ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.763

В.В. ШУРЫГИН

О СТРОЕНИИ ПОЛНЫХ МНОГООБРАЗИЙ НАД АЛГЕБРАМИ ВЕЙЛЯ

В работе дается описание строения полного многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ над алгеброй Вейля $\mathbf{A}$ в терминах его псевдогрупп голономии.

1. Введение

Гладким многообразием над коммутативной ассоциативной алгеброй $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$-гладким многообразием) называется вещественное гладкое многообразие, снабженное атласом, карты которого принимают значения в фиксированном $\mathbf{A}$-модуле L, а функции склейки $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ являются $\mathbf{A}$-гладкими отображениями. $\mathbf{A}$-гладкое многообразие, моделируемое $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n{=}\mathbf{A}\times\dots\times\mathbf{A}$ (n сомножителей), называется n-мерным $\mathbf{A}$-гладким многообразием.

Геометрия конечномерных многообразий над алгебрами изучалась многими авторами (см., напр., [1]–[4]). Различного типа многообразия над алгебрами изучались также в случае, когда либо многообразие, либо алгебра являются бесконечномерными (см., напр., [5]–[7]).

А.П. Широковым было обнаружено [1], что естественные структуры гладких многообразий над алгебрами Вейля возникают на расслоениях Вейля $T^{\mathbf{A}}M_n$ [8], [9], определенных для произвольной алгебры Вейля $\mathbf{A}$ и произвольного гладкого многообразия M_n. Различным вопросам геометрии расслоений Вейля посвящены работы [10]–[13] и др. (см., напр., списки литературы в [9], [1], [4]).

Структуры гладких многообразий над алгебрами можно ввести на торах и цилиндрах, многообразиях Хопфа, расслоениях реперов высших порядков, фактормногообразиях расслоений Вейля [14].

Пусть $M_n^{\mathbf{A}}$ — n-мерное гладкое многообразие над алгеброй Вейля $\mathbf{A}$. Всякий идеал $\mathbf{I}$ алгебры $\mathbf{A}$ порождает вполне интегрируемое распределение на $M_n^{\mathbf{A}}$ и соответствующее каноническое слоение $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$. В частности, максимальный идеал $\mathring{\mathbf{A}}$ алгебры $\mathbf{A}$ порождает каноническое слоение $\mathring{\mathcal{F}}$ на $M_n^{\mathbf{A}}$. В случае расслоения Вейля $T^{\mathbf{A}}M_n$ вещественного гладкого многообразия M_n слои слоений $\mathring{\mathcal{F}}$ и $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ совпадают соответственно со слоями расслоений $T^{\mathbf{A}}M_n \to M_n$ и $T^{\mathbf{A}}M_n \to T^{\mathbf{A}/\mathbf{I}}M_n$. Слои слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ несут на себе естественные структуры (X,G)-многообразий в смысле У. Терстона [15], где $X = \mathbf{I}^n$, а $G = D_n(\mathbf{I})$ — некоторая полиномиальная группа Ли (см. § 2), и, таким образом, слоение $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ принадлежит классу так называемых тангенциальных (X,G)-слоений [16].

Для каждого слоя $L_X^{\mathbf{I}}$ слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ определены следующие два представления голономии: представление ростковой голономии слоя $L_X^{\mathbf{I}}$ как слоя слоения [17] и представление голономии $L_X^{\mathbf{I}}$ как (X,G)-многообразия [15], [18]. Распространение ростка локальной $\mathbf{A}^n$-карты на $M_n^{\mathbf{A}}$ вдоль слоя $L_X^{\mathbf{I}}$ дает еще одно представление голономии, которое определяет оба из вышеуказанных представлений [14]. Слоение $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ называется полным, если все его слои являются полными (X,G)-многообразиями. $\mathbf{A}$-гладкое многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ называется полным, если все слои слоения $\mathring{\mathcal{F}}$ являются полными. В этой работе определяется псевдогруппа голономии $\Gamma(\varphi)$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00308).

для погруженной трансверсали $\varphi : W_n \to M_n^{\mathbf{A}}$, состоящая из локальных $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов расслоения $T^{\mathbf{A}}W_n$, и доказывается (теорема 2), что полное многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ $\mathbf{A}$-диффеоморфно многообразию $T^{\mathbf{A}}W_n/\Gamma(\varphi)$.

Для алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon)$ дуальных чисел $a + b\varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$, понятие структуры $\mathbf{R}(\varepsilon)$-гладкого многообразия эквивалентно понятию интегрируемой почти касательной структуры. Глобальная теория интегрируемых почти касательных структур и проблема эквивалентности такой структуры канонической почти касательной структуре некоторого касательного расслоения изучались в [19]–[23]. В [20] показано, что в случае, когда каноническое слоение на многообразии M с интегрируемой почти касательной структурой задается субмерсией, а его слои являются полными и односвязными аффинными многообразиями, почти касательная структура на M эквивалентна стандартной почти касательной структуре некоторого касательного расслоения. В данной работе этот результат следующим образом обобщается на случай $\mathbf{A}$-гладкого многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ (теорема 3): если многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ полно, а слоение $\mathring{\mathcal{F}}$ задается субмерсией $p : M_n^{\mathbf{A}} \to M_n$ с односвязными слоями, то $M_n^{\mathbf{A}}$ $\mathbf{A}$-диффеоморфно расслоению Вейля $T^{\mathbf{A}}M_n$. Обобщением другого результата из [20] является теорема 4, утверждающая, что в случае, когда слоение $\mathring{\mathcal{F}}$ на полном $\mathbf{A}$-гладком многообразии $M_n^{\mathbf{A}}$ задается субмерсией $p : M_n^{\mathbf{A}} \to M_n$, допускающей сечение $s : M_n \to M_n^{\mathbf{A}}$, существует $\mathbf{A}$-гладкое накрытие $c : T^{\mathbf{A}}M_n \to M_n^{\mathbf{A}}$.

Если алгебра $\mathbf{A}$ представляет собой полупрямую сумму $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \oplus \mathbf{I}$, вышеуказанные результаты обобщаются на случай $\mathbf{A}$-гладкого многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ с полным слоением $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ (теоремы 2 и 3).

2. Предварительные сведения

Конечномерная коммутативная ассоциативная $\mathbf{R}$-алгебра $\mathbf{A}$ с единицей называется локальной в смысле А. Вейля или, кратко, алгеброй Вейля [8], [9], если ее радикал (множество нильпотентных элементов) $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}) = \mathring{\mathbf{A}}$ является единственным максимальным идеалом и фактор-алгебра $\mathbf{A}/\mathring{\mathbf{A}}$ изоморфна $\mathbf{R}$. Одномерное подпространство в алгебре Вейля $\mathbf{A}$, натянутое на ее единицу $1_{\mathbf{A}}$, является подалгеброй, изоморфной $\mathbf{R}$. Отождествляя эту подалгебру с $\mathbf{R}$, а $1_{\mathbf{A}}$ — с $1 \in \mathbf{R}$, будем представлять алгебру $\mathbf{A}$ в виде полупрямой суммы

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \oplus \mathring{\mathbf{A}}. \tag{1}$$

В соответствии с разложением (1) элемент $X \in \mathbf{A}$ представляется в виде $X = x + \mathring{X}$, где $x \in \mathbf{R}$, $\mathring{X} \in \mathring{\mathbf{A}}$. Символом $\pi_0^q : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ обозначается канонический эпиморфизм, отображающий X в x. Пусть $(\mathring{\mathbf{A}})^r$ — r-я степень идеала $\mathring{\mathbf{A}}$. Размерность N фактор-алгебры $\mathring{\mathbf{A}}/(\mathring{\mathbf{A}})^2$ называется шириной алгебры $\mathbf{A}$. Натуральное число q, определяемое соотношениями $(\mathring{\mathbf{A}})^q \neq 0$, $(\mathring{\mathbf{A}})^{q+1} = 0$, называется высотой алгебры $\mathbf{A}$. Алгебра Вейля ширины N и высоты q изоморфна фактор-алгебре алгебры $\mathbf{R}[[t^1, \dots, t^N]]$ формальных степенных рядов от N переменных $t^1, \dots, t^N$ с коэффициентами в $\mathbf{R}$. Она также изоморфна фактор-алгебре алгебры $\mathbf{R}(N, q) = \mathbf{R}[t^1, \dots, t^N; q]$ срезанных многочленов степени $\leq q$ от N переменных. Для алгебры $\mathbf{R}(1, 1)$, называемой алгеброй дуальных чисел, будем использовать обозначение $\mathbf{R}(\varepsilon)$ (в [9] эта алгебра обозначается символом $\mathbf{D}$).

