ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 517.956:517.544

И.А. БИКЧАНТАЕВ

ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕФИНИТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ

Краевая задача Гильберта для уравнения Карлемана–Векуа на компактной римановой поверхности с краем была изучена в [1] и на некомпактной римановой поверхности с краем — в [2], [3]. Для более общих эллиптических систем первого порядка эта задача изучалась в работах [4]–[11] на плоскости и в [12] — на некомпактной римановой поверхности с краем. При этом в [2], [3], [12] (как, впрочем, и во всех других работах, посвященных исследованию краевых задач Римана и Гильберта для эллиптических систем на некомпактных римановых поверхностях) был рассмотрен лишь случай, когда коэффициенты эллиптической системы финитны. Данное в [13] обобщение понятия Λ_0-поведения функций и дифференциалов в окрестности идеальной границы поверхности позволило рассмотреть задачу Гильберта для линейных эллиптических систем первого порядка с нефинитными коэффициентами. Показано, что эта задача n-нормальна и вычислен ее индекс.

1. Обозначения, термины и предварительные результаты

Пусть R — некомпактная риманова поверхность с компактным краем ∂R, $h \leq \infty$ — ее род. Обозначим через $L_p^{(\alpha)}(R)$, $1 \leq p \leq \infty$, вещественное линейное пространство n-компонентных ($n \geq 1$) векторов, компонентами которых являются комплексные дифференциальные формы порядка $\alpha = 0, 1, 2$, локально интегрируемые со степенью p (при $p < \infty$) или существенно ограниченные в окрестности каждой точки (при $p = \infty$). При $\alpha = 0$ будем писать $L_p(R)$ вместо $L_p^{(0)}(R)$. Для $\varphi \in L_p^{(\alpha_1)}(R)$, $\psi \in L_p^{(\alpha_2)}(R)$ положим $\varphi \wedge \psi = \varphi_1 \wedge \psi_1 + \varphi_2 \wedge \psi_2 + \cdots + \varphi_n \wedge \psi_n$, где φ_j и ψ_j — компоненты векторов φ и ψ. Через $L_p^{\alpha,\beta}(R)$, где α и β — целые неотрицательные числа, не превосходящие единицы, обозначим подпространство пространства $L_p^{(\alpha+\beta)}(R)$, состоящее из векторов, компонентами которых являются дифференциальные формы типа (α, β), которые в локальных координатах z представимы в виде $\varphi = f(z)(\mathrm{d}z)^\alpha(\mathrm{d}\overline{z})^\beta$.

Скалярное произведение в $L_2^{(1)}(R)$ определяется формулой $(\varphi, \psi)_{L_2^{(1)}(R)} = \operatorname{Re}\iint\limits_R \varphi \wedge * \overline{\psi}$, где операторы $*$ и комплексного сопряжения действуют на вектор покомпонентно. При этом $L_2^{(1)}(R)$ становится гильбертовым пространством. Очевидно, $L_2^{1,0}(R)$ и $L_2^{0,1}(R)$ суть подпространства $L_2^{(1)}(R)$ и $L_2^{(1)}(R) = L_2^{1,0}(R) \oplus L_2^{0,1}(R)$.

Обозначим через $\mathcal{R} = \{R_n\}_{n=1}^\infty$ исчерпание поверхности R относительно компактными регулярными областями R_n, содержащими ∂R, через ∂R_n — относительную границу области R_n, состоящую из точек поверхности $R \setminus \partial R$.

Положим $\Lambda = L_2^{(1)}(R)$ (здесь $n = 1$), Λ_h — подпространство Λ, состоящее из гармонических дифференциалов; Λ_{hse} — подпространство Λ_h, состоящее из полуточных дифференциалов (т. е. имеющих нулевые периоды вдоль всех разбивающих циклов); $\Lambda_{e0}^1 = \{\lambda \in \Lambda :$ существуют

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01-01-00888, 03-01-96193) и регионального гранта Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-96193-r2003Татарстан_a).

$f \in C^2(R)$, $f_n \in C_0^2(R)$ такие, что $\mathrm{d}f = \lambda$ и $\|\mathrm{d}f - \mathrm{d}f_n\| \to 0$, $n \to \infty\}$, Λ_c^1 $(\subset \Lambda)$ — множество замкнутых дифференциалов класса $C^1(R)$, Λ_{c0}^1 — подмножество Λ_c^1, состоящее из финитных дифференциалов. Через Λ_{e0}, Λ_c, Λ_{c0} обозначим замыкания пространств Λ_{e0}^1, Λ_c^1, Λ_{c0}^1 в Λ. Тогда $\Lambda = \Lambda_{e0} \oplus \Lambda_{e0}^* \oplus \Lambda_h$, где $\Lambda_{e0}^* = \{\lambda : *\lambda \in \Lambda_{e0}\}$. Подпространство Λ, состоящее из действительных дифференциалов, обозначим через Γ; соответствующие подпространства пространств $\Lambda_{e0}, \Lambda_c, \ldots$, состоящие из действительных дифференциалов, будем обозначать $\Gamma_{e0}, \Gamma_c, \ldots$

Пусть $\mathcal{L} = \{L_j\}_{j=1}^h$ — семейство прямых в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, проходящих через начало координат.

