ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 5 (492)

УДК 517.977

С.Я. СЕРОВАЙСКИЙ

НИЖНЕЕ ПОПОЛНЕНИЕ И РАСШИРЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В данной статье рассматривается задача оптимального управления, решения которой, вообще говоря, не существует. Осуществляется ее расширение с помощью вводимого понятия нижнего пополнения числового множества. В качестве примера исследуется задача управления в коэффициентах для уравнения параболического типа. Для соответствующей расширенной задачи устанавливаются необходимые условия оптимальности. В более простом случае, когда управление входит в свободный член уравнения, указанным способом выделяется класс минимизирующих последовательностей. Тем самым определяется допустимое управление, значение функционала на котором сколь угодно близко к его нижней грани, хотя исследуемая задача заведомо не разрешима.

1. Введение

Пусть Ω — открытая ограниченная область в R^n с границей S, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = S \times (0,T)$. Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[v(x,t)\frac{\partial y}{\partial x_i}\right] = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1.1}$$

с краевыми условиями

$$y(x,0) = y_0, \quad x \in \Omega; \quad y = 0, \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{1.2}$$

где $f \in L_2(Q)$, $y_0 \in L_2(\Omega)$ — известные функции, а v — управление, выбираемое из множества

$$U = \{v \in L_\infty(Q) \mid 0 < \alpha \le v(x,t) \le \beta \text{ почти всюду (п. в.) на } Q\}.$$

Очевидно, для любого управления $v \in U$ задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение $y = y(v)$ из пространства

$$Y = H^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L_2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Рассматривается функционал

$$I(v) = \int_Q [y(v) - z]^2 dQ + \varepsilon \int_Q v^2 dQ,$$

где $\varepsilon > 0$, z — известная функция класса $L_2(Q)$. Задача оптимального управления состоит в отыскании такой функции $v \in U$, которая минимизирует на множестве U функционал I. Она относится к классу задач управления в коэффициентах, которые, вообще говоря, не имеют решения [1].

Формальный вывод необходимых условий оптимальности для рассматриваемой задачи не вызывает серьезных затруднений.

Теорема 1. *Если оптимальное управление и существует, то оно удовлетворяет вариационному неравенству*

$$\int_Q \left[\left(\sum_{i=1}^n (w-u) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + 2\varepsilon u(w-u) \right] dQ \geq 0 \quad \forall w \in U, \tag{1.3}$$

где $y = y(u)$, а p — решение задачи

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = -2(z-y), \quad (x,t) \in Q, \tag{1.4}$$

$$p(x,T) = 0, \quad x \in \Omega; \quad p = 0, \quad (x,t) \in \Sigma. \tag{1.5}$$

Доказательство. Умножая обе части равенства (1.1) на произвольную функцию p из пространства Y, удовлетворяющую условиям (1.5), и интегрируя результат по области Q, будем иметь

$$\int_Q \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \right] y(v) dQ + \int_Q f p \, dQ + \int_\Omega y_0 p(x,0) dx = 0.$$

Отсюда следует соотношение

$$\int_Q \left\{ \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \right] [y(v) - y] - \sum_{i=1}^n (v-u) \frac{\partial y(v)}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\} dQ = 0.$$

Пользуясь теорией линейных уравнений параболического типа, установим, что задача (1.4), (1.5) имеет единственное решение p из пространства Y. Тогда, выбирая в последнем равенстве в качестве p решение указанной задачи, будем иметь

$$-\int_Q 2(z-y)[y(v)-y] dQ = \int_Q \left[\sum_{i=1}^n (v-u) \frac{\partial y(v)}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] dQ. \tag{1.6}$$

Если управление u является оптимальным, то справедливо неравенство

$$I(v) - I(u) \geq 0 \quad \forall v \in U,$$

которое преобразуется к виду

$$-\int_Q 2(z-y)[y(v)-y] dQ + \int_Q [y(v)-y]^2 dQ + \int_Q \varepsilon (v^2 - u^2) dQ \geq 0 \quad \forall v \in U.$$

Пользуясь равенством (1.6), будем иметь

$$\int_Q \left[\sum_{i=1}^n (v-u) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] dQ + \int_Q \left[\sum_{i=1}^n (v-u) \frac{\partial [y(v)-y]}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] dQ + \\ + \int_Q [y(v)-y]^2 dQ + \int_Q \varepsilon (v^2 - u^2) dQ \geq 0 \quad \forall v \in U.$$

Определив здесь $v = v_\theta = u + \theta(w-u)$, где $\theta \in (0,1)$, $w \in U$, получаем

$$\int_Q \left[\sum_{i=1}^n (w-u) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] dQ + \int_Q \left[\sum_{i=1}^n (w-u) \frac{\partial h_\theta}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] dQ + \\ + \theta^{-1} \int_Q (h_\theta)^2 dQ + \int_Q \varepsilon (w-u)[2u + \theta(w-u)] dQ \geq 0, \tag{1.7}$$

