ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 515.124.4

Е.Н. СОСОВ

ОБ АППРОКСИМАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖЕСТВ В СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В статье обобщаются теоремы Б. Секефальви-Надь ([1], теорема 3.35), С.Б. Стечкина и Н.В. Ефимова ([2], теоремы 1.1 и 1.2) об аппроксимативных свойствах множеств в равномерно выпуклых банаховых пространствах на случай специальных метрических пространств.

1. Необходимые определения и теоремы

Пусть X — полное метрическое пространство, через каждые две различные точки которого можно провести единственную прямую (т. е. геодезическую кривую, изометричную всей вещественной оси R со стандартной метрикой ([4], с. 52)).

В дальнейшем используем следующие обозначения: xy — расстояние между точками x и y пространства X; $\overset{\circ}{M}$ ($\overline{M}$, $\operatorname{Fr} M$) — внутренность (замыкание, граница) множества $M \subset X$; $xM = \inf\{xy : y \in M\}$; $B(x,r)$ ($B[x,r]$, $S(x,r)$) — открытый шар (замкнутый шар, сфера) с центром в точке x радиуса $r > 0$; $[x,y]$ ((x,y)) — замкнутый (открытый) отрезок с концами $x, y \in X$.

Пусть $\lambda \in R$, $\omega_\lambda(x,y)$ — точка на прямой, проходящей через точки x, y, удовлетворяющая условиям

а) $x\omega_\lambda(x,y) = |\lambda| xy$;

б) если $\lambda \in [0,1]$, то $\omega_\lambda(x,y) \in [x,y]$;

в) если $\lambda > 1$, то $y \in (x, \omega_\lambda(x,y))$;

г) если $\lambda < 0$, то $x \in (\omega_\lambda(x,y), y)$.

Напомним следующие обозначения и определения из [2], [1], [4]. Пусть $\delta \geq 0$, $M \subset X$, $P_\delta x = \{y \in M : xy \leq xM + \delta\}$, $Px = P_0 x$; $E_M = \{x \in X : Px \neq \emptyset\}$, $T_M = \{x \in X : Px$ одноточечно$\}$; $D_M x = \lim\limits_{\delta \to +0} \operatorname{diam}(P_\delta x)$, $T'_M = \{x \in X : D_M x = 0\}$.

Множество M из X называется множеством существования (чебышевским множеством), если $E_M = X$ ($T_M = X$). Чебышевское множество M называется сильно чебышевским, если отображение $P : X \to M$ непрерывно ([1], определение 3.28). Последовательность $(y_n) \subset M$ называется минимизирующей для $x \in X$, если $\lim\limits_{n\to\infty} xy_n = xM$. Множество $M \subset X$ называется аппроксимативно компактным, если для каждого $x \in X$ минимизирующая последовательность имеет подпоследовательность, сходящуюся к элементу из множества M. Множество $M \subset X$ называется телом, если $M \subset \overline{\overset{\circ}{M}}$. Множество M называется выпуклым, если для каждых двух различных точек x, y из этого множества отрезок $[x,y]$ принадлежит этому множеству. Множество $M \subset X$ называется a-выпуклым ($a > 0$), если для каждого элемента $x \in X \setminus M$ найдется элемент $c \in X$ такой, что $x \in B(c,a)$ и $M \bigcap B(c,a) = \emptyset$. Замкнутый шар $B[x,a]$ называется опорным к множеству M в точке $y \in M$, если $xM = xy = a$.

На пространство X будем налагать также следующие дополнительные условия.

A) Для каждого $\lambda \in R$ отображение $\omega_\lambda : X \times X \to X$ равномерно непрерывно на каждом множестве вида $B \times B$, где B — произвольный замкнутый шар пространства X.

B) Каждый замкнутый шар $B[p,r]$ пространства X выпуклый и обладает свойством: если $\lim\limits_{n\to\infty} p\omega_{1/2}(x_n,y_n)=r$ для последовательностей (x_n), (y_n) из шара $B[p,r]$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$.

Простыми примерами метрических пространств, удовлетворяющих условиям A, B, являются равномерно выпуклые банаховы пространства и пространства Лобачевского (включая бесконечномерные).

Приведем несколько вспомогательных утверждений (доказательства первых двух из них очевидны, а остальных — известны).

1. Каждый открытый шар в пространстве X выпуклый тогда и только тогда, когда каждый замкнутый шар в пространстве X выпуклый.
2. Если выполняется условие B), то каждая сфера пространства X не содержит невырожденных отрезков (на самом деле достаточно требовать только выпуклости каждого замкнутого шара в пространстве X, но это утверждение нам не понадобится).
3. Каждое аппроксимативно компактное чебышевское множество в пространстве X является сильно чебышевским ([4], следствие 2 или [2], следствие 2.2).
4. Пусть $x\in X$, $M\subset X$. Если $y\in Px$, $z\in(x,y]$, то $Pz=y$ ([2], предложение 0.3).
5. Пусть M — замкнутое подмножество в пространстве X. Тогда $M\subset T'_M\subset T_M$ и $[x,Px]\subset T'_M$ для каждого x из T'_M ([2], предложение 1.1).