Определение 1 ([14]). Замкнутое подпространство $\Lambda_0 = \Lambda_0(R, \mathcal{L})$ пространства Λ_{hse} называется *пространством поведения, ассоциированным с* $\mathcal{L}$, если $\mathrm{i}\Lambda_0^* = \Lambda_0^\perp$ (т. е. $\Lambda_h = \Lambda_0 \oplus \mathrm{i}\Lambda_0^*$) и $\int\limits_{D_j} \lambda_0 \in L_{[(j+1)/2]}$, $j = 1, 2, \ldots, 2h$, $\lambda_0 \in \Lambda_0$, где $\Lambda_0^\perp$ — ортогональное дополнение Λ_0 в Λ_h, $[\ ]$ — целая часть числа.

Пространство $\overline{\Lambda}_0 = \{\lambda : \overline{\lambda} \in \Lambda_0\}$ является пространством поведения, ассоциированным с семейством прямых $\overline{\mathcal{L}} = \{\overline{L}_j\}_{j=1}^h$, где $\overline{L}_j$ означает прямую в $\mathbb{C}$, симметричную L_j относительно действительной оси; оно называется *двойственным* к Λ_0 [14].

Определение 2 ([13]). Будем говорить, что дифференциал φ, определенный в окрестности идеальной границы поверхности R, имеет Λ_0-*поведение*, если существуют $\lambda_0 \in \Lambda_0$, $\lambda_{e0} \in \Lambda_{e0}$ и $R_n \in \mathcal{R}$ такие, что $\varphi = \lambda_0 + \lambda_{e0}$ на $R \setminus R_n$. Будем говорить, что функция f (вообще говоря, многозначная) имеет Λ_0-поведение, если ее дифференциал $\mathrm{d}f$ имеет Λ_0-поведение.

Для дифференциалов класса C^1 понятие Λ_0-поведения было дано в [14].

В данной статье будем считать, что все прямые L_j, образующие $\mathcal{L}$, суть мнимые оси и $\Lambda_0 = \Lambda_K := \Gamma_{hm} + \mathrm{i}\Gamma_{hse}$, где Γ_{hm} — ортогональное дополнение Γ_{hse}^* в Γ_h.

Пусть Θ — непрерывный положительный на R дифференциал второго порядка такой, что $\iint\limits_R |w|^2\Theta < \infty$ для всех w таких, что $\mathrm{d}w \in L_2^{(1)}(R)$ и нормированный условием $\iint\limits_R \Theta = 1$. Вводя в пространстве $L_2(R)$ скалярное произведение $(u,v)_{L_2(R)} = \mathrm{Re}\iint\limits_R u\overline{v}\Theta$, превратим $L_2(R)$ в гильбертово пространство. Через $W_2^1(R)$ будем обозначать вещественное линейное пространство комплексных вектор-функций, дифференциалы которых принадлежат $L_2^{(1)}(R)$. Скалярное произведение в $W_2^1(R)$ определим формулой $(u,v)_{W_2^1(R)} = (u,v)_{L_2(R)} + (\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)_{L_2^{(1)}(R)}$. Норму элемента u в пространстве $W_2^1(R)$ определим равенством $\|u\|^2_{W_2^1(R)}{=}(u,u)_{W_2^1(R)}$. Под значениями вектор-функций из $W_2^1(R)$ на ∂R будем понимать их следы.

Следующие три леммы были доказаны в [12].

Пусть X и Y — гильбертовы пространства такие, что существуют два компактных линейных оператора $J : X \to Y$ и $J^* : Y \to X^*$ (здесь X^* — пространство, сопряженное X), причем $\ker J{=}0$. Предположим еще, что оператор $J^*J : X \to X^*$ удовлетворяет условию $(J^*Ju)(v) = (Ju, Jv)_Y$, $u, v \in X$, где через $(\cdot,\cdot)_Y$ обозначено скалярное произведение в Y. Пусть $A, B : X \to Y$ — ограниченные линейные операторы, для которых справедлива оценка $c_0\|x\|_X^2 \le c_1\|Jx\|_Y^2 + (Ax, Bx)_Y$, $x \in X$, где c_0, $c_1 > 0$ — постоянные.

Лемма 1. *Операторы A и B n-нормальны и имеют одинаковые индексы.*

Из этой леммы, очевидно, вытекает, что операторы A и B нетеровы или нет одновременно.

Обозначим через $C^1(M)$, $M \subset R$, пространство функций на M, имеющих непрерывные частные производные первого порядка по локальным координатам. Норма функции f в пространстве $C^1(M)$ определяется как сумма норм функций f и $\mathrm{d}f/\theta$ в пространстве $C(M)$, где θ — фиксированный голоморфный на $\overline{M}$ дифференциал, не имеющий нулей; тот же символ будем использовать для обозначения классов матриц, элементы которых принадлежат $C^1(M)$.

Пусть $\lambda \in C^1(\partial R)$ есть унитарная матрица порядка n.