где $h_\theta = y(v_\theta) - y$. Функция h_θ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial h_\theta}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_\theta \frac{\partial h_\theta}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left((v_\theta - u) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = 0, \quad (x,t) \in Q$$

с однородными граничными условиями. После умножения этого равенства на h_θ и интегрирования по всей области получаем оценку

$$\int_Q \sum_{i=1}^{n} v_\theta \Big(\frac{\partial h_\theta}{\partial x_i}\Big)^2 dQ \le \theta \Big| \int_Q \sum_{i=1}^{n} (w-u) \frac{\partial h_\theta}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_i} dQ \Big|.$$

Пользуясь определением множества допустимых управлений, установим соотношение

$$\alpha \|h_\theta\|^2 \le 2\beta\theta \|h_\theta\| \, \|y\| \tag{1.8}$$

с нормами пространства $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Отсюда следует оценка $\theta^{-1}\|h_\theta\| \le \mathrm{const}$. Учитывая непрерывность вложения пространства $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ в $L_2(Q)$, имеем

$$\theta^{-2} \int_Q (h_\theta)^2 dQ \le \mathrm{const}\,.$$

Тогда, переходя к пределу в неравенстве (1.7) при $\theta \to 0$, установим вариационное неравенство (1.3). $\square$

В основе доказанного утверждения лежит предположение о существовании оптимального управления. Однако прямое обоснование разрешимости рассматриваемой задачи наталкивается на существенные трудности. В частности, для минимизирующей последовательности $\{v_k\}$ можно получить сходимость $v_k \to v$ $*$-слабо в $L_\infty(Q)$, а также $y(v_k) \to y$ слабо в Y. Но установить справедливость равенства $y = y(v)$ не представляется возможным, что не позволяет завершить доказательство разрешимости задачи. Эти затруднения носят принципиальный характер, поскольку, как известно, в задачах управления в коэффициентах для уравнений параболического типа оптимальное управление может вообще не существовать [1]. Тем не менее, нижняя грань минимизируемого функционала на множестве допустимых управлений наверняка существует в силу ограниченности снизу числового множества $I(U)$. Вследствие этого наверняка имеет смысл задача определения такого допустимого управления, значение функционала на котором сколь угодно близко к его нижней грани.

Идея расширения понятия решения экстремальной задачи, выдвинутая в свое время Д. Гильбертом, была реализована еще в тридцатые годы Л. Янгом [2] и Е. МакШейном [3] для одномерных задач вариационного исчисления. Полученные результаты впоследствии были распространены на задачи оптимального управления (см., напр., [4]–[7]) с использованием для расширенного класса объектов терминов *“обобщенная кривая”, “скользящий режим”, “обобщенное управление”* и т. п.

Наиболее естественный способ расширения экстремальных задач, по-видимому, основан на переходе от поиска (возможно, несуществующего) оптимального управления к задаче отыскания минимизирующих последовательностей. В случае ограниченности снизу минимизируемого функционала наверняка существует его нижняя грань, а значит, и минимизирующие последовательности. На любой из них значение критерия оптимальности в пределе одно и то же. Таким образом, естественным объектом поиска в расширенной оптимизационной задаче оказывается класс в определенном смысле эквивалентных минимизирующих последовательностей. Объекты аналогичной природы возникают при определении Г. Кантора действительных чисел и обобщенных функций в интерпретации Я. Микусинского [8], а также при пополнении равномерного пространства [9]. Для исследования неразрешимых экстремальных задач можно расширить множество допустимых управлений с помощью общего принципа пополнения [10].

Отметим, однако, что в теории экстремума более естественно работать с последовательностями управлений, для которых соответствующие последовательности функционалов обладают лишь нижним пределом и не обязательно сходятся (см., напр., [7], с. 243). В этой связи при расширении множества допустимых управлений логичнее считать эквивалентными такие последовательности управлений, для которых соответствующие последовательности функционалов будут обладать равными нижними пределами. Они могут не быть фундаментальными в естественном пространстве управлений, вследствие чего стандартная схема пополнения оказывается неприемлемой. Ниже предлагается модифицированная схема пополнения, ориентированная на указанный выше класс последовательностей. С ее помощью будет дан способ расширения экстремальных задач, применение которого для рассматриваемой задачи управления в коэффициентах позволяет не только получить новую задачу, для которой минимум функционала равен нижней грани исходного функционала, но и описать свойства минимизирующих последовательностей для исходной задачи. Иногда таким способом можно даже найти семейство минимизирующих последовательностей.

2. Нижнее пополнение

Цель статьи состоит в построении такого расширения множества допустимых управлений, при котором любая минимизирующая последовательность окажется сходящейся на расширенном множестве. Введем сначала понятие нижнего пополнения числового множества. После этого множество допустимых управлений можно будет наделить инициальной структурой ([11], с. 258), определяемой минимизируемым функционалом и числовым множеством значений этого функционала.