Сформулируем теперь полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть пространство X удовлетворяет условиям* A), B). *Тогда каждое выпуклое замкнутое множество является аппроксимативно компактным, чебышевским (а значит, и сильно чебышевским).*

Замечание 1. Эта теорема обобщает теорему Б.Секефальви-Надь ([1], теорема 3.35, другие обобщения в [2], предложения 2.5, 2.6).

Замечание 2. Условие A) в теореме можно ослабить до условия

A$'$) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n=0$ для ограниченных последовательностей (x_n), (y_n) пространства X, то $\omega_{1/2}(x_n,x_m)\omega_{1/2}(y_n,y_m)\to 0$ при $n\to\infty$, $m\to\infty$.

Лемма 1. *Пусть пространство X удовлетворяет условиям* A), B) *и $x\in X$. Если последовательности (y_n), (z_n), (u_n) удовлетворяют условиям $xy_n=r$ $(r>0)$, $xz_n=r+h$ $(h>0)$, $u_n\in[x,z_n]$, $xu_n=r$ $(n=1,2,\dots)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_nz_n=h$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_nu_n=0$.*

Следующие лемма и теорема обобщают лемму и теорему С.Б. Стечкина ([2], лемма 1.1 и теорема 1.1).

Лемма 2. *Пусть пространство X удовлетворяет условиям* A), B); *$x\in X$, $0<h<H$. Тогда $\operatorname{diam}(B[z,zy+\delta]\backslash B(x,xy))\to 0$ при $\delta\to+0$ равномерно по всем $y,z\in X$, удовлетворяющим условиям $z\in(x,y)$, $xy=H$, $xz=h$.*

Теорема 2. *Пусть пространство X удовлетворяет условиям* A), B), *а M — непустое замкнутое множество в пространстве X. Тогда каждое из множеств T_M, T'_M является дополнением множества первой категории (в частности, всюду плотно).*

Обобщает теорему Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина ([2], теорема 1.2)

Теорема 3. *Пусть M — a-выпуклое тело в пространстве X, удовлетворяющем условиям* A), B). *Множество точек границы $G=\operatorname{Fr}M$, в которых существует единственный опорный шар радиуса a, является дополнением множества первой категории в G.*

2. Доказательства полученных результатов

Доказательство теоремы 1. Докажем аппроксимативную компактность множества M. Пусть $p \in X\backslash M$, (x_n) — минимизирующая последовательность в множестве M и $y_n = [p,x_n]\bigcap S(p,pM)$ $(n=1,2,\dots)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_ny_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_np - py_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_np - pM) = 0$. Из условия A) (или A$'$)) следует, что $\omega_{1/2}(x_n,x_m)\omega_{1/2}(y_n,y_m) \to 0$ при $n\to\infty$, $m\to\infty$. Кроме того, $\omega_{1/2}(y_n,y_m) \subset B[p,pM]$, $\omega_{1/2}(x_n,x_m) \in M$ $(n,m=1,2,\dots)$, поскольку M, $B[p,pM]$ — выпуклые множества.

Пусть $a_{nm} \in S(p,pM)\bigcap[\omega_{1/2}(x_n,x_m),\omega_{1/2}(y_n,y_m)]$. Тогда $pM - \omega_{1/2}(y_n,y_m)a_{nm} = pa_{nm} - \omega_{1/2}(y_n,y_m)a_{nm} \le p\omega_{1/2}(y_n,y_m) \le pM$ и, значит, $p\omega_{1/2}(y_n,y_m) \to pM$ при $n\to\infty$, $m\to\infty$. Из условия B) получим $y_ny_m \to 0$ при $n\to\infty$, $m\to\infty$. Но пространство X полное, поэтому найдется точка $y \in S(p,pM)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Из неравенства $yx_n \le x_ny_n + yy_n$ следует теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y \in M\bigcap S(p,pM)$. Значит, множество M аппроксимативно компактно. Пересечение $M\bigcap S(p,pM)$ содержит не более одной точки. Действительно, в противном случае сфера содержала бы невырожденный отрезок, поскольку множества M, $B(p,pM)$ выпуклые. А это противоречит свойству 2. Следовательно, множество M чебышевское. $\square$