Лемма 2. *Для любого w такого, что* $\mathrm{d}w \in L_2^{(1)}(R)$, *и удовлетворяющего на ∂R краевому условию* $\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}w = 0$, *имеет место оценка*

$$\left| \iint_R \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} \right| \leq \delta \|\mathrm{d}w\|^2_{L_2^{(1)}(R_0)} + c(\delta, \lambda, R_0, \theta, \Theta)\|w\|^2_{L_2(R_0)} + \left| \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im} \int_{\partial R_n} \overline{w}\,\mathrm{d}w \right|, \qquad (1)$$

где R_0 — произвольно фиксированная относительно компактная область на R, содержащая ∂R, δ — любое фиксированное положительное число, $c(\delta, \lambda, R_0, \theta, \Theta)$ — положительная постоянная, определяемая только по δ, λ, R_0, θ и Θ.

Лемма 3. *Пусть $\nu(t)$, $t \in \partial R$, — гладкая невырожденная матрица такая, что индексы сужений функции $\det \nu(t)$ на компоненты ∂R равны нулю. Тогда матрица $\nu(t)$ допускает невырожденное в каждой точке продолжение в R, принадлежащее классу $C^1(R)$ и совпадающее с единичной матрицей вне относительно компактной области R_0 ($\partial R \subset R_0 \subset R$).*

Рассмотрим следующую задачу. *Найти функцию $f \in W_2^1(R)$, имеющую Λ_K-поведение в окрестности идеальной границы поверхности R, удовлетворяющую на R уравнению*

$$\overline{\partial} f = \varphi \in L_2^{0,1}(R) \qquad (2)$$

и на ∂R — краевому условию

$$\mathrm{Re}(\overline{\lambda} f | \partial R) = g \in W_2^{1/2}(\partial R). \qquad (3)$$

Здесь $W_2^{1/2}(\partial R)$ — пространство следов на ∂R всех вещественных функций из пространства $W_2^1(R)$ ($n = 1$) с естественной нормой; λ — заданная на ∂R функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и не имеющая нулей; $\varphi \in L_2^{0,1}(R)$ — заданный дифференциал; $g \in W_2^{1/2}(\partial R)$ — заданная функция; $f|\partial R$ — след функции f на ∂R.

Предложение. *Задача Гильберта* (2), (3) *n-нормальна и ее индекс равен* $2\,\mathrm{ind}\,\lambda - 2h - m + 2$, *где h — род поверхности R, m — число компонент края ∂R.*

Доказательство. Обозначим через S дубль R относительно края ∂R, отождествляя при этом R с подмножеством римановой поверхности S. Род римановой поверхности S равен $2h + m - 1$. Через j обозначим инволютивное антиконформное отображение S на себя, оставляющее неподвижными точки множества ∂R, $S = R \cup j(R)$. Если $z = z(p)$ — униформизирующая в некоторой окрестности V, то $\zeta = \overline{z(j(p))}$ — униформизирующая в $j(V)$. За положительную ориентацию на ∂R выберем ту, которая при положительном обходе оставляет R слева. Положим $F|R = f$, $F|j(R) = \overline{f \circ j}$, где f — решение задачи (2), (3). Легко видеть, что F удовлетворяет условию симметрии $F = \overline{F \circ j}$, на $j(R)$ удовлетворяет уравнению $\overline{\partial} F = \overline{\varphi \circ j}$ и на ∂R — краевому условию

$$\overline{\lambda} F^+ + \lambda F^- = 2g,$$

где F^+ и F^- означают следы функции F на ∂R соответственно из областей R и $j(R)$.

Таким образом, полученная для нахождения F задача является частным случаем задачи, рассмотренной в [15].[1] Поэтому из полученного там результата с учетом симметрии функции F получаем доказываемое утверждение. □

[1] В статье [15] дополнительно предполагалось, что дифференциал φ локально интегрируем со степенью $p > 2$ на R. Однако, если не требовать непрерывности f на R и под значением функции f на ∂R понимать ее след, то все приведенные там рассуждения верны и в рассматриваемой здесь ситуации.

2. Краевая задача Гильберта

Рассмотрим в R линейный эллиптический оператор вида

$$Lw = \left(\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + \mu_1(z)\frac{\partial w}{\partial z} + \mu_2(z)\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}} + a(z)w + b(z)\overline{w}\right)\mathrm{d}\overline{z}.$$

Здесь z — локальная униформизирующая; μ_1, μ_2, a, b — квадратные матрицы порядка n, которые при замене локальной униформизирующей z на z' преобразуются по закону

$$\mu_1'(z') = \mu_1(z)\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}z}\Big/\frac{\mathrm{d}\overline{z}'}{\mathrm{d}\overline{z}}, \quad \mu_2'(z') = \mu_2(z), \quad a'(z') = a(z)\frac{\mathrm{d}\overline{z}}{\mathrm{d}\overline{z}'}, \quad b'(z') = b(z)\frac{\mathrm{d}\overline{z}}{\mathrm{d}\overline{z}'}, \tag{4}$$