Определение 1. Последовательность действительных чисел назовем *фундаментальной снизу*, если она обладает нижним пределом, являющимся пределом ее невозрастающей подпоследовательности. Множество X действительных чисел *полно снизу*, если оно содержит нижние пределы любой своей фундаментальной снизу последовательности. Множество Y действительных чисел называется *нижним пополнением* X, если оно полно снизу и X плотно в Y.

Отметим, что строго возрастающая сходящаяся последовательность фундаментальна, но не фундаментальна снизу. В то же время последовательность, обладающая подпоследовательностями, сходящимися к разным пределам, может оказаться фундаментальной снизу, но заведомо не фундаментальна. Таким образом, указанные два понятия не сводятся одно к другому. Тем не менее, по аналогии с классической теоремой о пополнении и процедурой определения Кантором действительных чисел ([9], с. 232) может быть доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Любое множество действительных чисел имеет нижнее пополнение.*

Доказательство. Пусть задано произвольное множество X действительных чисел. Две фундаментальные снизу последовательности назовем эквивалентными, если их нижние пределы совпадают. Определим фактор-множество Y' семейства фундаментальных снизу последовательностей на X в смысле указанного отношения. Любой элемент множества Y' есть класс эквивалентности фундаментальных снизу последовательностей из X. Существует естественное взаимно однозначное соответствие между этим объектом и соответствующим нижним пределом, т. е. конкретным действительным числом. Таким образом, множество Y' с точностью до изоморфизма состоит из действительных чисел. Обозначим через Y изоморфное Y' подмножество действительных чисел.

Любой элемент множества X является пределом (тем более, нижним пределом) соответствующей стационарной последовательности (естественно, фундаментальной снизу), а стало быть, принадлежит множеству Y. Следовательно, множество X вложено в Y. Любой элемент множества Y по определению является нижним пределом фундаментальных снизу последовательностей из X. Следовательно, существует такая (невозрастающая) последовательность элементов множества X, которая сходится к этому элементу. Тем самым множество X плотно в Y.

Пусть $\{y_k\}$ — фундаментальная снизу последовательность на Y. Обозначим через $\{y_{ks}\}$ такую невозрастающую подпоследовательность из $\{y_k\}$, предел которой равен нижнему пределу $\{y_k\}$. Если эта последовательность имеет стационарную подпоследовательность, которая характеризуется элементом, равным нижнему пределу $\{y_k\}$, то последний является элементом Y, а значит, нижний предел данной фундаментальной снизу последовательности элементов множества Y принадлежит этому множеству. Если не существует стационарной подпоследовательности с описанными выше свойствами, то после, быть может, выделения подпоследовательности последовательность $\{y_{ks}\}$ будет монотонно убывающей.

Рассматривается произвольная последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$, сходящаяся к нулю. В силу установленного ранее свойства для любого k существует такой элемент x_k из X, что $|y_k - x_k| < \varepsilon_k$. Покажем, что последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна снизу. Установим, что подпоследовательность $\{x_{ks}\}$ из $\{x_k\}$ монотонно убывает и обладает пределом, равным нижнему пределу $\{x_k\}$. Поскольку $\{y_{ks}\}$ есть сходящаяся убывающая последовательность, существует последовательность положительных чисел $\{\delta_{ks}\}$ такая, что

$$y_{ks} - y_{ks+1} = \delta_{ks}, \quad \delta_{ks} \to 0.$$

Справедливо соотношение

$$x_{ks} - x_{ks+1} = (x_{ks} - y_{ks}) + (y_{ks} - y_{ks+1}) + (y_{ks+1} - x_{ks+1}) \geq \delta_{ks} - \varepsilon_{ks} - \varepsilon_{ks+1}.$$

В силу произвольности $\{\varepsilon_k\}$ элементы этой последовательности можно выбрать столь малыми, чтобы выражение в правой части последнего соотношения было положительным. Отсюда следует, что последовательность $\{x_{ks}\}$ убывает.

Если последовательность $\{x_{ks}\}$ не ограничена снизу, то для любого числа L существует такой номер, начиная с которого имеем $x_{ks} < L$. Тогда выполняется неравенство

$$y_{ks} = x_{ks} + (y_{ks} - x) < L + \varepsilon_{ks}.$$

Отсюда в силу произвольности L и малости ε_{ks} следует неограниченность снизу сходящейся убывающей последовательности $\{y_{ks}\}$. Таким образом, убывающая последовательность $\{x_{ks}\}$ ограничена снизу, а значит, сходится.