Доказательство леммы 1. Пусть $c_n \in [z_n,y_n]$, $c_nz_n = h$ $(n=1,2,\dots)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_nc_n = \lim\limits_{n\to\infty}(y_nz_n - h) = 0$ и по условию A) $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_{1/2}(y_n,u_n)\omega_{1/2}(c_n,u_n) = 0$. Из условия выпуклости шаров следуют неравенства $r+h = xz_n \le x\omega_{1/2}(y_n,u_n) + \omega_{1/2}(y_n,u_n)\omega_{1/2}(c_n,u_n) + \omega_{1/2}(c_n,u_n)z_n \le r + \omega_{1/2}(y_n,u_n)\omega_{1/2}(c_n,u_n) + h$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} x\omega_{1/2}(y_n,u_n) = r$. Из условия B) следует теперь $\lim\limits_{n\to\infty} u_ny_n = 0$. $\square$

Доказательство леммы 2. Для каждого $\delta > 0$ в множестве $B[z,zy+\delta]\backslash B(x,xy)$ произвольным образом выберем элемент u. Очевидно, достаточно доказать, что $uy \to 0$ при $\delta \to +0$. Обозначим $v = [x,u]\bigcap S(x,xy)$, $w = [z,u]\bigcap S(z,zy)$, $t = [x,u]\bigcap S(x,xz)$. Тогда $uy \le yv + vw + wu$. Рассмотрим каждое слагаемое в правой части этого неравенства. Имеем $wu = zu - zw \le \delta$. Из неравенств $xw \le xy = xv$, $vw \le uv + uw \le uv + xv - xw + uw = xu - xw + uw \le 2uw$ следует, что $vw \to 0$ при $\delta \to +0$. Заметим также, что $xt = h$, $zw = zy = tv = H - h$, $zv \le zw + vw = H - h + vw$. Поэтому в силу леммы 1 $tz \to 0$ при $\delta \to +0$. Из условия A) следует, что $yv \to 0$ при $\delta \to +0$. Таким образом, $uy \to 0$ при $\delta \to +0$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Докажем, что множество $F_\epsilon = \{x \in X : D_M \ge \epsilon\}$ замкнуто для каждого $\epsilon > 0$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $D_Mx_n \ge \epsilon$ для каждого $n \in \{1,2,\dots\}$. Покажем, что $P_tx_n \subset P_\delta x$ при $t < \delta/2$, $xx_n < \delta/4$. Действительно, если $y \in P_tx_n$, то $yx \le yx_n + xx_n \le x_nM + t + xx_n \le xM + t + 2xx_n \le xM + \delta$. Следовательно, $\operatorname{diam}(P_\delta x) \ge \operatorname{diam}(P_tx_n) \ge D_Mx_n \ge \epsilon$ для каждого $\delta > 0$. Отсюда получаем $D_Mx \ge \epsilon$ и $x \in F_\epsilon$. Докажем теперь, что множество F_ϵ нигде не плотно. Если это не так, то замкнутое множество F_ϵ содержит некоторый замкнутый шар $B[x,h]$, $h > 0$. Можно считать, что $h < xM$. Пусть точка $w \in M$ такая, что $xw \le xM + \delta$. Положим $y = [x,w]\bigcap S(x,xM)$. Пусть точка $z \in [x,y]$ такая, что $xz = h$. Тогда $zw = xw - xz \le xM + \delta - h$. Кроме того, для каждого $u \in P_\delta z$ $zu \le zM + \delta \le zw + \delta \le xM - h + 2\delta$. Значит, $P_\delta z \subset B[z,xM - h + 2\delta]\backslash B(x,xM)$. В силу свойства 5 и леммы 2 найдется $\delta > 0$ такое, что $D_Mz \le \operatorname{diam}(P_\delta z) \le \operatorname{diam}(B[z,xM-h+2\delta]\backslash B(x,xM)) < \epsilon$. Получили противоречие с тем, что $z \in B[x,h] \subset F_\epsilon$. Таким образом, для каждого $\epsilon > 0$ множество F_ϵ нигде не плотно. Кроме того, $\{x \in X : D_Mx > 0\}$ является множеством первой категории, поскольку совпадает с объединением множеств $F_{1/n}$ $(n=1,2,\dots)$. Дополнением этого множества является множество T'_M. Из свойства 5 следует, что $T'_M \subset T_M$. $\square$

Доказательство теоремы 3 совпадает с точностью до некоторых обозначений с доказательством теоремы 1.2 в [2], если учесть лемму 2.

Литература

1. Брудный Ю.А., Горин Е.А. *Геометрические задачи наилучшего приближения.* Учеб. пособие. – Ярославль: Изд-во Ярославск. ун-та, 1988. – 36 с.
2. Власов Л.П. *Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах* // УМН. – 1973. – Т. 28. – Вып. 6. – С. 3–66.
3. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
4. Singer I. *Some remarks on approximative compactness* // Rev. roum. math. pures et appl. – 1964. – V. 9. – P. 167–177.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступила
22.05.1997