ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 7 (506)

УДК 517.968:519.642

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Многочисленные теоретические и прикладные задачи приводят к необходимости решения различных классов сингулярных интегральных уравнений и краевых задач теории функций (см., напр., [1]–[4] и библиографию там же). Такие уравнения, как правило, точно не решаются. Поэтому как для теории, так и в особенности для приложений первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов их решения с соответствующим теоретическим обоснованием. В этой области в последние десятилетия достигнут существенный прогресс благодаря работам как отечественных математиков и механиков, так и зарубежных авторов. Некоторые итоги полученных результатов подведены в специальных обзорных работах и монографиях (см., напр., [5]–[9] и [4], [10]–[16] и библиографию там же).

Однако, несмотря на сказанное, в рассматриваемой области остается много нерешенных задач. Ниже, в продолжение ряда результатов ([17], [18], [16], гл. 4), предлагается *общий* проекционный метод решения сингулярных интегральных уравнений и дается его теоретическое обоснование на основе теории положительно определенных операторов в гильбертовых пространствах, общей теории приближенных методов функционального анализа и конструктивной теории функций.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение (СИУ)

$$Ax \equiv a(s)x(s) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}x(\sigma)d\sigma = y(s), \quad -\infty < s < \infty, \tag{1.1}$$

где $a(s) \in C_{2\pi}$, $h(s,\sigma) \in C_{2\pi} \otimes C_{2\pi}$, $y(s) \in L_2(0,2\pi)$ — известные вещественные[1] функции, $x(t) \in L_2(0,2\pi)$ — искомая функция, причем сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу [4].

Искомую функцию $x(t)$ будем искать в вещественном пространстве 2π-периодических квадратично-суммируемых функций $L_2(0,2\pi) \equiv L_2$ со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(\varphi,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s)\psi(s)ds \quad (\varphi,\psi \in L_2),$$

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_2 = \|\varphi\|_{L_2} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(s)|^2 ds\right\}^{1/2}, \quad \varphi \in L_2.$$

Поскольку L_2 — сепарабельное гильбертово пространство, то в нем существует предельно плотная последовательность $\{X_n\}_1^\infty$ конечномерных подпространств $X_n \subset L_2$, $\dim X_n = n \in \mathbb{N}$.

[1]Это условие может быть ослаблено (см. п. 3)

Приближенное решение СИУ (1.1) будем искать в виде функции

$$x_n(s)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(s)\in X_n,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{1.2}$$

где $\{\varphi_k(s)=\varphi_{k,n}(s)\}_1^n$ — ортонормальный[1] базис подпространства $X_n\subset L_2$. Неизвестные коэффициенты $\alpha_k=\alpha_{k,n}\in\mathbb{R}$ будем определять из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^{n}a_{rk}\alpha_k=y_r,\quad r=\overline{1,n},\quad a_{rk}=(A\varphi_k,\varphi_r),\quad y_r=(y,\varphi_r). \tag{1.3}$$

Положим

$$E_n(f)=\inf_{\beta_r\in\mathbb{R}}\left\|f-\sum_{r=1}^{n}\beta_r\varphi_r\right\|,\quad f\in L_2;$$

$$h^+(s,\sigma)=\frac{h(s,\sigma)+h(\sigma,s)}{2},\quad h^-(s,\sigma)=\frac{h(s,\sigma)-h(\sigma,s)}{2};$$

$$S(hx;s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s,\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}x(\sigma)d\sigma,\quad x\in L_2,$$

$$S(h^\pm x;s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{h(s,\sigma)\pm h(\sigma,s)}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}x(\sigma)d\sigma,\quad x\in L_2.$$

Для вычислительной схемы (1.1)–(1.3) справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

α) *функция $a(s)\in C_{2\pi}$ такова, что $\min\limits_s|a(s)|\geqslant\gamma^2=\mathrm{const}>0$;*

β) *функция $h(s,\sigma)\in C_{2\pi}\otimes C_{2\pi}$ такова, что оператор $Sh^+:L_2\to L_2$ непрерывен, а оператор $Sh^-:L_2\to L_2$ вполне непрерывен;*

γ) *уравнение (1.1) имеет единственное решение $x^*\in L_2$ при любой правой части $y\in L_2$.*

Тогда при всех $n\geqslant n_0$ (номер $n_0\in\mathbb{N}$ определяется структурными свойствами функций $a(s)$ и $h(s,\sigma)$) СЛАУ (1.3) имеет единственное решение $\alpha_1^*,\alpha_2^*,\ldots,\alpha_n^*$. Приближенные решения

$$x_n^*(s)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^*\varphi_k(s) \tag{1.2*}$$

сходятся к точному решению $x^*(s)\in L_2$ в среднем со скоростью

$$\|x^*-x_n^*\|\asymp E_n(x^*),\quad n\to\infty, \tag{1.4}$$

где $\asymp$ есть знак слабой эквивалентности.

Следствие 1. Пусть $a(s)\equiv1$, а функция $h(s,\sigma)\in\operatorname{Lip}\alpha$ $(0<\alpha\leqslant1)$ по каждой из переменных. Тогда в условиях теоремы метод $(1.1)-(1.3),(1.2^*)$ сходится в среднем со скоростью

$$\|x^*-x_n^*\|\sim E_n(x^*),\quad n\to\infty, \tag{1.4'}$$

где $\sim$ есть знак сильной эквивалентности.