причем $\operatorname{vrai}\sup\limits_{p\in R}(|\mu_1(z(p))| + |\mu_2(z(p))|) = k_0 < 1$, где $k_0 > 0$ — фиксированная постоянная, $|\mu_j(z)|$ — норма матрицы, рассматриваемой как оператор в пространстве $\mathbb{C}^n$. Пространство $\mathbb{C}^n$ наделено скалярным произведением $(x,y)_{\mathbb{C}^n} = x\overline{y} = x_1\overline{y}_1 + \dots + x_n\overline{y}_n$. В силу (4) нормы $|\mu_j(z)|$ не зависят от выбора локальных координат. Элементы матриц a и b локально интегрируемы со степенью $p_0 > 2$ и, кроме того, удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\sup_{\|w\|_{X_0}\le 1}\|a(z)w(z)\mathrm{d}\overline{z}\|_{L_2^{(1)}(R)} < \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\sup_{\|w\|_{X_0}\le 1}\|a(z)w(z)\mathrm{d}\overline{z}\|_{L_2^{(1)}(R\setminus R_n)} = 0,\\ \sup_{\|w\|_{X_0}\le 1}\|b(z)w(z)\mathrm{d}\overline{z}\|_{L_2^{(1)}(R)} < \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\sup_{\|w\|_{X_0}\le 1}\|b(z)w(z)\mathrm{d}\overline{z}\|_{L_2^{(1)}(R\setminus R_n)} = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

где через X_0 обозначено подпространство $W_2^1(R)$, состоящее из вектор-функций $w{=}(w_1, w_2, ..., w_n)$ таких, что $\mathrm{d}w_j \in \Lambda_K \oplus \Lambda_{e0}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим через $W_2^{1/2}(\partial R)$ пространство вещественных вектор-функций $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ на ∂R с конечной нормой

$$\|f\|_{W_2^{1/2}(\partial R)} = \|f\|_{L_2(\partial R)} + (\mathcal{J}(f))^{1/2},$$

где

$$\mathcal{J}(f) = \sum_{k=1}^n \int_{\partial R}\int_{\partial R}\frac{(f_k(q(s)) - f_k(q(\sigma)))^2}{|s-\sigma|^3}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\sigma,$$

s и σ — дуговые абсциссы на ∂R (ср. [16], гл. 3, § 1).

Пусть θ — непрерывный на R дифференциал типа $(1,0)$, не имеющий нулей и такой, что

$$\sup_{\|w\|_{X_0}\le 1}\|\overline{\theta}w\|_{L_2^{(1)}(R)} < \infty, \quad \lim_{n\to\infty}\sup_{\|w\|_{X_0}\le 1}\|\overline{\theta}w\|_{L_2^{(1)}(R\setminus R_n)} = 0, \quad \sup_R(|\theta\wedge\overline{\theta}|/\Theta) < \infty. \tag{6}$$

Определим линейный оператор $J : X_0 \to L_2^{0,1}(R)$ формулой $Jw := \overline{\theta}w$. Ядро этого оператора тривиально. Из доказываемой ниже леммы 5 следует, что оператор $J : X_0 \to L_2^{0,\,1}(R)$ вполне непрерывен.

Определим оператор $J^* : L_2^{0,1}(R) \to X_0^*$ формулой

$$(J^*\varphi)(w) = (\varphi, Jw)_{L_2^{(1)}(R)} = \operatorname{Re}\iint_R \varphi\wedge *(\overline{Jw}) = \operatorname{Im}\iint_R \varphi\wedge\theta\overline{w}, \quad w \in X_0.$$

Очевидно, имеет место соотношение $J^*Ju(v) = (Ju, Jv)_{L_2^{(1)}(R)}$, $u, v \in X_0$.

Отображение $L_2^{0,1}(R) \ni \varphi \mapsto l_\varphi \in L_2^{0,1}(R)^*$, задаваемое равенством

$$l_\varphi(\psi) = (\varphi, \psi)_{L_2^{(1)}(R)} = \operatorname{Re}\iint_R \varphi\wedge *\overline{\psi}, \quad \psi \in L_2^{0,1}(R),$$

определяет изоморфизм $L_2^{0,1}(R)$ на $L_2^{0,1}(R)^*$, который является изометрией. Поэтому пространства $L_2^{0,1}(R)$ и $L_2^{0,1}(R)^*$ можно отождествить. Тогда оператор J^* является сопряженным оператору J, и из свойств последнего следует, что оператор J^* имеет плотный образ.

Положим $Y = L_2^{0,1}(R) \times W_2^{1/2}(\partial R)$ и определим оператор $H : X_0 \to Y$ формулой

$$Hw := \{Lw,\ \operatorname{Re}(\overline{\lambda}w|\partial R)\},$$

где $w|\partial R$ означает след вектор-функции $w \in X_0$ на ∂R. Этот оператор является линейным и ограниченным.

Задачей Гильберта для дифференциального оператора L будем называть краевую задачу вида

$$Hw = \{\varphi, f\} \in Y, \quad w \in X_0. \tag{7}$$

Пусть

$$L_0 w = \left(\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + \mu_1(z)\frac{\partial w}{\partial z} + \mu_2(z)\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}\right)\mathrm{d}\overline{z} = \overline{\partial} w + \mu_1(z)(\partial w/\partial z)\mathrm{d}\overline{z} + \mu_2(z)\overline{\partial}\overline{w}$$

— главная часть оператора L. Получим априорную оценку, которая будет использована при построении (полу)нетеровой теории задачи (7).

