \nu + k + i\mu$ *также является характеристическим числом пучка* (2), *удовлетворяющим неравенству* (3);
2) *характеристическому числу* $\lambda = \nu + i\mu$ *соответствует набор собственных векторов* f_j^0 $(j = \overline{1, q_1})$, *имеющих цепочку присоединенных векторов* $\{f_j^m\}_{m=1}^{h_j}$;
3) *характеристическому числу* $\overline{\lambda} = \nu + k + i\mu$ *соответствует набор собственных векторов* $\overline{f}_j^0$ $(j = \overline{1, q_2})$, *имеющих цепочку присоединенных векторов* $\{\overline{f}_j^m\}_{m=1}^{\overline{h}_j}$;
4) *существует такое натуральное число* N, *что*

$$2\| \, |K(x,t)x^{-m}| \, \|_C \int_0^1 \varphi(s) s^{\nu+N} ds < 1.$$

Тогда для уравнения (1) *можно построить* $2\sum\limits_{i=1}^{q_1}(h_i + 1)$ *линейно независимых решений вида*

$$u_l(x) = x^{\nu-1}\Bigg\{ \sum_{r=0}^{l} \Bigg[\Bigg(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl} x^i + a_{N+1}^{rl}(x) x^{N+1} \Bigg) \sin(\mu \ln x) +$$
$$+ \Bigg(\sum_{i=0}^{N} b_i^{rl} x^i + b_{N+1}^{rl}(x) x^{N+1} \Bigg) \cos(\mu \ln x) \Bigg] \ln^r x \Bigg\} +$$
$$+ x^{\nu+k-1} \ln^{l+1} x \Bigg\{ \sum_{r=0}^{\overline{h}} \Bigg[\Bigg(\sum_{i=0}^{N} \overline{a}_i^{rl} x^i + \overline{a}_{N+1}^{rl}(x) x^{N+1} \Bigg) \sin(\mu \ln x) +$$
$$+ \Bigg(\sum_{i=0}^{N} \overline{b}_i^{rl} x^i + \overline{b}_{N+1}^{rl}(x) x^{N+1} \Bigg) \cos(\mu \ln x) \Bigg] \ln^r x \Bigg\} \quad (i = \overline{1, q_1}, \quad l = \overline{0, h_i}, \quad \overline{h} = \max_{1 \le j \le q_2} \{\overline{h}_j\}),$$

принадлежащих пространству $L_1([0,T], E)$.

Замечание 1. Для того чтобы при $0 < \nu < 1$ выполнялось неравенство

$$\int_0^1 \varphi(s) s^{\nu-1} ds < \infty,$$

достаточно, чтобы функция $\varphi(s)$ была ограниченной и измеримой на отрезке $[0, 1]$.

Замечание 2. Число непрерывных на $[0,T]$ решений зависит от величины ν: при $\nu > 1$ все решения непрерывны на $[0,T]$; при $\nu = 1$ непрерывных решений на отрезке $[0,T]$ будет $2q_1$, а остальные решения непрерывны на $(0,T]$ и суммируемы на $[0,T]$; при $0 < \nu < 1$ непрерывных решений на $[0,T]$ нет, все решения непрерывны на $(0,T]$ и суммируемы на $[0,T]$.

Литература

1. Sato T. *Sur l'equation integrale* // J. Math. Soc. Japan. – 1953. – V. 5. – № 2. – P. 145–153.
2. Takesada T. *On the singular point of integral equations of Volterra type* // J. Math. Soc. Japan. – 1955. – V. 7. – № 2. – P. 123–136.
3. Панов Л.И. *Об интегральных уравнениях с ядрами, имеющими неинтегрируемую особенность произвольного порядка* // ДАН Тадж. ССР. – 1967. – Т. 10. – № 6. – С. 3–7.
4. Магницкий Н.А. *О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра* I *рода* // ДАН СССР. – 1977. – Т. 235. – № 4. – С. 772–774.
5. Магницкий Н.А. *Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 240. – № 2. – С. 268–271.
6. Магницкий Н.А. *Линейные интегральные уравнения Вольтерра* I *и* III *рода* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – Т. 19. – № 4. – С. 970–988.

7. Крейн С.Г., Сапронов И.В. *О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 355. – № 4. – С. 450–452.
8. Крейн С.Г., Сапронов И.В. *Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями* // УМН. – 1995. – Т. 50. – Вып. 4. – С. 140.
9. Krein S.G. *Singular integral Volterra equations* // Abstracts. International Congress of Mathematics. Zurich. 3–11 August. – 1994. – P. 125.
10. Krein S.G., Sapronov I.V. *One class of solutions of Volterra equation with regular singularity* // Укр. матем. журн. – 1997. – Т. 49. – № 3. – С. 424–432.

Воронежская государственная лесотехническая академия

Поступила 29.04.2003