Пусть $\mathbf{I}$ — идеал в $\mathbf{A}$, $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$ — фактор-алгебра, а $p : \mathbf{A} \to \overline{\mathbf{A}}$ — канонический эпиморфизм. Эпиморфизм p индуцирует эпиморфизм модулей n-строк $p : \mathbf{A}^n \to \overline{\mathbf{A}}^n$ (для простоты обозначаем его тем же символом). Слоение на $\mathbf{A}^n$, определяемое субмерсией p, называется *каноническим* $\mathbf{I}^n$*-слоением.* Слои этого слоения являются классами вычетов по модулю $\mathbf{I}^n$. В частности, эпиморфизм $\pi_0^q : \mathbf{A}^n \to \mathbf{R}^n$ задает *каноническое* $\mathring{\mathbf{A}}^n$*-слоение* на $\mathbf{A}^n$.

Пусть $U \subset \mathbf{A}^n$ — открытое множество. Гладкое отображение $\Phi : U \to \mathbf{A}^k$ называется $\mathbf{A}$-гладким, если касательное отображение $T_X\Phi : T_XU \cong \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^k \cong T_{\Phi(X)}\mathbf{A}^k$ $\mathbf{A}$-линейно при всех $X \in U$. Если гладкое отображение $\varphi : U \to \mathbf{A}^k$ является базовым (проектируемым) [17] по отношению к каноническому $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоению, то формулой

$$Y^i = \varphi^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \varphi^i}{Dx^p} \mathring{X}^p, \tag{2}$$

где $i = 1, \dots, k$, $p = (p_1 \dots, p_n)$ — мультииндекс длины n, а $\mathring{X}^p = (\mathring{X}^1)^{p_1} \dots (\mathring{X}^n)^{p_n}$, задается $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\Phi : U \to \mathbf{A}^k$. Более того, всякое $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\Phi : U \to \mathbf{A}^k$ имеет вид (2) для некоторых базовых функций $\varphi^i : U \to \mathbf{A}$, а если U — простое открытое множество [17] для канонического $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоения, то $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\Phi : U \to \mathbf{A}^k$ единственным образом продолжается до $\mathbf{A}$-гладкого отображения $\widetilde{\Phi} : (\pi_0^q)^{-1}(\pi_0^q(U)) \to \mathbf{A}^k$ такого, что $\varphi = (\widetilde{\Phi} \mid \pi_0^q(U)) \circ \pi_0^q$. Доказательство этого факта можно найти, например, в [14].

$\mathbf{A}$-гладким многообразием размерности n ($\mathbf{A}$-гладким многообразием, моделируемое $\mathbf{A}$-модулем $\mathbf{A}^n$) называется гладкое многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$, снабженное максимальным атласом $\mathbf{A}^n$-карт $h_\alpha : U_\alpha \to U'_\alpha \subset \mathbf{A}^n$ с $\mathbf{A}$-гладкими преобразованиями координат $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ (см., напр., [24], [3], [14]). Из (2) следует, что $\mathbf{A}$-гладкие отображения $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ сохраняют канонические $\mathbf{I}^n$-слоения на $\mathbf{A}^n$, поэтому всякому идеалу $\mathbf{I} \subset \mathbf{A}$ соответствует слоение $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ на многообразии $M_n^{\mathbf{A}}$, которое также называется *каноническим* $\mathbf{I}^n$*-слоением.* Каноническое $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоение на $M_n^{\mathbf{A}}$, соответствующее максимальному идеалу $\mathring{\mathbf{A}}$, обозначается символом $\mathring{\mathcal{F}}$. Естественная структура n-мерного $\mathbf{A}$-гладкого многообразия возникает на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}} M_n$ $\mathbf{A}$-скоростей [9], [14], [4] на гладком вещественном n-мерном многообразии M_n. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — две алгебры Вейля, $M_n^{\mathbf{A}}$ — $\mathbf{A}$-гладкое многообразие, а $W_k^{\mathbf{B}}$ — $\mathbf{B}$-гладкое многообразие. Под морфизмом из $M_n^{\mathbf{A}}$ в $W_k^{\mathbf{B}}$ подразумевается пара (φ, f), состоящая из унитального гомоморфизма алгебр Вейля $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и гладкого отображения $f : M_n^{\mathbf{A}} \to W_k^{\mathbf{B}}$ такого, что $T_X f$ удовлетворяет условию $T_X f(\alpha v) = \varphi(\alpha) T_X f(v)$ для всех $X \in M_n^{\mathbf{A}}$ и $v \in T_X M_n^{\mathbf{A}}$. Конечномерные гладкие многообразия над алгебрами Вейля вместе с описанными выше морфизмами образуют категорию, которая обозначается через $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}\text{–}\mathcal{M}an$.

Из (2) следует, что $\mathbf{A}$-гладкий диффеоморфизм $\Phi : (\pi_0^q)^{-1}(U) \subset \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$, где U — открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, сохраняет каноническое $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоение на $\mathbf{A}^n$. Предположим, что Φ отображает слой $\mathring{\mathbf{A}}^n = (\pi_0^q)^{-1}(0)$ на себя, тогда ограничение Φ на $\mathring{\mathbf{A}}^n$ имеет вид

$$\mathring{Y}^i = \sum_{|p|=0}^{q} \varphi_p^i \mathring{X}^p, \quad \varphi_p^i \in \mathbf{A}, \quad \varphi_0^i = \mathring{Y}_0^i \in \mathring{\mathbf{A}}. \tag{3}$$

Множество всех диффеоморфизмов $\mathring{\mathbf{A}}^n \to \mathring{\mathbf{A}}^n$ вида (3) образует группу Ли $D_n(\mathbf{A})$, называемую $\mathbf{A}$-аффинной дифференциальной группой [25]. Таким образом, каждый слой канонического $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоения на $M_n^{\mathbf{A}}$ обладает естественной структурой (X, G)-многообразия в смысле У. Терстона [15] для $X = \mathring{\mathbf{A}}^n$ и $G = D_n(\mathbf{A})$. Для простоты $(\mathring{\mathbf{A}}^n, D_n(\mathbf{A}))$-многообразия называются также $\mathring{\mathbf{A}}^n$-многообразиями.