Предположим, что предел $\{x_{ks}\}$ больше нижнего предела последовательности $\{x_k\}$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{x_{kl}\}$ из $\{x_k\}$, что справедливо соотношение

$$\lim x_{ks} - \lim x_{kl} > 0. \tag{2.1}$$

Выполняется равенство

$$\lim y_{ks} - \lim y_{kl} = (\lim y_{ks} - y_{ks}) + (y_{ks} - x_{ks}) + (x_{ks} - \lim x_{ks}) + (\lim x_{ks} - \lim x_{kl}) + \\ + (\lim x_{kl} - x_{kl}) + (x_{kl} - y_{kl}) + (y_{kl} - \lim y_{kl}).$$

В силу сходимости соответствующих последовательностей разности

$$(\lim y_{ks} - y_{ks}), \quad (x_{ks} - \lim x_{ks}), \quad (\lim x_{kl} - x_{kl}), \quad (y_{kl} - \lim y_{kl})$$

будут сколь угодно малы для достаточно больших номеров. Высокая малость величин

$$(y_{ks} - x_{ks}), \quad (x_{kl} - y_{kl})$$

следует из имеющихся аппроксимационных свойств (так выбиралась последовательность $\{x_k\}$). Тогда в силу (2.1) справедливо неравенство

$$\lim y_{ks} - \lim y_{kl} > 0,$$

чего не может быть. Следовательно, предел $\{x_{ks}\}$ равен нижнему пределу последовательности $\{x_k\}$.

Итак, последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна снизу, а значит, определяет некоторый элемент y множества Y, являющийся нижним пределом $\{x_k\}$. Последний является пределом подпоследовательности $\{x_{ks}\}$. Пользуясь произвольной степенью близости $\{y_k\}$ и $\{x_k\}$ для достаточно больших номеров элементов последовательностей, заключаем, что y есть нижний предел $\{y_k\}$. Следовательно, множество Y полно снизу, а значит, является нижним пополнением X. $\square$

Необходимость рассмотрения не обычного, а нижнего пополнения связана со следующими обстоятельствами. Прежде всего, нижняя грань функционала может оказаться не обычным, а лишь нижним пределом последовательности его значений на некоторой последовательности допустимых управлений. Тогда последовательность управлений, обладающая минимизирующей подпоследовательностью, определяет числовую последовательность функционалов, не являющуюся фундаментальной в обычном смысле. Мы же хотим, по возможности, не потерять никакие последовательности допустимых управлений, позволяющие отыскать нижнюю грань функционала. Кроме того, последовательности управлений, для которых значения функционалов строго возрастают, заведомо не будут минимизирующими. Таким образом, нет никакого смысла пополнять множество допустимых управлений пределами таких последовательностей.

Пусть теперь имеется задача минимизации некоторого функционала I на множестве U. В случае его ограниченности снизу на этом множестве существует нижняя грань $\inf I(U)$, которая, вообще говоря, не достигается. Построим теперь расширение множества U, наделяя его соответствующей инициальной структурой с помощью функционала I и процедуры нижнего пополнения. Последовательность $\{u_k\}$ назовем фундаментальной снизу на U, если таковой является последовательность $\{I(u_k)\}$ на $I(U)$. Две фундаментальные снизу последовательности на U назовем эквивалентными, если таковыми оказываются соответствующие последовательности функционалов, т. е. совпадают значения их нижних пределов. Обозначим через V фактор-множество множества U по указанному отношению, являющееся прообразом нижнего пополнения множества $I(U)$ при действии функционала I. Любой элемент u множества V является классом эквивалентности фундаментальных снизу последовательностей $\{u_k\}$ на U. При этом все такие последовательности $\{I(u_k)\}$ оказываются фундаментальными снизу на $I(U)$, а значит, имеют одно и то же значение нижнего предела. Эту величину, определяемую исключительно выбранным элементом u из V, обозначим через $J(u)$. Тем самым задается функционал J на множестве V.

Определение 2. Элементы множества V назовем *секвенциальными управлениями*, задачу минимизации функционала J на множестве V — *секвенциальным расширением* исходной экстремальное задачи, а решение этой задачи — *секвенциально оптимальным управлением.*

Теорема 3. *Последовательность допустимых управлений обладает минимизирующей подпоследовательностью тогда и только тогда, когда соответствующее ей секвенциальное управление секвенциально оптимально, причем справедливо равенство*

$$\min J(V) = \inf I(U).$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{v_k\}$ из множества U имеет минимизирующую подпоследовательность. Тогда она фундаментальна снизу и определяет некоторое секвенциальное управление v, являющееся классом эквивалентности, задаваемым последовательностью $\{v_k\}$. Справедливо равенство

$$J(v) = \underline{\lim}\, I(v_k) = \inf I(U).$$

Если v не является секвенциально оптимальным управлением, то существует такой элемент $w \in V$, что имеет место неравенство $J(w) < J(v)$. Тогда для любой последовательности $\{w_k\}$ класса w выполняется соотношение

$$\underline{\lim}\, I(w_k) = J(w) < J(v) = \inf I(U).$$

Итак, нашлась последовательность элементов множества U, на которой значение функционала I в пределе (нижнем) меньше его нижней грани на этом множестве. Это противоречие доказывает, что v является секвенциально оптимальным управлением.