В ряде случаев приведенная выше теорема существенно упрощается и усиливается. В частности, справедливы следующие утверждения.

[1]Это условие может быть ослаблено (см. п. 3)

Теорема 2. *Пусть функции* $a(s) \in C_{2\pi}$ *и* $h(s,\sigma) \in C_{2\pi} \otimes C_{2\pi}$ *таковы, что*

$$\min_s |a(s)| \geqslant m_0 > 0; \tag{1.5}$$

$$\|Sh\| \leqslant M_0 < \infty, \quad Sh : L_2 \to L_2; \tag{1.6}$$

$$m \equiv m_0 + \delta > 0, \quad M \equiv M_0 + \max_s |a(s)| < \infty, \tag{1.7}$$

где число $\delta \in \mathbb{R}$ *определяется из неравенства*

$$(Sh^- x, x) \operatorname{sgn} a(s) \geqslant \delta \|x\|^2, \quad x \in L_2, \tag{1.8}$$

и не зависит от элементов $x \in L_2$.

Тогда справедливы утверждения

α) *уравнение* (1.1) *имеет единственное решение* $x^* \in L_2$ *при любой правой части* $y \in L_2$, *причем*

$$\|x^*\| \leqslant m^{-1}\|y\|; \tag{1.9}$$

β) *СЛАУ* (1.3) *имеет единственное решение* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *и при любых правых частях;*

γ) *приближенные решения* (1.2^*) *сходятся при* $n \to \infty$ *к точному решению* $x^*(s)$ *в среднем со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_n(x^*) \leqslant \|x^* - x_n^*\| \leqslant \frac{M}{m} E_n(x^*), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 единственное решение* $\alpha^* \equiv (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*) \in \mathbb{R}^n$ *СЛАУ* (1.3) *при любых* $n \in \mathbb{N}$ *можно найти в эвклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$ *итерационным методом*

$$\alpha_j^k = \alpha_j^{k-1} + \frac{m}{M^2}\left(y_j - \sum_{r=1}^{n} a_{jr}\alpha_r^{k-1}\right); \quad j = \overline{1,n}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.11}$$

при любом начальном приближении $\alpha^0 \equiv (\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0) \in \mathbb{R}^n$. *При этом погрешность приближенной формулы*

$$\alpha^k \equiv (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \ldots, \alpha_n^k) \approx (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*) \equiv \alpha^*, \quad k \in \mathbb{N},$$

может быть оценена неравенствами

$$\|\alpha^* - \alpha^k\|_{\mathbb{R}^n} = \left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^* - \alpha_j^k|\right\}^{1/2} \leqslant q^k \|\alpha^* - \alpha^0\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{q^k}{1-q}\|\alpha^1 - \alpha^0\|_{\mathbb{R}^n},$$

где $k = 1, 2, \ldots$; *если же начальное приближение выбирается по формуле*

$$\alpha^0 = \frac{m}{M^2}\overline{y}, \quad \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

то может быть оценена и неравенством

$$\|\alpha^* - \alpha^k\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \frac{q^{k+1}}{1-q}\frac{m}{M^2}\|\overline{y}\|_{\mathbb{R}^n}; \quad k \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где

$$q = \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)^{1/2} < 1. \tag{1.12}$$

Введем проекционно-итеративную последовательность элементов

$$x_n^k(s) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k \varphi_j(s); \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.13}$$

где числа α_j^k определяются согласно (1.11).

Теорема 4. *В условиях теоремы* 2 *единственное решение* $x^* \in L_2$ *СИУ* (1.1) *можно найти как предел в* L_2 *последовательности функций* (1.13), *точнее,*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} x_n^k(s) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_n^k(s) = x^*(s),$$

причем погрешность приближенной формулы

$$x^*(s) \approx x_n^k(s), \quad x_n^0(s) = \frac{m}{M^2} \sum_{r=1}^{n} (y, \varphi_r) \varphi_r(s); \quad k \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N},$$

может быть оценена неравенством

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x^*(s) - x_n^k(s)|^2 ds \right\}^{1/2} \leqslant \frac{M}{m} E_n(x^*) + \frac{q^{k+1}}{1-q} \frac{m}{M^2} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} |(y, \varphi_r)|^2 \right\}^{1/2}; \quad k \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где постоянные M, m *и* q *определены соответственно в* (1.7) *и* (1.12).

Теоремы 3 и 4 справедливы также при $n \to \infty$; в частности, из них следует

Теорема 5. *В условиях теоремы* 2 *единственное решение* $x^*(s) \in L_2$ *СИУ* (1.1) *можно найти итерационным методом*

$$x^k(s) = x^{k-1}(s) + \frac{m}{M^2} \{ y(s) - A(x^{k-1}; s) \}, \quad k \in \mathbb{N},$$

при любом начальном приближении $x^0(s) \in L_2$. *При этом погрешность приближенной формулы* $x^*(s) \approx x^k(s)$, $k \in \mathbb{N}$, *может быть оценена неравенствами*

$$\|x^* - x^k\| \leqslant q^k \|x^* - x^0\| \leqslant \frac{q^k}{1-q} \|x^1 - x^0\|, \quad k \in \mathbb{N};$$

если же начальное приближение выбирается по формуле $x^0(s) = \frac{m}{M^2} y(s)$, *где* $y(s) \in L_2$ *есть правая часть СИУ* (1.1), *то может быть оценена и неравенством*

$$\|x^* - x^k\| \leqslant \frac{q^{k+1}}{1-q} \frac{m}{M^2} \|y\|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

2. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Запишем СИУ (1.1) в виде эквивалентного ему операторного уравнения

$$Ax \equiv Gx + Tx = y \quad (x, y \in L_2), \tag{2.1}$$

где $Gx = ax + Sh^+ x$, $Tx = Sh^- x$. В силу условий α) и β) теоремы, операторы G, T и $A : L_2 \to L_2$ ограничены:

$$\begin{aligned} \|G\| &\leqslant \|a\|_{C_{2\pi}} + \|Sh^+\|_{L_2 \to L_2} \equiv \|a\|_{C_{2\pi}} + M_1 \equiv M_2 < \infty, \\ \|T\| &= \|Sh^-\|_{L_2 \to L_2} \equiv M_3 < \infty, \quad \|A\| \leqslant M_2 + M_3 < \infty, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где M_i — вполне определенные положительные постоянные, а $C_{2\pi}$ — пространство всех непрерывных 2π-периодических функций с обычной нормой.

В силу условия α) в дальнейшем без ограничения общности будем считать, что $a(s) > 0$ (случай $a(s) < 0$ рассматривается аналогично). Поскольку $h^+(s,\sigma) = h^+(\sigma, s)$, то по аналогии с доказательством теоремы 1 [18] для любой функции $x \in L_2$ находим

$$(Gx, x) = (ax, x) + (Sh^+x, x) = (ax, x) \geqslant \gamma^2 \|x\|^2. \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что

$$\|Gx\| \geqslant \gamma^2 \|x\|, \quad x \in L_2. \tag{2.4}$$

Поскольку сопряженное пространство $L_2^* = L_2$, то для сопряженного оператора $G^* : L_2 \to L_2$, где $G^*x \equiv ax - Sh^+x$, $x \in L_2$, аналогично находим

$$\|G^*x\| \geqslant \gamma^2 \|x\|, \quad x \in L_2. \tag{2.5}$$

Из неравенств (2.4) и (2.5) следует (см. [19], гл. V), что операторы G и $G^* : L_2 \to L_2$ имеют левые ограниченные операторы G_l^{-1} и $(G^*)_l^{-1} \equiv G_l^{*^{-1}}$, причем

$$\|G_l^{-1}\| \leqslant \gamma^{-2} < \infty, \quad \|G_l^{*^{-1}}\| \leqslant \gamma^{-2} < \infty. \tag{2.6}$$

Из соотношений (2.2) – (2.6) следует ([19], гл. V и XII), что сингулярный оператор $G = aE + Sh^+ : L_2 \to L_2$ имеет двусторонний обратный и

$$\|G^{-1}\| \leqslant \gamma^{-2} < \infty. \tag{2.7}$$

Поэтому уравнение (2.1), а следовательно, и СИУ (1.1), эквивалентны уравнению II-го рода

$$Kx \equiv x + G^{-1}Tx = G^{-1}y \quad (x, G^{-1}y \in L_2), \tag{2.8}$$

где в силу (2.7) и условия β) теоремы

$$G^{-1}T = (aE + Sh^+)^{-1}Sh^- : L_2 \to L_2 \tag{2.9}$$

есть вполне непрерывный оператор. В силу условия γ) и (2.9) операторы A и $K : L_2 \to L_2$ непрерывно обратимы одновременно, причем

$$K = G^{-1}A, \quad K^{-1} = A^{-1}G, \quad A^{-1} = K^{-1}G^{-1}. \tag{2.10}$$

Обозначим через $P_n : L_2 \to X_n \subset L_2$ линейный оператор ортогонального проектирования, определяемый по формуле

$$P_n(f; s) = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k(s), \quad f \in L_2. \tag{2.11}$$

Тогда

$$P_n^2 = P_n, \quad P_n^* = P_n, \quad \|P_n\| = 1, \quad \|E - P_n\| = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.12}$$

где P_n^* — соответствующий сопряженный оператор.

Легко показать, что СЛАУ (1.3) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv P_n A x_n = G_n x_n + P_n T x_n \equiv P_n y \quad (x_n, P_n y \in X_n), \tag{2.13}$$

где $G_n x_n = P_n G x_n$. В силу (2.11)–(2.13) и (2.3) для любого $x_n \in X_n$ имеем

$$(G_n x_n, x_n) = (P_n G x_n, x_n) = (G x_n, P_n^* x_n) = (G x_n, P_n x_n) = (G x_n, x_n) \geqslant \gamma^2 \|x_n\|^2. \tag{2.14}$$

Отсюда следует неравенство

$$\|G_n x_n\| \geqslant \gamma^2 \|x_n\|, \quad x_n \in X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.15}$$

Поэтому (см., напр., [12], гл. I, § 2) операторы $G_n = P_nG : X_n \to X_n$ линейно обратимы при любых $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|G_n^{-1}\| \leqslant \gamma^{-2} < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Из (2.13), (2.15) и (2.16) следует, что СЛАУ (1.3) эквивалентна операторному уравнению II-го рода

$$K_nx_n \equiv x_n + G_n^{-1}P_nTx_n = G_n^{-1}P_ny \quad (x_n, G_n^{-1}P_ny \in X_n). \tag{2.17}$$

Покажем близость уравнений (2.8) и (2.17) в смысле теоремы 7 ([12], гл. I). Применяя к вспомогательным уравнениям

$$Gx = y \ \ (x, y \in L_2), \quad G_nx_n \equiv P_nGx_n = P_ny \ \ (x_n, P_ny \in X_n) \tag{2.18}$$