Из (2) также следует, что для любого идеала $\mathbf{I} \subset \mathbf{A}$ $\mathbf{A}$-гладкий диффеоморфизм $\Phi : (\pi_0^q)^{-1}(U) \subset \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ сохраняет каноническое $\mathbf{I}^n$-слоение на $\mathbf{A}^n$ (см. подробнее в [14]) и, таким образом, каждый слой канонического $\mathbf{I}^n$-слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ на $M_n^{\mathbf{A}}$ обладает естественной структурой $(\mathbf{I}^n, D_n(\mathbf{I}))$-многообразия, где $D_n(\mathbf{I})$ — группа Ли диффеоморфизмов $\Psi : \mathbf{I}^n \ni \{\check{X}^i\} \to \{\check{Y}^i\} \in \mathbf{I}^n$ вида

$$\check{Y}^i = \sum_{|p|=0}^{q} \psi_p^i \check{X}^p, \quad \psi_p^i \in \mathbf{A}, \quad \psi_0^i = \check{Y}_0^i \in \mathbf{I}, \quad \det(\psi_j^i) \notin \mathring{\mathbf{A}}. \tag{4}$$

Для краткости будем называть $(\mathbf{I}^n, D_n(\mathbf{I}))$-многообразия $\mathbf{I}^n$-многообразиями.

(X,G)-многообразие M называется полным, если развертывающее отображение $D : \widetilde{M} \to X$ является накрытием [15], [18]. Каноническое $\mathbf{I}^n$-слоение на $M_n^{\mathbf{A}}$ называется полным, если его слои являются полными $\mathbf{I}^n$-многообразиями. Многообразие $M_n^{\mathbf{A}}$ называется полным, если его каноническое $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-слоение является полным.

Пусть $p \oplus p$ — прямая сумма двух экземпляров канонического эпиморфизма $p : \mathbf{A} \to \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$, а $\Delta : \overline{\mathbf{A}} \ni \overline{X} \mapsto (\overline{X}, \overline{X}) \in \overline{\mathbf{A}} \oplus \overline{\mathbf{A}}$ — диагональное вложение. Алгебра Вейля $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$ определяется как обратный образ диагонали $\Delta(\overline{\mathbf{A}}) \subset \overline{\mathbf{A}} \oplus \overline{\mathbf{A}}$ по отношению к эпиморфизму $p \oplus p$. Образ $\Delta(\mathbf{A})$ алгебры $\mathbf{A}$ при диагональном вложении $\Delta : \mathbf{A} \to \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}$ содержится в $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$. Пусть $\widehat{\Delta} : \mathbf{A} \to \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$ — соответствующее вложение алгебры $\mathbf{A}$ в $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$. Имеет место следующая точная последовательность:

$$0 \longrightarrow \mathbf{I} \oplus \mathbf{I} \xrightarrow{i} \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}} \xrightarrow{p} \overline{\mathbf{A}} \to 0. \tag{5}$$

Пусть p_k $(k = 1, 2)$ — проекция алгебры $\mathbf{A} \oplus \mathbf{A}$ на k-е прямое слагаемое, а i_k — вложение идеала $\mathbf{I}$ алгебры $\mathbf{A}$ в $\mathbf{I} \oplus \mathbf{I}$ как k-го прямого слагаемого. Для простоты композицию $p_k \circ i : \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}} \to \mathbf{A}$ отображения p_k и вложения $i : \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}} \to \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}$ будем обозначать одним символом p_k. Аналогично композиция $i \circ i_k : \mathbf{I} \to \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$, где i — вложение из точной последовательности (5), будет обозначаться символом i_k. Теми же символами p_k и i_k будем обозначать соответствующие отображения модулей $p_k : \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}^n \to \mathbf{A}^n$ и $i_k : \mathbf{I}^n \to \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}^n$. Вложение $\widehat{\Delta} : \mathbf{A} \to \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$ позволяет рассматривать алгебру $\mathbf{A}$ как подалгебру в $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$. Посредством $\widehat{\Delta} : \mathbf{A}^n \to \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}^n$ будем также обозначать естественное продолжение вложения $\widehat{\Delta} : \mathbf{A} \to \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$. Будем отождествлять $\mathbf{A}^n$ с $\widehat{\Delta}(\mathbf{A}^n) \subset \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}^n$. Тогда $\mathbf{A}$-гладкое отображение $\Phi : U \to \mathbf{A}^k$, задаваемое уравнениями (2), можно единственным образом продолжить до $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$-гладкого отображения $\widehat{\Phi} : p_1^{-1}(U) \subset \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}^n \to \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}^k$ такого, что $\widehat{\Phi} \mid \widehat{\Delta}(U) = \Phi$. Отображение $\widehat{\Phi}$ имеет вид

$$Y^i = \widehat{\varphi}^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \widehat{\varphi}^i}{Dx^p} \overset{\circ}{\widehat{X}}{}^p, \tag{6}$$

где $\widehat{\varphi}^i = \widehat{\Delta} \circ \varphi^i \circ p_1 : p_1^{-1}(U) \to \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$, $\{\overset{\circ}{\widehat{X}}{}^i\} \in p_1^{-1}(U) \subset \overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$.

В случае, когда отображение Φ задается сложным выражением, его продолжение будем обозначать через $\Phi\widehat{\ }$.

Пусть $M_n^{\mathbf{A}}$ — $\mathbf{A}$-гладкое многообразие и $\{h_\alpha : U_\alpha \subset M_n^{\mathbf{A}} \to U'_\alpha \subset \mathbf{A}^n\}_{\alpha \in A}$ — $\mathbf{A}^n$-атлас на $M_n^{\mathbf{A}}$, определяющий его $\mathbf{A}$-гладкую структуру. Преобразования координат $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ имеют вид (2). С каноническим $\mathbf{I}^n$-слоением $M_n^{\mathbf{A}}$ естественно ассоциируется расслоение $\pi_{\mathbf{I}} : O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}}) \to M_n^{\mathbf{A}}$ со стандартным слоем $\mathbf{I}^n$, структурной группой $D_n(\mathbf{I})$ и атласом

$$\{H_\alpha : \pi_{\mathbf{I}}^{-1}(U_\alpha) \to U'_\alpha \times \mathbf{I}^n\}_{\alpha \in A}, \tag{7}$$

функции склейки которого имеют вид $H_\alpha \circ H_\beta^{-1} = (h_\alpha \circ h_\beta^{-1})\widehat{\ }$. По построению многообразие $O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}})$ обладает естественной структурой n-мерного $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$-гладкого многообразия. Расслоение $\pi_{\mathbf{I}} : O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}}) \to M_n^{\mathbf{A}}$ называется *каноническим соприкасающимся* $\mathbf{I}^n$*-расслоением* многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ [14]. Для канонического соприкасающегося $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$-расслоения многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ будем использовать обозначение $\pi : O^V(M_n^{\mathbf{A}}) \to M_n^{\mathbf{A}}$.

Всякое n-мерное $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$-гладкое многообразие обладает двумя каноническими $\mathbf{I}^n$-слоениями $\mathcal{F}_1^{\mathbf{I}}$ и $\mathcal{F}_2^{\mathbf{I}}$, которые соответствуют вложениям i_1 и i_2 идеала $\mathbf{I}$ в алгебру $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$. В терминах локальных $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$-координат $\{\widehat{X}^i\}$ слоение $\mathcal{F}_k^{\mathbf{I}}$ задается уравнениями $p_k(\widehat{X}^i) = \mathrm{const}$. Слои канонического $\mathbf{I}^n$-слоения $\mathcal{F}_2^{\mathbf{I}}$ на $O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}})$ являются слоями проекции $\pi_{\mathbf{I}}$. Расслоение $\pi_{\mathbf{I}} : O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}}) \to M_n^{\mathbf{A}}$ является слоеным расслоением [17], [26] по отношению к каноническому $\mathbf{I}^n$-слоению $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ на $M_n^{\mathbf{A}}$, и слоение $\mathcal{F}_1^{\mathbf{I}}$ является поднятым слоением по отношению к слоению $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$. При проекции $\pi_{\mathbf{I}}$ слой поднятого слоения $\mathcal{F}_1^{\mathbf{I}}$ накрывает соответствующий слой слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$. Слоение $\mathcal{F}_1^{\mathbf{I}}$ задает плоскую частичную связность [26] $\Gamma_{\mathbf{I}}^V$ в расслоении $\pi_{\mathbf{I}} : O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}}) \to M_n^{\mathbf{A}}$ (связность вдоль слоев слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$), горизонтальное распределение которой определяется уравнениями $dX_2^i = 0$. Параллельное перенесение в связности $\Gamma_{\mathbf{I}}^V$ вдоль слоевой кривой γ на $M_n^{\mathbf{A}}$ определяет накрывающие кривые $\widetilde{\gamma}$, расположенные в слоях поднятого слоения.