Пусть теперь v есть секвенциально оптимальное управление, а $\{v_k\}$ — произвольная последовательность управлений этого класса. Если она не обладает минимизирующей подпоследовательностью для функционала I на множестве U, то на этом множестве найдется такая фундаментальная снизу последовательность $\{w_k\}$, что имеет место неравенство

$$\underline{\lim}\, I(w_k) < \underline{\lim}\, I(v_k).$$

Обозначим через w секвенциальное управление, определяемое последовательностью $\{w_k\}$. Получаем неравенство $J(w) < J(v)$, т.е. v не будет секвенциально оптимальным управлением. Следовательно, любая последовательность класса v обладает подпоследовательностью, минимизирующей функционал I на множестве U. $\square$

В условиях ограниченности снизу минимизируемого функционала на множестве допустимых управлений существует нижняя грань $\inf I(U)$, равная минимуму функционала J на множестве V. Расширенная задача, будучи разрешимой, может быть исследована стандартными методами оптимизации. Если же будет найдено секвенциально оптимальное управление, то согласно теореме 3 любая определяющая его последовательность допустимых управлений обладает подпоследовательностью, минимизирующей функционал I на множестве U. Тем самым в процессе анализа расширенной экстремальной задачи может быть найдено управление, на котором значение функционала I сколь угодно близко к его нижней грани на множестве U. Таким образом, решая расширенную задачу, определяемую с помощью нижнего пополнения, можно найти приближенное решение исходной экстремальной задачи даже в условиях отсутствия для нее оптимального управления. Воспользуемся описанной методикой для исследования рассматриваемой задачи управления в коэффициентах.

3. Необходимые условия секвенциальной оптимальности

В силу неотрицательности минимизируемого функционала на множестве допустимых управлений существует его нижняя грань на этом множестве, равная в силу теоремы 3 минимуму функционала J на множестве V. Пусть элемент u является секвенциально оптимальным управлением, а $\{u_k\}$ — произвольная последовательность допустимых управлений, представляющая u.

Теорема 4. *Последовательность $\{u_k\}$ удовлетворяет соотношению*

$$\overline{\lim} \int_Q \left[\left(\sum_{i=1}^{n} (w_k - u_k) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \right) + 2\varepsilon u_k (w_k - u_k) \right] dQ \geq 0 \quad \forall \{w_k\} \subset U, \tag{3.1}$$

где $y_k = y(u_k)$, а p_k — решение задачи (1.4), (1.5) при $u = u_k$.

Доказательство. В силу секвенциальной оптимальности u справедливо соотношение

$$J(v) \geq J(u) \quad \forall v \in V.$$

Пользуясь определением функционала J, получаем условие

$$\underline{\lim}\, I(v_k) \geq \underline{\lim}\, I(u_k) \quad \forall \{v_k\} \subset U.$$

Для любой последовательности $\{w_k\}$ допустимых управлений и числа $\theta \in (0,1)$ последовательность $\{v_k\}$, характеризуемая равенством $v_k = u_k + \theta(w_k - u_k)$, будет допустимой. Тогда последнее неравенство записывается в виде

$$\underline{\lim}\, I[u_k + \theta(w_k - u_k)] \geq \underline{\lim}\, I(u_k) \quad \forall \{w_k\} \subset U, \quad \theta \in (0,1). \tag{3.2}$$

Справедливо соотношение

$$I(v_k) = I(u_k) + \int_Q 2[(y_k - z)h_{k\theta} + \varepsilon\theta u_k (w_k - u_k)]dQ + \int_Q [h_{k\theta}^2 + \theta^2 (w_k - u_k)^2]dQ, \tag{3.3}$$

где $h_{k\theta} = y(u_k + \theta(w_k - u_k)) - y_k$. Учитывая определение функции p_k, получим равенство

$$\int_Q 2(z - y_k)h_{k\theta} dQ - \theta \int_Q \left[\sum_{i=1}^{n} (w_k - u_k) \frac{\partial y(v_k)}{\partial x_i} \frac{\partial p_k}{\partial x_i} \right] dQ = 0,$$

аналогичное (1.6). В результате соотношение (3.3) примет вид

$$I(v_k) = I(u_k) + \theta \int_Q [\varepsilon u_k(w_k - u_k)]dQ + \theta \int_Q \sum_{i=1}^n (w_k - u_k)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}dQ + \\ + \int_Q [h_{k\theta}^2 + \theta^2 (w_k - u_k)^2]dQ + \theta \int_Q \sum_{i=1}^n (w_k - u_k)\frac{\partial h_{k\theta}}{\partial x_i}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}dQ.$$

Подставляя полученное выражение в условие (3.2), имеем

$$\underline{\lim}\,(I_k + \theta A_k + \theta^2 B_{k\theta}) - \underline{\lim}\, I_k \geq 0 \quad \forall \{w_k\} \subset U, \quad \theta \in (0,1), \tag{3.4}$$

где

$$I_k = I(u_k), \quad A_k = \int_Q [\varepsilon u_k(w_k - u_k)]dQ + \int_Q \sum_{i=1}^n (w_k - u_k)\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}dQ,$$

$$B_{k\theta} = \int_Q (w_k - u_k)^2 dQ + \theta^{-1}\int_Q \sum_{i=1}^n (w_k - u_k)\frac{\partial h_{k\theta}}{\partial x_i}\frac{\partial p_k}{\partial x_i}dQ + \theta^{-2}\int_Q h_{k\theta}^2 dQ.$$