теорему 6 ([12], гл. I), с помощью (2.12), (2.2) и (2.16) для любой функции $y \in L_2$ находим

$$\begin{aligned}\delta_n \equiv \|G^{-1}y - G_n^{-1}P_ny\| = \|(E - G_n^{-1}P_nG)(G^{-1}y - P_nG^{-1}y)\| \leqslant \\ \leqslant \|E - G_n^{-1}P_nG\|_{L_2\to L_2}E_n(G^{-1}y) \leqslant (1 + \gamma^{-2}\|aE + Sh^+\|_{L_2\to L_2})E_n(G^{-1}y) \leqslant \\ \leqslant (1 + \gamma^{-2}M_2)E_n(G^{-1}y),\ y \in L_2, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Поэтому для любой $y \in L_2$ имеем

$$\delta_n \equiv \|G^{-1}y - G_n^{-1}P_ny\| = O\{E_n(G^{-1}y)\} \to 0, \ \ n \to \infty. \tag{2.20}$$

Из (2.8), (2.17)–(2.19) для любого $x_n \in X_n$, $x_n \neq 0$, находим

$$\begin{aligned}\|Kx_n - K_nx_n\| = \|G^{-1}Tx_n - G_n^{-1}P_nTx_n\| = \|x_n\|\|G^{-1}T\theta_n - G_n^{-1}P_nT\theta_n\| \leqslant \\ \leqslant \|x_n\| \sup_{\substack{\theta_n\in X_n\\ \|\theta_n\|=1}} \|G^{-1}T\theta_n - G_n^{-1}P_nT\theta_n\| \leqslant \|x_n\| \sup_{\substack{\theta\in L_2\\ \|\theta\|=1}} \|G^{-1}T\theta - G_n^{-1}P_nT\theta\| = \\ = \|x_n\| \sup_{\varphi\in T\text{Ш}(0,1)} \|G^{-1}\varphi - G_n^{-1}P_n\varphi\| \equiv \widetilde{\varepsilon}_n\|x_n\|,\end{aligned} \tag{2.21}$$

где $\theta_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, а $\text{Ш}(0,1)$ — единичный шар пространства L_2 с центром в начале координат. Поскольку $T = Sh^- : L_2 \to L_2$ есть вполне непрерывный оператор, то множество $T\text{Ш}(0,1)$ является компактным в пространстве L_2. Тогда в силу (2.20) и (2.21) из одного результата И.М. Гельфанда (см., напр., [19], с. 274–276) следует

$$\widetilde{\varepsilon}_n \equiv \sup_{\varphi\in T\text{Ш}(0,1)} \|G^{-1}\varphi - G_n^{-1}P_n\varphi\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.22}$$

Из формул (2.21) и (2.22) находим

$$\varepsilon_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n\to L_2} \leqslant \widetilde{\varepsilon}_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.23}$$

В силу соотношений (2.8), (2.17), (2.19), (2.20), (2.23) и (2.10) из теоремы 7 ([12], гл. I) следуют утверждения

а) при всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n = \|K^{-1}\|\varepsilon_n < 1/2, \ \ n \geqslant n_0,$$

операторы $K_n : X_n \to X_n$, а следовательно, и операторы $A_n = G_nK_n : X_n \to X_n$ линейно обратимы, а обратные операторы K_n^{-1} и $A_n^{-1} = K_n^{-1}G_n^{-1}$ ограничены по норме в совокупности:

$$\|K_n^{-1}\| \leqslant 2\|K^{-1}\|,\ \|A_n^{-1}\| \leqslant 2\gamma^{-2}\|K^{-1}\|, \ \ n \geqslant n_0; \tag{2.24}$$

б) приближенные решения

$$x_n^* = K_n^{-1}G_n^{-1}P_ny = A_n^{-1}P_ny \in X_n, \tag{2.25}$$

определяемые по формуле (1.2^*), сходятся при $n \to \infty$ к точному решению $x^* = K^{-1}G^{-1}y = A^{-1}y \in L_2$ в среднем со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\| = O(\varepsilon_n + \delta_n), \quad y \in L_2. \tag{2.26}$$

В силу (2.20), (2.23)–(2.26) к уравнениям (2.1) и (2.13) применима теорема 6 ([12], гл. I), согласно которой

$$\|x^* - x_n^*\| = \|(E - A_n^{-1}P_nA)(x^* - P_nx^*)\| \leqslant (1 + 2\gamma^{-2}\|K^{-1}\|)E_n(x^*) = O\{E_n(x^*)\}. \tag{2.27}$$

Из (2.25) и (2.27) следует оценка (1.4), а из нее и свойств пространств $X_n \subset X$ следует требуемое утверждение.

В силу соответствующих результатов ([12], гл. I, II) для завершения доказательства в условиях следствия достаточно показать непрерывность оператора $Sh^+ : L_2 \to L_2$ и полную непрерывность оператора $Sh^- : L_2 \to L_2$.