Лемма 4. *Пусть* $w \in X_0$ *и* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda} w|\partial R) = 0$, *где* λ *— унитарная гладкая матрица на* ∂R. *Тогда имеет место оценка*

$$c_0\|w\|^2_{X_0} \le c_1\|Jw\|^2_{L_2^{0,1}(R)} + (L_0 w, \overline{\partial} w)_{L_2^{0,1}(R)}, \tag{8}$$

где $c_0, c_1 > 0$ *— постоянные, определяемые только по* θ, Θ, k_0.

Доказательство. Преобразуем скалярное произведение в правой части неравенства (8)

$$(L_0 w, \overline{\partial} w)_{L_2^{0,1}(R)} = \mathrm{Re}\iint_R L_0 w \wedge *\partial\overline{w} = \mathrm{Im}\iint_R L_0 w \wedge \partial\overline{w} =$$
$$= \mathrm{Im}\iint_R \overline{\partial} w \wedge \partial\overline{w} + \mathrm{Im}\iint_R \left(\mu_1(z)\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \mu_2(z)\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right)\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z.$$

Положим

$$\mathcal{I} = -\mathrm{i}\iint_R \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} = \mathrm{Im}\iint_R \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w}.$$

Нетрудно проверить следующие соотношения:

$$\|\overline{\partial} w\|^2_{L_2^{(1)}(R)} = \frac{1}{2}\|\mathrm{d}w\|^2_{L_2^{(1)}(R)} + \frac{1}{2}\mathcal{I}, \quad \|\partial w\|^2_{L_2^{(1)}(R)} = \frac{1}{2}\|\mathrm{d}w\|^2_{L_2^{(1)}(R)} - \frac{1}{2}\mathcal{I}, \tag{9}$$
$$\left|\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z\right| = \left|\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z\right| = |\overline{\partial}\overline{w} \wedge \partial\overline{w}|.$$

Отсюда

$$\left|\mathrm{Im}\iint_R \left(\mu_1\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \mu_2\frac{\partial \overline{w}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial z}\right)\mathrm{d}\overline{z} \wedge \mathrm{d}z\right| \le$$
$$\le k_0\iint_R |\overline{\partial}\overline{w} \wedge \partial\overline{w}| = \frac{k_0}{2}\int_R |w_x^2 + w_y^2|\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \le$$
$$\le \frac{k_0}{2}\iint_R (|w_x|^2 + |w_y|^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{k_0}{2}\|\mathrm{d}w\|^2_{L_2^{(1)}(R)}. \tag{10}$$

Из соотношений (9), (10) получаем

$$(L_0 w, \overline{\partial} w)_{L_2^{0,1}(R)} \ge \|\overline{\partial} w\|^2_{L_2^{(1)}(R)} - \frac{k_0}{2}\|\mathrm{d}w\|^2_{L_2^{(1)}(R)} = \frac{1-k_0}{2}\|\mathrm{d}w\|^2_{L_2^{(1)}(R)} + \frac{1}{2}\mathcal{I}.$$

Отсюда и из оценки (1) имеем

$$\frac{1-k_0}{2}\|\mathrm{d}w\|^2_{L_2^{(1)}(R)} \le \frac{1}{2}c(\delta, \lambda, R_0, \theta, \Theta)\|w\|^2_{L_2(R_0)} + \frac{1}{2}\delta\|\mathrm{d}w\|^2_{L_2^{(1)}(R_0)} +$$
$$+ (L_0 w, \overline{\partial} w)_{L_2^{0,1}(R)} + \frac{1}{2}\left|\lim_{n\to\infty}\mathrm{Im}\int_{\partial R_n}\overline{w}\,\mathrm{d}w\right|.$$

Поскольку компоненты вектора w имеют Λ_K-поведение в окрестности идеальной границы поверхности R, то последнее слагаемое в этом соотношении равно нулю (см. [13]). Так как $\delta > 0$ любое, то выберем его удовлетворяющим неравенству $\delta < 1 - k_0$. Тогда

$$\frac{1-k_0}{2}\|w\|^2_{X_0} \le \frac{1}{2}c(\delta,\lambda,R_0,\theta,\Theta)\|w\|^2_{L_2(R_0)} + \frac{1-k_0}{2}\|w\|^2_{L_2(R)} + \frac{1}{2}\delta\|\mathrm{d}w\|^2_{L_2^{(1)}(R_0)} +$$
$$+ (L_0 w, \overline{\partial} w)_{L_2^{0,1}(R_0)} \le \frac{1}{2}(c(\delta,\lambda,R_0,\theta,\Theta) + 1 - k_0)\|w\|^2_{L_2(R)} + \frac{1}{2}\delta\|\mathrm{d}w\|^2_{L_2^{(1)}(R)} + (L_0 w, \overline{\partial} w)_{L_2^{0,1}(R_0)} \le$$
$$\le \frac{1}{2}(c(\delta,\lambda,R_0,\theta,\Theta) + 1 - k_0)\|w\|^2_{L_2(R)} + \frac{1}{2}\delta\|w\|^2_{X_0} + (L_0 w, \overline{\partial} w)_{L_2^{0,1}(R_0)}$$