Учитывая свойства нижних и верхних пределов (см. [12], с. 24), преобразуем условие (3.4)

$$\overline{\lim}\,(-I_k - \theta A_k - \theta^2 B_{k\theta}) \leq \overline{\lim}\,(-I_k) = \overline{\lim}\,(-I_k + \theta A_k - \theta^2 B_{k\theta} + \theta A_k + \theta^2 B_{k\theta}) \leq \\ \leq \overline{\lim}\,(-I_k + \theta A_k - \theta^2 B_{k\theta}) + \theta\,\overline{\lim}\,A_k + \theta^2\,\overline{\lim}\,B_{k\theta}.$$

В результате приходим к неравенству

$$\overline{\lim}\,A_k + \theta\,\overline{\lim}\,B_{k\theta} \geq 0 \quad \forall \{w_k\} \subset U, \quad \theta \in (0,1). \tag{3.5}$$

Оценим величину

$$|B_{k\theta}| \leq 4\beta + \theta^{-1}2\beta\|h_{k\theta}\|\,\|p_k\| + \theta^{-2}c^2\|h_{k\theta}\|^2, \tag{3.6}$$

где c — константа вложения пространства $L_2(0,T;H_0^1(\Omega))$ в $L_2(Q)$. Для функций $h_{k\theta}$ по аналогии с (1.8) устанавливается оценка

$$\theta^{-1}\|h_{k\theta}\| \leq 2\beta\alpha^{-1}\|y_k\|.$$

В силу принадлежности элементов последовательности $\{u_k\}$ ограниченному множеству U соответствующая ей последовательность $\{y_k\}$ решений задачи (1.1), (1.2) ограничена в пространстве Y. Последовательность $\{p_k\}$ также ограничена в Y, поскольку соответствующее уравнение отличается от (1.1) после замены переменной t на $T-t$ лишь свободным членом, но для последнего имеется необходимая оценка. В результате из условия (3.6) следует равномерная по k и θ оценка для числовой последовательности $\{B_{k\theta}\}$. Переходя к пределу в соотношении (3.5) при $\theta \to 0$, получаем неравенство

$$\overline{\lim}\,A_k \geq 0 \quad \forall \{w_k\} \subset U,$$

откуда получаем условие (3.1). $\square$

Теорема 4 характеризует свойства минимизирующих последовательностей для исходной задачи оптимального управления. При этом соотношение (3.1) является секвенциальным аналогом вариационного неравенства (1.3). Однако в то время как в теореме 1 необходимое условие оптимальности получено в предположении (вообще говоря, необоснованном) существования решения исходной оптимизационной задачи, последнее утверждение это допущение не использует.

Хотя практическое решение необходимых условий секвенциальной оптимальности представляется чрезвычайно сложной проблемой, иногда они действительно позволяют найти минимизирующие последовательности даже для неразрешимых задач.

4. Неразрешимая оптимизационная задача

Рассмотрим более простую систему, описываемую уравнением теплопроводности

$$y_t = y_{xx} + v, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1, \tag{4.1}$$

с краевыми условиями

$$y_x(0,t) = 0, \quad y_x(1,t) = 0, \quad 0 < t < 1; \quad y(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1. \tag{4.2}$$

Для любого v из пространства $L_2(Q)$, где $Q = (0,1) \times (0,1)$, задача (4.1), (4.2) имеет единственное решение $y = y(v)$ из класса $Y = H^1(0,1;L_2(0,1)) \cap L_\infty(0,1;H^1(0,1))$. Задача оптимального управления состоит в отыскании такого управления v из множества U функций из $L_2(Q)$, не превосходящих по модулю единицы, которая минимизирует функционал

$$I = \|y\|^2 - \|v\|^2,$$

где нормы понимаются в смысле пространства $L_2(Q)$. Поставленная задача является распределенным аналогом неразрешимой задачи оптимального управления, рассмотренной в [4] (см. также [13]). Справедлива

Теорема 5. *Поставленная оптимизационная задача не разрешима.*

Доказательство. Очевидно, значение функционала на любом допустимом управлении не меньше, чем -1. Рассмотрим последовательность управлений $\{u_k\}$, которая определяется следующим образом. Функция u_1 полагается всюду равной 1. Управление u_2 равно 1 при $0 < t < 1/2$ и -1 при $1/2 < t < 1$. Для произвольного номера k интервал времени $(0,1)$ разбивается на k равных частей, причем на каждом нечетном интервале управление u_k считается равным 1, а на каждом четном интервале -1. При этом $\|u_k\| = 1$ для любого k. Решение $y_k = y(u_k)$ (4.1), (4.2) единственно, кусочно-линейно и для любых значений x равно t при $0 < t < 1/k$, $2/k - t$ при $1/k < t < 2/k$, $t - 2/k$ при $2/k < t < 3/k$ и т.д. Соответствующая норма характеризуется равенством $\|y_k\|^2 = 1/3k^2$. Отсюда следует, что $I(u_k) \to -1$ при $k \to \infty$, т.е. последовательность $\{u_k\}$ является минимизирующей. Предположим, что для некоторого допустимого управления u справедливо равенство $I(u) = -1$. Это возможно исключительно при одновременном выполнении соотношений $\|u\| = 1$ и $\|y(u)\| = 0$. Второе из них означает, что $y = 0$, откуда в силу равенства (4.1) следует, что $u = 0$. Тем самым равенства $\|u\| = 1$ и $\|y(u)\| = 0$ не могут выполняться одновременно, а значит, нижняя грань функционала I на множестве U не достигается. $\square$