Поскольку $h(s,\sigma) \in \mathrm{Lip}_R\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ R = \mathrm{const} > 0)$ по каждой из переменных, то в силу известных результатов ([2], гл. I, ч. I) функция

$$g^-(s,\sigma) \equiv h^-(s,\sigma)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2} = \frac{h(s,\sigma) - h(\sigma,s)}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2} \tag{2.28}$$

удовлетворяет условиям

$$g^-(s,\sigma) = \frac{h_*(s,\sigma)}{|\sigma - s|^{1-\alpha}}; \quad h_*(s,\sigma) \in C_{2\pi} \otimes C_{2\pi}, \quad 0 \leqslant s,\sigma \leqslant 2\pi, \tag{2.29}$$

$$|g^-(s,\sigma)| \leqslant \frac{R_1}{|\sigma - s|^{1-\alpha}}, \quad R_1 = \mathrm{const} > 0, \quad 0 \leqslant s,\sigma \leqslant 2\pi. \tag{2.30}$$

Поэтому при $\alpha \in (1/2, 1]$ оператор $Sh^- : L_2 \to L_2$, где

$$(Sh^-)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h_*(s,\sigma)}{|\sigma - s|^{1-\alpha}}x(\sigma)d\sigma, \quad x \in L_2, \tag{2.31}$$

является вполне непрерывным. В силу (2.28)–(2.31) при $\alpha \in (0, 1/2]$ требуемое утверждение следует из одного результата С.Г. Михлина (см., напр., [20], теорема 7.3.2).

По аналогии с (2.28)–(2.30) можно показать, что для функции $h^+(s,\sigma)$ справедливы представления

$$\begin{aligned} g^+(s,\sigma) &\equiv h^+(s,\sigma)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2} = \frac{h(s,\sigma) + h(\sigma,s)}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2} = \\ &= \frac{h(s,\sigma) - h(s,s)}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2} + \frac{h(\sigma,s) - h(\sigma,\sigma)}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2} + \\ &+ \frac{h(s,s) + h(\sigma,\sigma)}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2} = \frac{h_1(s,\sigma)}{|\sigma - s|^{1-\alpha}} - \frac{h_1(\sigma,s)}{|s - \sigma|^{1-\alpha}} + \\ &+ \frac{h(s,s) + h(\sigma,\sigma)}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2} = \frac{h_1(s,\sigma) - h_1(\sigma,s)}{|\sigma - s|^{1-\alpha}} + \frac{h(s,s) + h(\sigma,\sigma)}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

где $h_1(t,\tau) \in C_{2\pi} \otimes C_{2\pi}$, $0 \leqslant s,\sigma \leqslant 2\pi$. В силу сказанного выше оператор $H_1 : L_2 \to L_2$, где

$$(H_1x)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h_1(s,\sigma) - h_1(\sigma,s)}{|\sigma - s|^{1-\alpha}}x(\sigma)d\sigma, \quad x \in L_2, \tag{2.33}$$

является вполне непрерывным, а следовательно, и ограниченным. Поскольку (см., напр., [4])

$$\|S\| = 1, \quad S : L_2 \to L_2, \tag{2.34}$$

то для любой функции $x \in L_2$ имеем

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(s,s)+h(\sigma,\sigma)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} x(\sigma) d\sigma \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \{ \| h(s,s) S(x(\sigma);s) \| + \| S(h(\sigma,\sigma)x(\sigma);s) \| \} \leqslant \frac{1}{2} \{ \| h(s,s) \|_{C_{2\pi}} \| Sx \|_{L_2} + \| h(\sigma,\sigma) x(\sigma) \|_{L_2} \} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \{ \| h(s,s) \|_{C_{2\pi}} \| x \|_{L_2} + \| h(\sigma,\sigma) \|_{C_{2\pi}} \| x \|_{L_2} \} = \| h(t,t) \|_{C_{2\pi}} \| x \|_{L_2}. \quad (2.35)$$

В силу соотношений (2.32)–(2.35) оператор $Sh^+ : L_2 \to L_2$ является ограниченным, а следовательно, непрерывным. Тем самым теорема 1 и ее следствие доказаны.

Доказательство теоремы 2. В силу соотношений (1.5), (1.7), (1.8) и (2.1), (2.13) для любых $x \in L_2$ находим [1]

$$(Ax, x) = (ax, x) + (Sh^+ x, x) + (Sh^- x, x) \geqslant m_0 \|x\|^2 + \delta \|x\|^2 = m\|x\|^2, \quad x \in L_2. \quad (2.36)$$

Из (2.36) и (1.6), (1.7) следуют неравенства

$$m\|x\| \leqslant \|Ax\| \leqslant M\|x\|, \quad x \in L_2. \quad (2.37)$$

Аналогично (2.36) и (2.37) для сопряженного оператора $A^* : L_2 \to L_2$, где

$$A^* x = ax - Sh^+ x + Sh^- x, \quad x \in L_2,$$

находим неравенства

$$(A^* x, x) = (x, Ax) = (Ax, x) \geqslant m\|x\|^2, \quad x \in L_2, \quad (2.38)$$
$$m\|x\| \leqslant \|A^* x\| \leqslant M\|x\|, \quad x \in L_2. \quad (2.39)$$

Из (2.37) и (2.39) следует ([19], гл. V, XII), что оператор $A : L_2 \to L_2$ имеет двусторонний обратный и

$$\|A^{-1}\| \leqslant m^{-1}, \quad A^{-1} : L_2 \to L_2. \quad (2.40)$$

Поэтому уравнение (2.1), а следовательно, СИУ (1.1) однозначно разрешимо и решение $x^* = A^{-1} y$ удовлетворяет неравенству (1.9).