3. Псевдогруппа голономии многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$

Пусть $L_{X_0}^{\mathring{\mathbf{A}}}$ — слой канонического $\mathring{\mathbf{A}}^n$-слоения $\mathring{\mathcal{F}}$ на $M_n^{\mathbf{A}}$, проходящий через точку X_0, а $\gamma : [0,1] \to L_{X_0}^{\mathring{\mathbf{A}}}$ — путь, соединяющий X_0 с $X_1 \in L_{X_0}^{\mathring{\mathbf{A}}}$. Из уравнений (2) следует, что аналогично случаю (X,G)-многообразий фиксированная $\mathbf{A}^n$-карта $(U, h : U \to U' \subset \mathbf{A}^n)$ на $M_n^{\mathbf{A}}$ может быть распространена вдоль γ, в результате чего возникает $\mathbf{A}^n$-карта (W, h_γ), $W \ni X_1$, называемая распространением $\mathbf{A}^n$-карты (U,h) вдоль γ. Росток отображения h_γ в X_1 зависит только от гомотопического класса пути γ в слое $L_{X_0}^{\mathring{\mathbf{A}}}$.

Рассмотрим слой $L_{X_0}^{\mathbf{I}}$ канонического $\mathbf{I}^n$-слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ на многообразии $M_n^{\mathbf{A}}$, проходящий через X_0, и $\mathbf{A}^n$-карту (U,h) такую, что $U \ni X_0$, а $h(X_0) = 0$. Распространяя карту (U,h) вдоль петли $\gamma : [0,1] \to L_{X_0}^{\mathbf{I}}$ с началом и концом в точке X_0, получаем новую $\mathbf{A}^n$-карту (W, h_γ), область определения которой W содержит точку X_0. Росток $\alpha_{X_0}^{\mathbf{I}}(\gamma) = \alpha_{X_0\,h}^{\mathbf{I}}(\gamma)$ композиции $h_\gamma \circ h^{-1}$ при $0 \in \mathbf{A}^n$ определен вдоль всего подмодуля $\mathring{\mathbf{A}}^n \subset \mathbf{A}^n$ и зависит только от гомотопического класса пути γ. Если γ_1 и γ_2 — две петли в слое $L_{X_0}^{\mathbf{I}}$, имеющие начало и конец в точке X_0, и $\gamma_3 = \gamma_2 * \gamma_1$, то $\alpha_{X_0}^{\mathbf{I}}(\gamma_3) = \alpha_{X_0}^{\mathbf{I}}(\gamma_2) \circ \alpha_{X_0}^{\mathbf{I}}(\gamma_1)$. Таким образом, возникает гомоморфизм

$$\alpha_{X_0}^{\mathbf{I}} : \Pi_1(L_{X_0}^{\mathbf{I}}, X_0) \ni [\gamma] \mapsto \alpha_{X_0}^{\mathbf{I}}(\gamma) \in \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^n, \mathbf{I}^n)$$

из фундаментальной группы $\Pi_1(L_{X_0}^{\mathbf{I}}, X_0)$ слоя $L_{X_0}^{\mathbf{I}}$ в группу $\mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^n, \mathbf{I}^n)$ ростков $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов вида $p^{-1}(V) \subset \mathbf{A}^n \to p^{-1}(V') \subset \mathbf{A}^n$, которые отображают подмодуль $\mathbf{I}^n$ в себя, где $p : \mathbf{A}^n \to \overline{\mathbf{A}}^n$ — проекция, индуцированная каноническим эпиморфизмом $p : \mathbf{A} \to \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\mathbf{I}$, а V и V' — окрестности нуля в $\overline{\mathbf{A}}^n$. Гомоморфизм $\alpha_{X_0}^{\mathbf{I}}$ называется *представлением $\mathbf{I}$-голономии многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ в точке X_0*. Гомоморфизм $\mathring{\alpha}_{X_0} = \alpha_{X_0}^{\mathring{\mathbf{A}}}$ называется *представлением голономии многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$ в точке X_0*. Представление голономии $\mathring{\alpha}_{X_0}$ определяет представление голономии слоения $\mathring{\mathcal{F}}$ в точке X_0 и представление голономии слоя $L_{X_0}^{\mathring{\mathbf{A}}}$, рассматриваемого как $(\mathring{\mathbf{A}}^n, D_n(\mathbf{A}))$-многообразие [14], [4].

Росток $\mathbf{A}$-диффеоморфизма $\Phi \in \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^n, \mathbf{I}^n)$, заданный уравнениями вида (2), определяет росток $\overline{\Phi} \in \mathrm{Diff}_{\overline{\mathbf{A}}}(\overline{\mathbf{A}}^n, 0)$, имеющий уравнения

$$\overline{Y}^i = \overline{\varphi}^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \overline{\varphi}^i}{D x^p} \overset{\circ}{\overline{X}}{}^p,$$

где $\overline{\varphi}^i = \varphi^i + \mathbf{I}$ — функции, значениями которых являются классы вычетов соответствующих значений функций φ^i по модулю идеала $\mathbf{I}$. Пусть $p^{\mathbf{I}} : \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^n, \mathbf{I}^n) \to \mathrm{Diff}_{\overline{\mathbf{A}}}(\overline{\mathbf{A}}^n, 0)$ — гомоморфизм, относящий ростку Φ росток $\overline{\Phi}$, а $r^{\mathbf{I}} : \mathrm{Diff}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^n, \mathbf{I}^n) \to D_n(\mathbf{I})$ — гомоморфизм, относящий ростку Φ его ограничение $\Phi \mid \mathbf{I}^n$. Нетрудно заметить, что $\alpha_{\mathrm{l}\,X_0}^{\mathbf{I}} = r^{\mathbf{I}} \circ \alpha_{X_0}^{\mathbf{I}}$ — представление голономии слоя $L_{X_0}^{\mathbf{I}}$, рассматриваемого как $(\mathbf{I}^n, D_n(\mathbf{I}))$-многообразие, а $\alpha_{\mathrm{tr}\,X_0}^{\mathbf{I}} = p^{\mathbf{I}} \circ \alpha_{X_0}^{\mathbf{I}}$ — представление голономии слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ для X_0.