или

$$\frac{1-k_0-\delta}{2}\|w\|^2_{X_0} \le \frac{1}{2}(c(\delta,\lambda,R_0,\theta,\Theta) + 1 - k_0)\|w\|^2_{L_2(R)} + (L_0 w, \overline{\partial} w)_{L_2^{0,1}(R_0)},$$

причем коэффициенты при квадратах норм суть положительные числа. Но в силу (6) $\|w\|_{L_2(R)} \le c(\theta,\Theta)\|Jw\|_{L_2^{0,1}(R)}$. Отсюда получаем утверждение леммы 4. $\square$

Из условий (5) следует, что оператор $\Xi w := (aw + b\overline{w})\mathrm{d}\overline{z}$ непрерывен из X_0 в $L_2^{0,1}(R)$. Кроме того, имеет место

Лемма 5. *Оператор* $\Xi : X_0 \to L_2^{0,1}(R)$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $b = 0$. Обозначим через R_0 регулярную относительно компактную область на R, содержащую ∂R. Гильбертово пространство $W_2^1(R_0)$ компактно вложено в гильбертово пространство $L_2(R_0)$ ([17], с. 106). Если матрица a непрерывна в $\overline{R}_0$, то оператор $\Xi : L_2(R_0) \to L_2^{0,1}(R_0)$ непрерывен и, следовательно, оператор $\Xi : W_2^1(R_0) \to L_2^{0,1}(R_0)$ вполне непрерывен.

Пусть теперь $a = (a_{ij})$ — матрица, удовлетворяющая первоначальным условиям. Тогда существует последовательность непрерывных в $\overline{R}_0$ матриц $a^{(n)}$, преобразующихся при замене локальной униформизирующей по тому же закону, что и матрица a, и таких, что $\|a^{(n)}(z)\mathrm{d}\overline{z} - a(z)\mathrm{d}\overline{z}\|_{L_{p_0}^{(1)}(R_0)} \to 0$ при $n \to \infty$, где норма матрицы в пространстве $L_{p_0}^{(1)}(R_0)$ определена равенством

$$\|a(z)\mathrm{d}\overline{z}\|^{p_0}_{L_{p_0}^{(1)}(R_0)} = \sum_{i,j=1}^{n} \iint_{R_0} \left| \frac{(a_{ij}\mathrm{d}\overline{z}) \wedge *\overline{(a_{ij}\mathrm{d}\overline{z})}}{\Theta} \right|^{p_0/2} \Theta.$$

По доказанному оператор $\Xi^{(n)} := a^{(n)} I$ вполне непрерывен из $W_2^1(R_0)$ в $L_2^{0,1}(R_0)$. Поэтому для доказательства полной непрерывности оператора $\Xi : W_2^1(R_0) \to L_2^{0,1}(R_0)$ достаточно установить, что

$$\|\Xi^{(n)} - \Xi\|_{W_2^1(R_0) \to L_2^{(1)}(R_0)} \to 0 \tag{11}$$

при $n \to \infty$. Имеем

$$\|(\Xi^{(n)} - \Xi)w\|_{L_2^{(1)}(R_0)} = \|(a^{(n)} - a)w\mathrm{d}\overline{z}\|_{L_2^{(1)}(R_0)} \le c_1\|(a^{(n)} - a)\mathrm{d}\overline{z}\|_{L_{p_0}^{(1)}(R_0)}\|w\|_{L_{q_0}(R_0)}, \tag{12}$$

где $1/p_0 + 1/q_0 = 1/2$, $\|w\|^{q_0}_{L_{q_0}(R_0)} = \iint\limits_{R_0} |w|^{q_0}\Theta$, c_1 — постоянная, не зависящая от w. Так как $W_2^1(R_0)$ непрерывно вложено в $L_{q_0}(R_0)$ для любого q_0, $1 \le q_0 < \infty$, то из (12) получаем

$$\|(\Xi^{(n)} - \Xi)w\|_{L_2^{(1)}(R_0)} \le c\|(a^{(n)} - a)\mathrm{d}\overline{z}\|_{L_{p_0}^{(1)}(R_0)}\|w\|_{W_2^1(R_0)},$$

откуда вытекает (11) и полная непрерывность оператора $\Xi : W_2^1(R_0) \to L_2^{0,1}(R_0)$.