В силу (2.12)–(2.14) и (2.36) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$(A_n x_n, x_n) = (P_n A x_n, x_n) = (A x_n, P_n^* x_n) = (A x_n, x_n) \geqslant m\|x_n\|^2, \quad x_n \in X_n. \quad (2.41)$$

Из (2.41) следует неравенство

$$\|A_n x_n\| \geqslant m\|x_n\|, \quad x_n \in X_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.42)$$

обеспечивающее, как уже отмечалось выше в аналогичной ситуации, двустороннюю обратимость операторов $A_n : X_n \to X_n$ и справедливость неравенства

$$\|A_n^{-1}\| \leqslant m^{-1}, \quad A_n^{-1} : X_n \to X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.43)$$

Поэтому уравнение (2.13), а следовательно, и СЛАУ (1.3), однозначно разрешимы при любых $n \in \mathbb{N}$ и любых правых частях.

[1] Ниже везде без ограничения общности считаем $a(s) > 0$ (случай $a(s) < 0$ рассматривается аналогично).

В силу соотношений (2.11), (2.12), (2.36)–(2.43) к уравнениям (2.1) и (2.13) применима теорема 6 ([12], гл. I), согласно которой находим

$$E_n(x^*) \leqslant \|x^* - x_n^*\| = \|A^{-1}y - A_n^{-1}P_ny\| = \|(E - A_n^{-1}P_nA)(x^* - P_nx^*)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|E - A_n^{-1}P_nA\|_{L_2\to L_2}\|x^* - P_nx^*\|_{L_2} \leqslant \|A_n^{-1}P_nA\|_{L_2\to L_2}E_n(x^*) \leqslant$$
$$\leqslant \|A_n^{-1}\|_{X_n\to X_n}\|P_n\|_{L_2\to X_n}\|A\|_{L_2\to L_2}E_n(x^*) \leqslant \frac{M}{m}E_n(x^*), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.44)$$

Из соотношений (2.44) следуют неравенства (1.10).

Доказательство теоремы 3. Систему уравнений (1.3) запишем в матричном виде

$$\overline{A}\overline{x} = \overline{y} \quad (\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n) \quad (2.45)$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$ с указанной выше нормой, где $\overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, а $\overline{A} = [a_{jk}]_1^n$. Поскольку пространства $X_n \subset L_2$ и $\mathbb{R}^n$ изометричны, то в силу (2.36), (2.37), (2.41), (2.42) и (2.12) находим

$$(\overline{A}\overline{x}, \overline{x}) \geqslant m\|x\|^2, \quad \|\overline{A}\overline{x}\| \leqslant M\|\overline{x}\|, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.46)$$

Уравнение (2.45) эквивалентно уравнению

$$\overline{x} = (\overline{E} - \tau\overline{A})\overline{x} + \tau\overline{y}, \quad \tau = \frac{m}{M^2} \quad (\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n), \quad (2.47)$$

где в силу соотношений (2.46) имеем

$$\|E - \tau\overline{A}\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} \leqslant q = \sqrt{1 - m^2/M^2} < 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.48)$$

Решение уравнения (2.47) будем искать методом простой итерации

$$\overline{x}^k = \overline{x}^{k-1} + \frac{m}{M^2}(\overline{y} - \overline{A}\overline{x}^{k-1}), \quad \overline{x}^0 \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.49)$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$, который эквивалентен методу (1.11). В силу (2.45)–(2.49) утверждение теоремы 3 легко выводится из известных результатов (см., напр., [19], гл. V) по итерационным методам решения операторных уравнений в банаховых пространствах.

Доказательство теоремы 4 следует из доказательств теорем 2 и 3.

Доказательство теоремы 5 следует из доказательств теорем 2–4; при этом существенным образом используется тот факт, что операторы $P_n : L_2 \to X_n \subset L_2$ *сильно* сходятся при $n \to \infty$ к единичному оператору E пространства L_2, причем в силу соотношений (2.12) и свойств последовательностей подпространств $\{X_n\}_1^\infty \subset L_2$

$$\|f - P_nf\| = E_n(f) \to 0, \quad n \to \infty, \quad f \in L_2.$$

3. Некоторые замечания и дополнения

В теоремах 2–5 существенным образом использовано неравенство (1.8). Приведем некоторые достаточные условия, обеспечивающие справедливость этого неравенства.

1°. Пусть $h(s,\sigma) = h(\sigma, s)$. Тогда $h^+(s,\sigma) = h(s,\sigma)$, $h^-(s,\sigma) \equiv 0$, $Sh^-x = 0$ $(x \in L_2)$. Поэтому в рассматриваемом случае $\delta = 0$.

2°. Пусть функция $h(s,\sigma) \in C_{2\pi} \otimes C_{2\pi}$ такова, что *симметричная* функция

$$g^-(s,\sigma) = \frac{h(s,\sigma) - h(\sigma,s)}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2} = g^-(\sigma, s)$$

разлагается в сходящийся в пространстве $L_2(0,2\pi)^2$ *симметричный* ряд

$$g^-(s,\sigma)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(s)f_k(\sigma),$$

где $\{f_k(t)\}_1^\infty$ — некоторая система линейно независимых функций из $L_2(0,2\pi)$. Тогда для любой функции $x(s)\in L_2$ имеем

$$(Sh^-x,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s)ds\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^-(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)f_k(t)dt\right\}^{1/2}\geqslant 0.$$

Поэтому в рассматриваемом случае неравенство (1.8) выполняется с постоянной $\delta\geqslant 0$.