Если алгебра $\mathbf{A}$ является полупрямой суммой $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \oplus \mathbf{I}$, то группа Ли $D_n(\mathbf{I})$ представляет собой полупрямое произведение $D_n(\mathbf{I}) = \widetilde{D}_n(\mathbf{I}) \times \mathring{D}_n(\mathbf{I})$ подгруппы Ли $\widetilde{D}_n(\mathbf{I})$, состоящей из диффеоморфизмов вида (4), удовлетворяющих условиям $\psi_p^i \in \overline{\mathbf{A}}$, $\psi_0^i = 0$, и нормальной подгруппы $\mathring{D}_n(\mathbf{I})$, определяемой соотношениями $\psi_j^i = \delta_j^i$, $\psi_p^i \in \mathbf{I}$ при $|p| \neq 1$. Пусть $\tau^{\mathbf{I}} : D_n(\mathbf{I}) \to \widetilde{D}_n(\mathbf{I})$ —

канонический эпиморфизм. Композиция

$$\widetilde{\alpha}^{\mathbf{I}}_{1\,X_0} = \tau^{\mathbf{I}} \circ \alpha^{\mathbf{I}}_{1\,X_0} : \Pi_1(L^{\mathbf{I}}_{X_0}, X_0) \to \widetilde{D}_n(\mathbf{I})$$

называется *представлением* $\widetilde{D}_n(\mathbf{I})$*-голономии слоя* $L^{\mathbf{I}}_{X_0}$ *в точке* X_0. Нетрудно заметить [14], [4], что представление $\widetilde{D}_n(\mathbf{I})$-голономии определяется представлением голономии $\alpha^{\mathbf{I}}_{\mathrm{tr}\,X_0}$, более точно,

$$\widetilde{\alpha}^{\mathbf{I}}_{1\,X_0} = r^{\mathbf{I}} \circ i^{\mathbf{I}} \circ \alpha^{\mathbf{I}}_{\mathrm{tr}\,X_0}. \tag{8}$$

Пусть $(M, \mathcal{F})$ — гладкое многообразие со слоением, а W — погруженная трансверсаль в $(M, \mathcal{F})$. Скольжение локальных трансверсалей вдоль слоевых путей определяет псевдогруппу голономии слоения $\mathcal{F}$ на W [17]. В случае, когда алгебра $\mathbf{A}$ является полупрямой суммой $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \oplus \mathbf{I}$ подалгебры $\overline{\mathbf{A}} \cong \mathbf{A}/\mathbf{I}$ и идеала $\mathbf{I}$, аналогичную псевдогруппу можно определить для $\mathbf{I}$-голономии многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$. Напомним, что всякая алгебра Вейля $\mathbf{A}$ является полупрямой суммой $\mathbf{A} = \mathbf{R} \oplus \mathring{\mathbf{A}}$. Другим примером представления алгебры Вейля в виде полупрямой суммы может служить следующее разложение тензорного произведения двух алгебр Вейля: $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{B} \oplus (\mathbf{B} \otimes \mathring{\mathbf{A}})$.

В дальнейшем предполагается, что рассматриваемая алгебра Вейля $\mathbf{A}$ является полупрямой суммой идеала $\mathbf{I}$ и подалгебры $\overline{\mathbf{A}} \cong \mathbf{A}/\mathbf{I}$, а $p : \mathbf{A}^n \to \overline{\mathbf{A}}^n$, $n = 1, \ldots,$ — канонический эпиморфизм. В этом случае имеется функтор $\mathbf{A}$-продолжения $E^{\mathbf{I}}$ из категории конечномерных $\overline{\mathbf{A}}$-гладких многообразий в категорию конечномерных $\mathbf{A}$-гладких многообразий [14]. Для произвольного $\overline{\mathbf{A}}$-гладкого отображения $\overline{\Phi} : U \subset \overline{\mathbf{A}}^n \to \overline{\mathbf{A}}^k$, имеющего вид (2)

$$\overline{Y}^i = \overline{\varphi}^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \overline{\varphi}^i}{Dx^p} \overline{\mathring{X}}^p, \tag{9}$$

отображение $E^{\mathbf{I}}(\overline{\Phi}) : p^{-1}(U) \subset \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^k$ задается уравнениями

$$Y^i = \overline{\varphi}^i + \sum_{|p|=1}^{q} \frac{1}{p!} \frac{D^p \overline{\varphi}^i}{Dx^p} \mathring{X}^p. \tag{10}$$

Пусть $M_n^{\overline{\mathbf{A}}}$ — $\overline{\mathbf{A}}$-гладкое многообразие с атласом $\{(\overline{U}_\alpha, \overline{h}_\alpha : \overline{U}_\alpha \to \overline{U}'_\alpha)\}_{\alpha \in A}$. На дизъюнктном объединении открытых подмножеств $p^{-1}(\overline{U}'_\alpha) = \overline{U}'_\alpha \times \mathbf{I}^n \subset \mathbf{A}^n$ по всем $\alpha \in A$ можно ввести отношение эквивалентности, полагая $X \in p^{-1}(\overline{U}'_\alpha)$ и $Y \in p^{-1}(\overline{U}'_\beta)$ эквивалентными, если $Y = E^{\mathbf{I}}(\overline{h}_\beta \circ \overline{h}_\alpha^{-1})(X)$. Пусть

$$E^{\mathbf{I}}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}}) = \bigsqcup_{\alpha \in A} p^{-1}(\overline{U}'_\alpha)/\sim$$

— фактор-множество и $g_\alpha : p^{-1}(\overline{U}'_\alpha) \to E^{\mathbf{I}}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}})$ — ограничение канонической проекции. Атлас $(g_\alpha(\overline{U}'_\alpha \times \mathbf{I}^n), h_\alpha)$, где $h_\alpha : g_\alpha(\overline{U}'_\alpha \times \mathbf{I}^n) \to \overline{U}'_\alpha \times \mathbf{I}^n$ — отображение, обратное к g_α, задает на $E^{\mathbf{I}}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}})$ структуру n-мерного $\mathbf{A}$-гладкого многообразия. Естественная проекция $p : E^{\mathbf{I}}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}}) \to M_n^{\overline{\mathbf{A}}}$ определяет локально тривиальное расслоение со стандартным слоем $\mathbf{I}^n$. Множество точек с нулевыми координатами представляет собой корректно определенное подмногообразие в $E^{\mathbf{I}}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}})$, называемое нулевым сечением в $E^{\mathbf{I}}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}})$. Вложение $i : M_n^{\overline{\mathbf{A}}} \to E^{\mathbf{I}}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}})$ многообразия $M_n^{\overline{\mathbf{A}}}$ на нулевое сечение в $E^{\mathbf{I}}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}})$ является морфизмом в категории $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}{-}\mathcal{M}an$ [14]. В дальнейшем мы будем отождествлять $M_n^{\overline{\mathbf{A}}}$ с $i(M_n^{\overline{\mathbf{A}}}) \subset E^{\mathbf{I}}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}})$. $\mathbf{A}$-гладкое отображение $E^{\mathbf{I}}(\overline{\Phi}) : E^{\mathbf{I}}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}}) \to E^{\mathbf{I}}(W_k^{\overline{\mathbf{A}}})$, соответствующее $\overline{\mathbf{A}}$-гладкому отображению $\overline{\Phi} : M_n^{\overline{\mathbf{A}}} \to W_k^{\overline{\mathbf{A}}}$, однозначно определяется $\mathbf{A}$-продолжениями локальных координатных представлений (9) отображения $\overline{\Phi}$. В случае $\mathbf{I} = \mathring{\mathbf{A}}$ функтор $\mathbf{A}$-продолжения $E^{\mathring{\mathbf{A}}}$ естественно эквивалентен функтору Вейля $T^{\mathbf{A}}$.