Хотя оптимизационная задача не имеет решения, минимизирующие последовательности наверняка существуют, вследствие чего имеет смысл задача отыскания такого допустимого управления, значение функционала на котором будет сколь угодно близко к его нижней грани. Для ее решения воспользуемся описанным ранее аппаратом секвенциального расширения. По аналогии с теоремой 4 доказывается

Теорема 6. *Если последовательность $\{u_k\}$ обладает подпоследовательностью, минимизирующей функционал I на множестве U, то она удовлетворяет соотношению*

$$\overline{\lim}\,(p_k - u_k, w_k - u_k) \geq 0 \quad \forall \{w_k\} \subset U, \tag{4.3}$$

где скалярное произведение понимается в смысле пространства $L_2(Q)$, $y_k = y(u_k)$, а p_k является решением краевой задачи

$$p_{kt} + p_{kxx} = -y_k, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1,$$
$$p_{kx}(0,t) = 0, \quad p_{kx}(1,t) = 0, \quad 0 < t < 1; \quad p_k(x,1) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Доказательство. Пользуясь описанной ранее методикой, введем отношение эквивалентности на множестве фундаментальных снизу последовательностей допустимых управлений. Определим соответствующее фактор-множество V секвенциальных управлений. Каждый элемент v этого множества состоит из класса последовательностей допустимых управлений, которым соответствует один и тот же нижний предел соответствующих последовательностей функционалов. Значение последнего обозначим через $J(v)$. Расширенная экстремальная задача состоит в минимизации на множестве V функционала J. Связь между исходной и расширенной задачами характеризуется теоремой 3.

Как и в теореме 4 справедливо соотношение

$$\underline{\lim}\, I[u_k + \theta(w_k - u_k)] \geq \underline{\lim}\, I(u_k) \quad \forall \{w_k\} \subset U, \quad \theta \in (0,1),$$

отличающееся от условия (3.3) только видом входящих в него величин. Учитывая линейность отображения $v \to y(v)$, найдем значение

$$I[u_k + \theta(w_k - u_k)] = \|y_k + \theta h_k\|^2 - \|u_k + \theta(w_k - u_k)\|^2 =$$
$$= I(u_k) + 2\theta(y_k, h_k) - 2\theta(u_k, w_k - u_k) + \theta^2 \|h_k\|^2 - \theta^2 \|w_k - u_k\|^2. \quad (4.4)$$

Здесь разность h_k между решениями задачи (4.1), (4.2) на управлениях w_k и u_k удовлетворяет соотношению

$$-\int_Q h_k (p_t + p_{xx}) dQ = \int_Q p(w_k - u_k) dQ$$

для любой достаточно гладкой функции p, удовлетворяющей тем же краевым условиям, что и p_k. Полагая $p = p_k$, приведем соотношение (4.4) к следующему виду:

$$I[u_k + \theta(w_k - u_k)] = I(u_k) + 2\theta(p_k - u_k, w_k - u_k) + \theta^2 \|h_k\|^2 - \theta^2 \|w_k - u_k\|^2.$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4, после преобразования соотношения (4.4) с учетом свойств нижних и верхних пределов, деления на θ и перехода к пределу при $\theta \to 0$ приходим к соотношению (4.3). $\square$

Найдем последовательности, удовлетворяющие вариационному неравенству (4.3).

Теорема 7. *Любая последовательность* $\{u_k\}$ *допустимых управлений, удовлетворяющая условиям*

$$u_k \to 0 \ \text{ слабо в } \ L_2(Q), \quad \|u_k\| \to 1, \quad (4.5)$$

является решением задачи (4.3).