Положим $a_n = a\chi(R_n)$, где χ — характеристическая функция множества. По доказанному оператор $\Xi_n := a_n I$ вполне непрерывен из $W_2^1(R_n)$ в $L_2^{0,1}(R_n)$ и, следовательно, из X_0 в $L_2^{0,1}(R)$. Покажем, что $\|\Xi_n - \Xi\|_{X_0 \to L_2^{(1)}(R)} \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно,

$$\|\Xi_n - \Xi\|_{X_0 \to L_2^{(1)}(R)} = \sup_{\|w\|_{X_0} \le 1} \|(a_n - a)w\mathrm{d}\overline{z}\|_{L_2^{(1)}(R)} = \sup_{\|w\|_{X_0} \le 1} \|aw\mathrm{d}\overline{z}\|_{L_2^{(1)}(R \setminus R_n)} \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу условия (5). Отсюда вытекает доказываемое утверждение. $\square$

Рассмотрим краевую задачу Гильберта с однородным краевым условием

$$Hw = \{\varphi, 0\} \in L_2^{0,1}(R) \times 0, \quad w \in X_0. \tag{13}$$

Лемма 6. *Оператор $H : X_0 \to L_2^{0,1}(R) \times 0$ n-нормален и его индекс равен $2\varkappa - n(2h+m-2)$, где $\varkappa = \operatorname{ind}\det\lambda$.*

Доказательство. Обозначим через $X_0(\lambda)$ подпространство X_0, элементы которого удовлетворяют условию $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}w|\partial R) = 0$. Тогда уравнение (13) эквивалентно уравнению $Lw = \varphi \in L_2^{0,1}(R)$, $w \in X_0(\lambda)$, где $X_0(\lambda)$ является гильбертовым пространством. Оператор $J_1 = J|X_0(\lambda) : X_0(\lambda) \to L_2^{0,1}(R)$ вполне непрерывен и однозначно разрешим, а оператор $J_1^* : L_2^{0,1}(R) \to X_0(\lambda)^*$ определим вложением $L_2^{0,1}(R) \ni \varphi \mapsto l_\varphi \in X_0(\lambda)^*$, где

$$l_\varphi(w) = (\varphi, J_1 w)_{L_2^{(1)}(R)} = \operatorname{Im}\iint_R \varphi \wedge \theta\overline{w}, \quad w \in X_0(\lambda).$$

Отождествим пространство $L_2^{0,1}(R)^*$ с $L_2^{0,1}(R)$. Тогда оператор J_1^* является сопряженным J_1. Следовательно, и J_1^* — компактный оператор. Операторы J_1 и J_1^* связаны соотношением $J_1^* J_1 u(v) = (J_1 u, J_1 v)_{L_2^{0,1}(R)}$, $u, v \in X_0$. Далее, для операторов $L_0, \overline{\partial} : X_0(\lambda) \to L_2^{0,1}(R)$ имеет место оценка (8) с заменой X_0 на $X_0(\lambda)$ и J на J_1, и, следовательно, к ним применима лемма 1. С учетом леммы 5 это означает, что утверждение леммы 6 достаточно доказать для оператора $L = \overline{\partial}$.

С этой целью рассмотрим задачу

$$\overline{\partial}w = \varphi \in L_2^{0,1}(R), \quad w \in X_0(\lambda). \tag{14}$$

Обозначим через $\varkappa_k$ индекс сужения $\det\lambda(t)$ на Γ_k, где Γ_k, $k = 1,\ 2, \ldots, m$, — компоненты края ∂R. Введем матрицу $\nu(t)$, $t \in \partial R$, определенную формулами

$$\nu|\Gamma_k = \operatorname{diag}\{a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn}\}\lambda, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где a_{kj} — функции класса $C^1(\Gamma_k)$, не обращающиеся в нуль ни в одной точке $t \in \Gamma_k$ и $\operatorname{ind}(a_{k1}a_{k2}\cdots a_{kn}) = -\varkappa_k$.

Очевидно, ν — гладкая невырожденная матрица, причем $\operatorname{ind}\det\nu|\Gamma_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Тогда согласно лемме 3 она допускает гладкое невырожденное продолжение в R, совпадающее с единичной матрицей вне относительно компактной области R_0, которое также будем обозначать буквой ν. Введем новую неизвестную функцию $u = \overline{\nu}w$. Тогда задача (14) сводится к задаче

$$\overline{\partial}u + \overline{\nu}(\overline{\partial}(\overline{\nu})^{-1})u = \overline{\nu}\varphi, \quad u \in X_0(\lambda_0), \tag{15}$$

где $\lambda_0|\Gamma_k$ есть $\operatorname{diag}\{1/a_{k1}, 1/a_{k2}, \ldots, 1/a_{kn}\}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Так как младший член в левой части уравнения (15) образует вполне непрерывный оператор, действующий из $X_0(\lambda_0)$ в $L_2^{0,1}(R)$, то он не влияет на n-нормальность и индекс уравнения (15). Поэтому его можно опустить.

Следовательно, задачи (14) или (15) эквивалентны (в смысле n-нормальности и сохранения индекса) задаче (15) без младшего члена. Последняя задача распадается на n скалярных задач для компонент вектора u:

$$\overline{\partial}u_j = \psi_j \in (L_2^{0,1}(R))_1, \quad u_j \in (X_0)_1, \quad \operatorname{Re}(\overline{\lambda}_j u_j|\partial R) = 0, \quad j = 1,\ 2, \ldots, n, \tag{16}$$

где $\lambda_j = 1/a_{kj}$ на Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, ψ_j — компоненты вектора $\overline{\nu}\varphi$, $(X_0)_1$ и $(L_2^{0,1}(R))_1$ — это пространства X_0 и $L_2^{0,1}(R)$ при $n = 1$.