Если алгебра $\mathbf{A}$ является полупрямой суммой $\mathbf{A}=\overline{\mathbf{A}}\oplus\mathbf{I}$, то алгебра $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$ является полупрямой суммой $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}=\overline{\mathbf{A}}\oplus(\mathbf{I}\oplus\mathbf{I})$. Вложение $i:\overline{\mathbf{A}}\to\mathbf{A}$ индуцирует вложения $i_k:\mathbf{A}\to\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$, $k=1,2$, такие, что $p_k\circ i_k=\mathrm{id}$, $p_1\circ i_2=p_2\circ i_1=p$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— алгебра Вейля, являющаяся полупрямой суммой* $\mathbf{A}=\overline{\mathbf{A}}\oplus\mathbf{I}$ *подалгебры* $\overline{\mathbf{A}}$ *и идеала* $\mathbf{I}$*,* $M_n^{\mathbf{A}}$ *—* $\mathbf{A}$*-гладкое многообразие, каноническое* $\mathbf{I}^n$*-слоение* $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ *которого является полным, а* $(i:\overline{\mathbf{A}}\to\mathbf{A},\ \varphi:W_k^{\overline{\mathbf{A}}}\to M_n^{\mathbf{A}})$ *— морфизм в категории* $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}\text{–}\mathcal{M}an$*. Тогда существует единственное* $\mathbf{A}$*-гладкое отображение*

$$\varphi^{\mathbf{I}}:E^{\mathbf{I}}(W_k^{\overline{\mathbf{A}}})\to M_n^{\mathbf{A}},$$

ограничение которого на $W_k^{\overline{\mathbf{A}}}$ *совпадает с* φ*. Если, кроме того,* $k=n$ *и* $\varphi:W_n^{\overline{\mathbf{A}}}\to M_n^{\mathbf{A}}$ *— отображение, трансверсальное к слоям слоения* $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$*, то* $\varphi^{\mathbf{I}}$ *— локальный* $\mathbf{A}$*-диффеоморфизм.*

Доказательство. Относя точке $X\in M_n^{\mathbf{A}}$ с координатами X^i в $\mathbf{A}^n$-карте (U,h) точку $\widehat{X}\in O_{\mathbf{I}}^V M_n^{\mathbf{A}}$ с координатами $\widehat{X}^i=\widehat{\Delta}(X^i)$ в соответствующей $\widehat{\mathbf{A}}^n$-карте $(\pi_{\mathbf{I}}^{-1}(U),H)$ из атласа (7) на $O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}})$, получим корректно определенное сечение $\sigma:M_n^{\mathbf{A}}\to O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}})$. Пара $(\widehat{\Delta},\sigma)$ представляет собой морфизм в категории $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}\text{–}\mathcal{M}an$.

Морфизм (i,φ) однозначно продолжается до морфизма $(i_2:\mathbf{A}\to\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}},\varphi^O:E^{\mathbf{I}}(W_k^{\overline{\mathbf{A}}})\to O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}}))$ такого, что $\varphi^O|W_k^{\overline{\mathbf{A}}}=\varphi$ и коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E^{\mathbf{I}}(W_k^{\overline{\mathbf{A}}}) & \xrightarrow{\varphi^O} & O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}}) \\ p\downarrow\uparrow i & & \pi_{\mathbf{I}}\downarrow\uparrow\sigma \\ W_k^{\overline{\mathbf{A}}} & \xrightarrow{\varphi} & M_n^{\mathbf{A}}. \end{array} \tag{11}$$

Если в терминах локальных координат на многообразиях $W_k^{\overline{\mathbf{A}}}$ и $M_n^{\mathbf{A}}$ отображение φ задается уравнениями

$$Y^i=\varphi^i+\sum_{|p|=1}^{q}\frac{1}{p!}\frac{D^p\varphi^i}{Dx^p}\overset{\circ}{X}{}^p,$$

то в терминах индуцированных локальных координат на $E^{\mathbf{I}}(W_k^{\overline{\mathbf{A}}})$ и $O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}})$ отображение φ^O задается уравнениями

$$Y_1^i=\varphi^i+\sum_{|p|=1}^{q}\frac{1}{p!}\frac{D^p\varphi i}{Dx^p}\overset{\circ}{X}{}^p,\quad Y_2^{i'}=\varphi^i+\sum_{|p|=1}^{q}\frac{1}{p!}\frac{D^p\varphi^i}{Dx^p}\overset{,\circ}{X}{}^p,$$

где $Y_1^i=p_1(\widehat{Y}^i)$, $Y_2^i=p_2(\widehat{Y}^i)$.

Гомотопический группоид $\Pi_{\mathbf{I}}(M_n^{\mathbf{A}})$ $\mathbf{I}^n$-слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ на $M_n^{\mathbf{A}}$ представляет собой множество гомотопических классов слоевых путей $\gamma:[0,1]\to M_n^{\mathbf{A}}$ [27]. Пусть $\pi_1:\Pi_{\mathbf{I}}(M_n^{\mathbf{A}})\to M_n^{\mathbf{A}}$ — отображение, относящее гомотопическому классу $[\gamma]$ точку $\gamma(1)$. Рассмотрим слой $L_{X_0}^{\mathbf{I}}$ слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$, проходящий через $X_0\in M_n^{\mathbf{A}}$, и непрерывный путь $\gamma:[0,1]\to L_{X_0}^{\mathbf{I}}$, соединяющий X_0 с $X_1\in L_{X_0}^{\mathbf{I}}$. Пусть $(U,h:U\to U'\subset\mathbf{A}^n)$ — $\mathbf{A}^n$-карта на $M_n^{\mathbf{A}}$ такая, что $U\ni X_0$, а U' — простое открытое множество [17] для канонических слоений на $\mathbf{A}^n$. Рассмотрим $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}^n$-карту $(\pi_{\mathbf{I}}^{-1}(U),H)$ на расслоении $O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}})$, индуцированную картой (U,h), и положим $H_{X_0}=\mathrm{pr}_2\circ H|\pi_{\mathbf{I}}^{-1}(X_0):\pi_{\mathbf{I}}^{-1}(X_0)\to\mathbf{I}^n$, где pr_2 — проекция $U'\times\mathbf{I}^n$ на $\mathbf{I}^n$ (см. (7)). Рассмотрим также $(\mathbf{I}^n,D_n(\mathbf{I}))$-карту $(U\cap L_{X_0}^{\mathbf{I}},h_{X_0}^{\mathbf{I}})$ на слое $L_{X_0}^{\mathbf{I}}$, индуцированную картой (U,h). Поскольку преобразования координат на слое $L_{X_0}^{\mathbf{I}}$ представляют собой полиномиальные отображения, то отображение $h_{X_0}^{\mathbf{I}}$ может быть распространено вдоль пути γ [18]. Относя классу $[\gamma]\in\Pi_{\mathbf{I}}(M_n^{\mathbf{A}})$ точку $D_{\mathbf{I}}([\gamma])=H_{X_0}^{-1}(h_{X_0}^{\mathbf{I}}(X_1))\in O_{\mathbf{I}}^V M_n^{\mathbf{A}}$, получим отображение

$$D_{\mathbf{I}}:\Pi_{\mathbf{I}}(M_n^{\mathbf{A}})\to O_{\mathbf{I}}^V(M_n^{\mathbf{A}}),$$

называемое развертывающим отображением слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ [14]. Отображение $D_{\mathbf{I}}$ является локальным гомеоморфизмом. Поскольку слоение $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ полно, это отображение является диффеоморфизмом, что позволяет перенести структуру $\widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{I}}$-гладкого многообразия с $O^V_{\mathbf{I}}(M^{\mathbf{A}}_n)$ на $\Pi_{\mathbf{I}}(M^{\mathbf{A}}_n)$. Используя развертывающее отображение $D_{\mathbf{I}}$, получим проекцию $\pi_1 \circ D^{-1}_{\mathbf{I}} : O^V_{\mathbf{I}}(M^{\mathbf{A}}_n) \to M^{\mathbf{A}}_n$. Пара $(p_2, \pi_1 \circ D^{-1}_{\mathbf{I}})$ представляет собой морфизм в категории $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}-\mathcal{M}an$. Композиция $\varphi^{\mathbf{I}} = \pi_1 \circ D^{-1}_{\mathbf{I}} \circ \varphi^O : E^{\mathbf{I}}(W^{\overline{\mathbf{A}}}_k) \to M^{\mathbf{A}}_n$ является $\mathbf{A}$-гладким отображением. Поскольку диаграмма (11) коммутативна, то $\varphi^{\mathbf{I}}|W^{\overline{\mathbf{A}}}_k = \pi_1 \circ D^{-1}_{\mathbf{I}} \circ \varphi^O \circ i = \pi_1 \circ D^{-1}_{\mathbf{I}} \circ \sigma \circ \varphi = \mathrm{id} \circ \varphi = \varphi$. Единственность отображения $\varphi^{\mathbf{I}}$ следует из (2) и того, что его ограничение на $W^{\overline{\mathbf{A}}}_k$ совпадает с φ.