Доказательство. Введем обозначения $\lambda_k = (p_k, w_k - u_k)$, $\mu_k = (u_k, w_k)$, $\nu_k = \|u_k\|^2$. Тогда условие (4.3) принимает вид

$$\overline{\lim}\, (\lambda_k - \mu_k + \nu_k) \geq 0 \quad \forall \{w_k\} \subset U.$$

Последовательности $\{u_k\}$ и $\{w_k\}$ элементов множества U ограничены. Тогда из них можно выделить такие подпоследовательности (с сохранением прежнего обозначения), что имеет место сходимость $u_k \to u$ и $w_k \to w$ слабо в $L_2(Q)$. Отсюда следует сходимость $y_k \to y$ слабо в Y, $p_k \to p$ слабо в Y, где $y = y(u)$, а p — решение сопряженной задачи, у которой в правой части уравнения находится функция y. Учитывая компактность вложения пространства Y в $L_2(Q)$, установим сходимость $p_k \to p$ сильно в $L_2(Q)$. В результате получаем

$$(p_k, w_k - u_k) \to (p, w - u).$$

Если последовательность $\{u_k\}$ удовлетворяет первому из условий (4.5), то ее слабый предел u равен нулю. Тогда справедливо равенство $y = 0$, а следовательно, $p = 0$. В результате приходим к условию $\lambda_k \to 0$. Пользуясь определением множества допустимых управлений, установим оценку $|\mu_k| \leq \|u_k\| \, \|w_k\| \leq 1$. Из второго условия (4.5) следует, что $\nu_k \to 1$.

Переходя к пределу в неравенстве $\lambda_k - \mu_k + \nu_k \geq \lambda_k + \nu_k - 1$, приходим к соотношению $\lim(p_k - u_k, w_k - u_k) \geq 0$, откуда следует неравенство (4.3). $\square$

Итак, необходимому условию секвенциальной оптимальности удовлетворяет любая последовательность $\{u_k\}$, которая подчиняется соотношениям (4.5). Этим свойствам удовлетворяет, в частности, последовательность, описанная при доказательстве теоремы 5. Условиям (4.5) будет удовлетворять и любой базис гильбертова пространства $L_2(Q)$, подчиняющийся соотношениям $\|u_k\| = 1$ и $u_k \to 0$ слабо в $L_2(Q)$ при условии, что его элементы не превосходят по модулю единицы. Таким образом, имеется практически определяемый класс решений необходимых условий секвенциальной оптимальности. Естественно, могут существовать и другие последовательности допустимых управлений, удовлетворяющие условиям (4.5).

Отметим также, что установленные условия секвенциальной оптимальности являются лишь необходимыми, но, вообще говоря, не достаточными. Вследствие этого пока еще нельзя быть уверенным в том, что секвенциальное управление u, определяемое последовательностью $\{u_k\}$, удовлетворяющей соотношениям (4.5), действительно является точкой минимума функционала J на множестве V. Однако справедлива

Теорема 8. *Секвенциальное управление, определяемое последовательностью $\{u_k\}$, удовлетворяющей условиям (4.5), минимизирует функционал J на множестве V.*

Действительно, найдем значение функционала

$$J(u) = \underline{\lim}\, I(u_k) = \lim(\|y_k\|^2 - \|u_k\|^2) = -1,$$

поскольку последовательность норм управлений сходится к единице в силу второго условия (4.5), а соответствующая последовательность $\{y_k\}$ сходится к нулю сильно в $L_2(Q)$ (см. доказательство теоремы 7). Однако в теореме 5 было показано, что значение -1 является нижней гранью функционала I на множестве U, которая согласно теореме 3 будет минимумом функционала J на множестве V.

Итак, описанный принцип расширения экстремальных задач в ряде случаев позволяет не только получить необходимое условие оптимальности для расширенной задачи, но и найти класс допустимых управлений, минимизирующих данный функционал на заданном множестве. Тем самым, указанным способом может быть найдено такое допустимое управление, значение функционала на котором сколь угодно близко к его нижней грани на данном множестве: достаточно взять элемент минимизирующей последовательности с достаточно большим номером. Так определяется приближенное решение задачи даже в условиях ее неразрешимости в естественном смысле.

Литература

1. Murat F. *Théoremes de non-existénce pour des problémes de contrôle dans les coefficients* // C. R. Acad. Sci. – Paris, 1972. – № 5. – P. A395–A398.
2. Янг Л. *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.* – М.: Мир, 1974. – 488 с.
3. MacShane E. *Generalized curves* // Duke Math. J. – 1940. – № 6. – P. 513–536.
4. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Мир, 1977. – 400 с.
5. Филиппов А.Ф. *О некоторых вопросах теории оптимального регулирования* // Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., астр., физ., хим. – 1959. – № 2. – С. 25–32.
6. Гамкрелидзе Р.В. *О скользящих оптимальных режимах* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 143. – С. 1243–1245.
7. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 399 с.
8. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. *Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход.* – М.: Мир, 1976. – 311 с.

9. Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры.* – М.: Наука, 1968. – 272 с.
10. Серовайский С.Я. *Секвенциальное расширение экстремальных задач* / В сб. “Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы “Казахстан в третьем тысячелетии”. – Алматы, 2000.
11. Бурбаки Н. *Теория множеств.* – М.: Мир, 1965. – 456 с.
12. Рид М., Саймон Б. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1977. – 360 с.
13. Серовайский С.Я. *Контрпримеры в теории оптимального управления.* – Алматы, Казак университетi, 2001. – 190 с.

Казахский государственный
национальный университет

Поступила
31.05.2001