Краевое условие задачи (7) удовлетворяет условию дополнительности [11], которое для задачи (16) имеет вид

$$\lambda_j(t) \neq 0, \quad t \in \partial R, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

В силу предложения, сформулированного выше, при выполнении условий (17) каждая из задач Гильберта (16) является n-нормальной.[1] Индексы задач (16) соответственно равны $2\operatorname{ind}\lambda_j - 2h - m + 2$. Индекс задачи Гильберта (13) равен сумме индексов задач (16), т. е. $2(\operatorname{ind}\lambda_1 + \operatorname{ind}\lambda_2 + \cdots + \operatorname{ind}\lambda_n) - n(2h+m-2) = 2\varkappa - n(2h+m-2)$. $\square$

Рассмотрим теперь задачу Гильберта (7) с неоднородными граничными условиями. Пусть $w_0 = (\overline{\lambda})^{-1} f = \lambda^t f$. Матрица λ^t гладкая, поэтому w_0 допускает продолжение на R, принадлежащее пространству X_0. Сохраним за продолжением прежнее обозначение и запишем задачу (7) в виде

$$H(w - w_0) = \{\varphi - Lw_0,\ f - \operatorname{Re}\overline{\lambda} w_0\} \in L_2^{0,1}(R) \times 0, \quad w \in X_0. \tag{18}$$

В силу доказанного в лемме 6 задача (18) n-нормальна относительно вектор-функции $u = w - w_0 \in X_0(\lambda)$. Значит, n-нормальна и задача (7), причем ее индекс равен $2\varkappa - n(2h+m-2)$. Таким образом, доказана

Теорема. *Задача Гильберта* (7) *n-нормальна, и ее индекс равен* $2\varkappa - n(2h + m - 2)$, *где* $\varkappa = \operatorname{ind}\det\lambda$, *$h$ — род поверхности R, m — число компонент края ∂R. При $h < \infty$ задача* (7) *нетерова.*

Литература

1. Rodin Yu.L. *Generalized analytic functions on Riemann surfaces* // Lect. Notes Math. – 1987. – V. 1288. – P. 1–128.
2. Бикчантаев И.А. *Краевые задачи для эллиптических систем первого порядка на римановых поверхностях* // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22. – № 10. – С. 1732–1738.
3. Фоменко В.Т., Бикчантаев И.А. *Применение обобщенных аналитических функций на римановых поверхностях к исследованию G-деформаций двумерных поверхностей в E^4* // Матем. сб. – 1988. – Т. 136. – № 4. – С. 561–573.
4. Вольперт А.И. *Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости* // Тр. ММО. – 1961. – Т. 10. – С. 41–87.
5. Боярский Б.В. *Теория обобщенного аналитического вектора* // Ann. Polon. Mathem. – 1966. – Т. 17. – № 3. – С. 281–320.
6. Виноградов В.С. *Граничная задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости* // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7. – № 8. – С. 1440–1448.
7. Виноградов В.С. *Об одном методе решения граничной задачи для эллиптической системы первого порядка на плоскости* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 201. – № 4. – С. 767–770.
8. Виноградов В.С. *О граничных задачах для эллиптических систем на плоскости с непрерывными коэффициентами* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 4. – С. 777–780.
9. Wendland W. *Elliptic systems in the plane.* – London: Pitman Press, 1979. – XI + 400 p.
10. Сиражудинов М.М. *О краевой задаче Римана–Гильберта* (L_2*-теория*) // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 8. – С. 1400–1406.
11. Сиражудинов М.М. *О задаче Римана–Гильберта для эллиптических систем первого порядка в многосвязной области* // Матем. сб. – 1993. – Т. 184. – № 11. – С. 39–62.
12. Бикчантаев И.А. *Задача Гильберта для линейных эллиптических систем первого порядка на римановой поверхности с краем* // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 4. – С. 500–507.
13. Бикчантаев И.А. *Интегральные операторы И.Н. Векуа на римановой поверхности* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 69. – № 1. – С. 18–30.

[1] При $h < \infty$ условия (17) необходимы и достаточны для нетеровости задач Гильберта (16). При $h = \infty$ условия (17) достаточны для n-нормальности задач (16), но не являются необходимыми; соответствующий контрпример построен в статье [18].

14. Shiba M. *Some general properties of behavior spaces of harmonic semiexact differentials on an open Riemann surface* // Hiroshima Math. J. – 1978. – V. 8. – № 1. – P. 151–164.
15. Бариева Н.А., Бикчантаев И.А. *Задача сопряжения для неоднородного уравнения Коши–Римана на римановой поверхности* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 8. – С. 8–12.
16. Михлин С.Г. *Линейные уравнения в частных производных.*– М.: Высш. школа, 1977. – 432 с.
17. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – М.: Наука, 1988. – 334 с.
18. Бикчантаев И.А. *О полунетеровости краевых задач на поверхностях бесконечного рода* // Расширенные заседания семинара ИПМ им. И.Н. Векуа при Тбилисском ун-те. – 1990. – Т. 5. – № 1. – С. 30–33.

Казанский государственный университет

Поступила 18.12.2003