Если $\varphi : W^{\overline{\mathbf{A}}}_n \to M^{\mathbf{A}}_n$ трансверсально к слоям слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$, то φ^O — погружение и, следовательно, $\varphi^{\mathbf{I}}$ — локальный диффеоморфизм. □

Пусть теперь $\varphi : W^{\overline{\mathbf{A}}}_n \to M^{\mathbf{A}}_n$ — морфизм в категории $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}-\mathcal{M}an$, трансверсальный к слоям слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ и Γ_W — псевдогруппа голономии слоения $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ на погруженной трансверсали $W^{\overline{\mathbf{A}}}_n$ [17], [27]. Скольжение локальных трансверсалей вдоль слоевого пути $\gamma : [0,1] \to L^{\mathbf{I}}_{X_0}$ такого, что $\gamma(0), \gamma(1) \in \varphi(W^{\overline{\mathbf{A}}}_n)$, определяет локальный $\overline{\mathbf{A}}$-диффеоморфизм $\nu : V \to U$, принадлежащий Γ_W. Параллельное перенесение в частичной плоской связности $\Gamma^V_{\mathbf{I}}$ в расслоении $O^V_{\mathbf{I}}(M^{\mathbf{A}}_n)$ определяет $\mathbf{A}$-диффеоморфизм

$$\widetilde{\nu} : p^{-1}(V) \subset E^{\mathbf{I}}(W^{\overline{\mathbf{A}}}_n) \to p^{-1}(U) \subset E^{\mathbf{I}}(W^{\overline{\mathbf{A}}}_n). \tag{12}$$

Определение. Псевдогруппа $\Gamma(\varphi)$ локальных $\mathbf{A}$-диффеоморфизмов многообразия $E^{\mathbf{I}}(W^{\overline{\mathbf{A}}}_n)$, порождаемая $\mathbf{A}$-диффеоморфизмами вида (12), называется псевдогруппой $\mathbf{I}$-голономии многообразия $M^{\mathbf{A}}_n$ для трансверсального морфизма $\varphi : W^{\overline{\mathbf{A}}}_n \to M^{\mathbf{A}}_n$.

Псевдогруппа $\Gamma(\varphi)$ определяет представления $\mathbf{I}$-голономии $\alpha^{\mathbf{I}}_X$ для всех $X \in \varphi(W^{\overline{\mathbf{A}}}_n)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— алгебра Вейля, являющаяся полупрямой суммой* $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \oplus \mathbf{I}$ *подалгебры* $\overline{\mathbf{A}}$ *и идеала* $\mathbf{I}$, $M^{\mathbf{A}}_n$ *—* $\mathbf{A}$*-гладкое многообразие, каноническое* $\mathbf{I}^n$*-слоение* $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ *которого является полным, а* $(i : \overline{\mathbf{A}} \to \mathbf{A}, \varphi : W^{\overline{\mathbf{A}}}_n \to M^{\mathbf{A}}_n)$ *— морфизм в категории* $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}-\mathcal{M}an$*, трансверсальный к слоям слоения* $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ *и такой, что* $\varphi(W^{\overline{\mathbf{A}}}_n)$ *пересекает все слои слоения* $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$*. Тогда* $M^{\mathbf{A}}_n$ $\mathbf{A}$*-диффеоморфно многообразию* $E^{\mathbf{I}}(W^{\overline{\mathbf{A}}}_n)/\Gamma(\varphi)$.

В частности, если $M^{\mathbf{A}}_n$ *— полное* $\mathbf{A}$*-гладкое многообразие, а* $\varphi : W_n \to M^{\mathbf{A}}_n$ *— погружение полной трансверсали для канонического* $\mathring{\mathbf{A}}^n$*-слоения* $\mathring{\mathcal{F}}$*, то* $M^{\mathbf{A}}_n$ $\mathbf{A}$*-диффеоморфно многообразию* $T^{\mathbf{A}}W_n/\Gamma(\varphi)$.

Доказательство. По теореме 1 отображение $\varphi^{\mathbf{I}} = \pi_1 \circ D^{-1}_{\mathbf{I}} \circ \varphi^O : E^{\mathbf{I}}(W^{\overline{\mathbf{A}}}_n) \to M^{\mathbf{A}}_n$ является локальным $\mathbf{A}$-диффеоморфизмом. Поскольку слоями проекции $\pi_1 \circ D^{-1}_{\mathbf{I}} : O^V_{\mathbf{I}}(M^{\mathbf{A}}_n) \to M^{\mathbf{A}}_n$ являются слои поднятого слоения, то $\varphi^{\mathbf{I}} \circ \widetilde{\nu} = \varphi^{\mathbf{I}}$, где отображение $\widetilde{\nu}$ определяется формулой (12). Следовательно, $\mathbf{A}$-гладкое многообразие $E^{\mathbf{I}}(W^{\overline{\mathbf{A}}}_n)/\Gamma(\varphi)$ $\mathbf{A}$-диффеоморфно $M^{\mathbf{A}}_n$. □

Следующие две теоремы обобщают результаты из [20], касающиеся многообразий с интегрируемыми почти касательными структурами.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— алгебра Вейля, являющаяся полупрямой суммой* $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \oplus \mathbf{I}$ *подалгебры* $\overline{\mathbf{A}}$ *и идеала* $\mathbf{I}$*, а* $M^{\mathbf{A}}_n$ *—* $\mathbf{A}$*-гладкое многообразие, каноническое* $\mathbf{I}^n$*-слоение* $\mathcal{F}^{\mathbf{I}}$ *которого является полным, имеет односвязные слои и образовано слоями некоторой субмерсии* $p : M^{\mathbf{A}}_n \to M^{\overline{\mathbf{A}}}_n$*, представляющей собой морфизм в категории* $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}-\mathcal{M}an$*. Тогда многообразие* $M^{\mathbf{A}}_n$ $\mathbf{A}$*-диффеоморфно многообразию* $E^{\mathbf{I}}(M^{\overline{\mathbf{A}}}_n)$.

В частности, если каноническое $\mathring{\mathbf{A}}^n$*-слоение* $\mathring{\mathcal{F}}$ *на полном* $\mathbf{A}$*-гладком многообразии* $M^{\mathbf{A}}_n$ *образовано слоями субмерсии* $p : M^{\mathbf{A}}_n \to M_n$ *с односвязными слоями, то многообразие* $M^{\mathbf{A}}_n$ $\mathbf{A}$*-диффеоморфно расслоению Вейля* $T^{\mathbf{A}}M_n$.