3°. Пусть *симметричная* функция $g^-(s,\sigma)$ из (2.28) разлагается в ряд

$$g^-(s,\sigma)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(s)\beta_k(\sigma),$$

где хотя бы одна из систем функций $\{\alpha_k(s)\}_1^\infty\subset L_2$ и $\{\beta_k(\sigma)\}_1^\infty\subset L_2$ линейно независима и сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|\alpha_k(s)\|_{L_2}\|\beta_k(\sigma)\|_{L_2}.$$

Тогда для любой функции $x\in L_2$ находим

$$\|Sh^-x\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|\alpha_k(s)\|_{L_2}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta_k(\sigma)x(\sigma)d\sigma\right|\leqslant\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\|\alpha_k(s)\|_{L_2}\|\beta_k(\sigma)\|_{L_2}\right\}\|x\|_{L_2}\equiv l\|x\|_{L_2}.$$

Поэтому в этом случае можно считать $\delta\geqslant -l>-\infty$.

4°. Пусть *несимметричная* функция $h(s,\sigma)\in C_{2\pi}\otimes\operatorname{Lip}\alpha$ или же $h(s,\sigma)\in\operatorname{Lip}\alpha\otimes C_{2\pi}$, где $0<\alpha\leqslant 1$. Тогда, как и при доказательстве следствия теоремы 1, показывается, что оператор $Sh^-:L_2\to L_2$ является ограниченным. Поэтому в этом случае неравенство (1.8) выполняется с любой постоянной $\delta\geqslant -\|Sh^-\|$, $Sh^-:L_2\to L_2$.

5°. Пусть функция $h(s,\sigma)\in\operatorname{Lip}\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$ по каждой из переменных. Тогда в силу (2.28)–(2.30) функция $g^-(s,\sigma)\in L_2(0,2\pi)^2$ при $1/2<\alpha\leqslant 1$ и $g^-(s,\sigma)\in L_1(0,2\pi)$ при $0<\alpha\leqslant 1/2$. Поэтому (с учетом доказательства следствия теоремы 1) оператор $Sh^-:L_2\to L_2$ является вполне непрерывным и самосопряженным. Такой оператор имеет не более чем счетное множество вещественных собственных значений $\{\lambda_k\}_1^\infty$ и ортонормированных собственных функций $\{\theta_k(s)\}_1^\infty$. Тогда для любой функции $x(t)\in L_2$ находим

$$(Sh^-x,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|(x,\theta_k)|^2\geqslant\min_{k\in\mathbb{N}}\lambda_k\sum_{k=1}^{\infty}|(x,\theta_k)|^2\equiv\delta\|x\|^2.$$

Отсюда следует, что неравенство (1.8) выполняется с постоянной $\delta=\min\limits_{k\in\mathbb{N}}\lambda_k\in\mathbb{R}$.

Следует отметить, что приведенная выше вычислительная схема носит довольно *общий* характер. Рассмотрим некоторые удобные для приложений *частные* случаи.

6°. Пусть $n=2m+1$ $(m+1\in\mathbb{N})$, $\varphi_k(s)=e^{iks}$ и

$$x_n(s)=x_{2m+1}(s)=\sum_{k=-m}^{m}\alpha_k e^{iks}=\frac{\beta_0}{2}+\sum_{k=1}^{m}\beta_k\cos ks+\gamma_k\sin ks,\tag{3.1}$$

где $\overline{\alpha}_k=\alpha_{-k}$. Неизвестные коэффициенты $\alpha_{-m},\dots,\alpha_0,\dots,\alpha_m$ (а следовательно, и коэффициенты $\beta_0,\beta_1,\gamma_1,\dots,\beta_m,\gamma_m$) будем определять согласно (1.3) из СЛАУ

$$\sum_{k=-m}^{m}\alpha_k c_{j-k}(a)+\sum_{k=-m}^{m}\alpha_k b_{jk}=c_j(y),\quad j=\overline{-m,m},\tag{3.2}$$

где $b_{jk} = c_j(S(h(s,\sigma)e^{ik\sigma}))$, а

$$c_r(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)e^{-irs}ds \quad (r = 0, \pm 1, \dots)$$

— коэффициенты Фурье функции $f(s) \in L_2$ в комплексной форме. В этом случае за подпространство $X_n = X_{2m+1} \subset L_2$ берем множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше m $(m+1 \in \mathbb{N})$, а оператор проектирования $P_n = P_{2m+1} : L_2 \to X_n \subset L_2$ определяем по формуле

$$P_n f = P_{2m+1}(f; s) = \sum_{k=-m}^{m} c_k(f)e^{iks}. \tag{3.3}$$

Тогда условия (2.12) выполняются, а последовательность подпространств $\{X_n\}_1^\infty$ является предельно плотной в пространстве L_2.

Схема (1.1), (3.1)–(3.3) представляет собой схему *метода редукции* решения полного СИУ с ядром Гильберта по тригонометрической системе функций. Исследованию этой схемы (причем другим способом, чем здесь) в ряде частных случаев (в первую очередь для СИУ с выделенной характеристической частью) посвящен ряд работ (см., напр., [5], [6], [10], [11] и библиографию в них).

7°. На сегменте $[0, 2\pi]$ введем сетку равноотстоящих узлов

$$s_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

и обозначим через $\{\varphi_k(s) = \varphi_{k,n}(s)\}_1^n$ ортонормальную 2π-периодическую систему фундаментальных сплайнов нулевой степени с разрывами в узлах (3.4). Приближенное решение СИУ (1.1) будем искать в виде сплайна

$$x_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(s), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

коэффициенты $\alpha_k = \alpha_{k,n}$ которого будем определять из СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{s_{j-1}}^{s_j} A(\varphi_k; s)ds = \int_{s_{j-1}}^{s_j} y(s)ds, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.6}$$

Очевидно, что схема (1.1), (3.4)–(3.6) представляет собой вычислительную схему *метода сплайн-подобластей* нулевого порядка решения полного СИУ с ядром Гильберта. Здесь за подпространство $X_n \subset L_2$ берем множество всех сплайнов вида (3.5) с L_2-нормой, а оператор ортогонального проектирования $P_n : L_2 \to X_n \subset L_2$ определяем по формуле

$$P_n(f; s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(s) \int_{s_{k-1}}^{s_k} f(s)ds, \quad f \in L_2. \tag{3.7}$$

Нетрудно видеть, что оператор P_n из (3.7) удовлетворяет условиям (2.12), а последовательность подпространств $\{X_n\}_1^\infty \subset L_2$ является предельно плотной в пространстве L_2 в силу свойств множества всех ступенчатых функций с разрывами в узлах (3.4). Поэтому обоснование метода сплайн-подобластей для СИУ (1.1) следует из теорем 1–5.

8°. Использованные выше системы функций $\{\varphi_k = \varphi_{k,n}(s)\}_1^n \subset L_2$ предполагались ортонормальными; однако это требование не является обязательным, а именно, достаточно, чтобы они были лишь линейно независимыми. Этот вопрос рассмотрим хотя бы кратко на примере сплайн-метода первого порядка.

Обозначим через

$$\varphi_k = \varphi_{k,n}(s) = \begin{cases} 0 & \text{при } s \leqslant s_{k-1}, \\ \frac{s-s_{k-1}}{s_k-s_{k-1}} & \text{при } s_{k-1} \leqslant s \leqslant s_k, \\ \frac{s_{k+1}-s}{s_{k+1}-s_k} & \text{при } s_k \leqslant s \leqslant s_{k+1}, \\ 0 & \text{при } s \geqslant s_{k+1} \end{cases} \tag{3.8}$$

фундаментальные 2π-периодические сплайны первой степени по системе узлов (3.4). Очевидно, что система функций (3.8) является линейно независимой, но не ортогональной. Тем не менее с учетом теоремы ортогонализации Шмидта (см., напр., [19], гл. IV, § 5) и результатов теории приближений сплайнами (см., напр., [21], [22]) для этой системы функций основные утверждения теорем 1–5 остаются справедливыми.

9°. Теоремы 1–5 легко переносятся на случай СИУ (1.1) с *комплекснозначными* коэффициентами в пространстве *комплекснозначных* функций $L_2 = L_2(0, 2\pi)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)\overline{g}(s)ds \quad (f, g \in L_2), \tag{3.9}$$

где $\overline{g}(s)$ — соответствующая комплексно сопряженная к $g(s)$ функция. В этом случае следует использовать модифицированное определение положительного оператора в соответствии с формулой (3.9) или же вместо комплексного уравнения (1.1) можно решать эквивалентную ему систему из двух вещественных сингулярных уравнений относительно действительной и мнимой частей искомой функции $x(s) \in L_2$ в пространстве вещественных вектор-функций с соответствующими скалярным произведением и нормой.

10°. Результаты, аналогичные приведенным выше, справедливы также для других классов сингулярных интегральных уравнений, напр., для СИУ с ядром Коши

$$B\varphi \equiv b(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{q(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad -1 < t < 1,$$

где $b(t) \in C[-1, 1]$, $q(t, \tau) \in C[-1, 1]^2$, $f(t) \in L_2(-1, 1)$ — известные (вообще говоря, комплекснозначные) функции, а $\varphi(t) \in L_2(-1, 1)$ — искомая функция.

Литература

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
3. Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 303 с.
4. Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Integraloperatoren.* – Berlin: Akademic-Verlag, 1980. – 514 S.
5. Иванов В.В. *Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1965. – С. 125–177.
6. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. – С. 251–307.
7. Лифанов И.К., Тыртышников Е.Е. *Теплицевы матрицы и интегральные уравнения* // Вычисл. процессы и системы. – 1990. – Вып. 7. – С. 94–278.
8. Elliot D. *The approximate solution of singular integral equations* / Solut. Meth. Integral Equations: Theory and Appl. – New York–London, 1979. – P. 83–107.
9. Prößdorf S. *Numerishe Behandlung singulärer Integralgleichungen.* – Z. angew. Math. und Mech. – 1989. – Bd. 69. – № 4. – S. 5–13.

10. Иванов В.В. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.* – Киев: Наук. думка, 1968. – 287 с.
11. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.* – М.: Наука, 1971. – 352 с.
12. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
13. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике.* – М.: Наука, 1985. – 253 с.
14. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
15. Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* – М.: ТОО "Янус", 1995. – 520 с.
16. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избр. главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
17. Габдулхаев Б.Г. *Многомерные сингулярные интегральные уравнения с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 9. – С. 1504–1516.
18. Габдулхаев Б.Г. *Методы решения сингулярных интегральных уравнений с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 3. – С. 400–409.
19. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
20. Михлин С.Г. *Курс математической физики.* – М.: Наука, 1968. – 575 с.
21. Корнейчук Н.П. *Сплайны в теории приближения.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
22. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.

Казанский государственный университет

Поступила 03.12.2003