Доказательство. Рассмотрим композиционный ряд Жордана–Гёльдера алгебры $\mathbf{A}$ [28]

$$\mathbf{A} \supset \overset{\circ}{\mathbf{A}} = \mathbf{I}_1 \supset \mathbf{I}_2 \supset \cdots \supset \mathbf{I}_k \supset \cdots \supset \mathbf{I}_m \supset \mathbf{I}_{m+1} = 0,$$

где $\mathbf{I}_k = \mathbf{I}$, а $\mathbf{I}_a/\mathbf{I}_{a+1}$, $a = 1, \ldots, m$, $m = \dim \overset{\circ}{\mathbf{A}}$, — одномерные алгебры с нулевым умножением. Выберем в алгебре $\mathbf{A}$ базис $\{e_0 = 1_\mathbf{A}; e_a\}$, $a = 1, \ldots, m$, такой, что $e_a \in \mathbf{I}_a$, $e_a \notin \mathbf{I}_{a+1}$ и $e_b \in \mathbf{I}_a \cap \overline{\mathbf{A}}$, если $a \leq k-1$. Этот базис определяет отображение $e : \mathbf{A} \ni X \mapsto \{x^0; x^a\} \in \mathbf{R}^{m+1}$, где $X = x^0 + x^a e_a$ — разложение элемента $X \in \mathbf{A}$ по базису $\{e_0; e_a\}$. Отображение e индуцирует отображение $e^n : \mathbf{A}^n \ni X^i \mapsto \{x^{i0}; x^{ia}\} \in \mathbf{R}^{n(m+1)}$, которое позволяет ассоциировать со всякой $\mathbf{A}^n$-картой h на $M_n^\mathbf{A}$ карту $e^n \circ h$.

Рассмотрим $\mathbf{A}^n$-карту $(U, h : U \to U' \subset \mathbf{A}^n)$ на $M_n^\mathbf{A}$ такую, что $e^n(U')$ — открытый координатный параллелепипед в $\mathbf{R}^{n(m+1)}$. Пусть $\overline{U} = p(U) \subset M_n^{\overline{\mathbf{A}}}$, $\overline{U}' = p(U') \subset \overline{\mathbf{A}}^n$, а $L_X^\mathbf{I}$ — слой слоения $\mathcal{F}^\mathbf{I}$, проходящий через $X \in U$. $\mathbf{A}^n$-карта (U, h) может быть распространена вдоль $L_X^\mathbf{I}$ таким образом, что область ее определения будет содержать произвольно выбранную точку $Y \in L_X^\mathbf{I}$. В результате получим $\mathbf{A}$-диффеоморфизм $h : p^{-1}(\overline{U}) \to \overline{U}' \times \mathbf{I}^n$. Следовательно, субмерсия $p : M_n^\mathbf{A} \to M_n^{\overline{\mathbf{A}}}$ определяет локально тривиальное расслоение. Это расслоение допускает гладкое сечение ([29], гл. I, теорема 5.7) $s : M_n^{\overline{\mathbf{A}}} \to M_n^\mathbf{A}$, которое по теореме 1 может быть продолжено до $\mathbf{A}$-диффеоморфизма

$$s^\mathbf{I} = \pi_1 \circ D_\mathbf{I}^{-1} \circ s^O : E^\mathbf{I}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}}) \to M_n^\mathbf{A}. \quad \square \tag{13}$$

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— алгебра Вейля, являющаяся полупрямой суммой* $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}} \oplus \mathbf{I}$ *подалгебры* $\overline{\mathbf{A}}$ *и идеала* $\mathbf{I}$, *а* $M_n^\mathbf{A}$ *—* $\mathbf{A}$*-гладкое многообразие, каноническое* $\mathbf{I}^n$*-слоение* $\mathcal{F}^\mathbf{I}$ *которого полно и образовано слоями субмерсии* $p : M_n^\mathbf{A} \to M_n^{\overline{\mathbf{A}}}$, *представляющей собой морфизм в категории* $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$*–*$\mathcal{M}an$ *и допускающей сечение* $s : M_n^{\overline{\mathbf{A}}} \to M_n^\mathbf{A}$. *Тогда существует* $\mathbf{A}$*-гладкое накрытие* $c : E^\mathbf{I}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}}) \to M_n^\mathbf{A}$. *При этом слой слоения* $\mathcal{F}^\mathbf{I}$ *на* $M_n^\mathbf{A}$ *изоморфен* $\mathbf{I}^n/G$, *где* G *— дискретная подгруппа в* $\overset{\circ}{D}_n(\mathbf{I})$.

В частности, если каноническое $\overset{\circ}{\mathbf{A}}{}^n$*-слоение* $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ *на полном* $\mathbf{A}$*-гладком многообразии* $M_n^\mathbf{A}$ *образовано слоями субмерсии* $p : M_n^\mathbf{A} \to M_n$, *допускающей сечение* $s : M_n \to M_n^\mathbf{A}$, *то существует* $\mathbf{A}$*-гладкое накрытие* $c : T^\mathbf{A} M_n \to M_n^\mathbf{A}$.

Доказательство. Действительно, отображение $s^\mathbf{I} : E^\mathbf{I}(M_n^{\overline{\mathbf{A}}}) \to M_n^\mathbf{A}$, определенное композицией (13), является $\mathbf{A}$-гладким накрытием, т. к. область определения $\mathbf{A}^n$-карты (U, h), рассматривавшейся в доказательстве теоремы 3, правильно накрывается отображением $s^\mathbf{I}$.

Поскольку представление голономии $\alpha^\mathbf{I}_{\mathrm{tr}\,X_0}$ тривиально, из (8) следует, что представление $\widetilde{D}_n(\mathbf{I})$-голономии $\widetilde{\alpha}^\mathbf{I}_{\mathrm{l}\,X_0}$ также тривиально. Следовательно, представление голономии $\alpha^\mathbf{I}_{\mathrm{l}\,X_0}$ слоя $L^\mathbf{I}_{X_0}$, рассматриваемого как $\mathbf{I}^n$-многообразие, имеет вид

$$\alpha^\mathbf{I}_{\mathrm{l}\,X_0} : \Pi_1(L^\mathbf{I}_{X_0}, X_0) \to \overset{\circ}{D}_n(\mathbf{I}) \tag{14}$$

и, следовательно, $L^\mathbf{I}_{X_0} \cong \mathbf{I}^n/G$, где G — образ фундаментальной группы $\Pi_1(L^\mathbf{I}_{X_0}, X_0)$ слоя $L^\mathbf{I}_{X_0}$ при гомоморфизме (14). $\square$

Литература

1. Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1981. – Т. 12. – С. 61–95.
2. Vishnevskii V.V. *Integrable affinor structures and their plural interpretations* // J. of Math. Sci. – 2002. – V. 108. – № 2. – P. 151–187.
3. Шурыгин В.В. *Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй* // УМН. – 1993. – Т. 48. – Вып. 2. – С. 75–106.

4. Shurygin V.V. *Smooth manifolds over local algebras and Weil bundles* // J. Math. Sci. – 2002. – V. 108. – № 2. – P. 249–294.
5. Kobayashi S. *Manifolds over function algebras and mapping spaces* // Tôhoku Math. J. – 1989. – V. 41. – № 2. – P. 263–282.
6. Kriegl A., Michor P.W. *Product preserving functors of infinite dimensional manifolds* // Arch. Math. – 1996. – V. 32. – № 4. – P. 289–306.
7. Vassiliou E., Papatriantafillou M.H. *Connections on* **A***-frame bundles* // Sci. Math. Japon. – 2001. – V. 54. – № 1. – P. 29–38.
8. Weil A. *Théorie des points proches sur les variététes différentiables* // Colloque internat. centre nat. rech. sci. – Strasbourg, 1953. – V. 52. – P. 111–117.
9. Kolář I., Michor P.W., Slovák J. *Natural Operations in Differential Geometry.* – Springer, 1993. – 434 p.
10. Patterson L.-N. *Connexions and prolongations* // Canad. J. Math. – 1975. – V. 27. – № 4. – P. 766–791.
11. Morimoto A. *Prolongation of connections to bundles of infinitely near points* // J. Different. Geom. – 1976. – V. 11. – № 4. – P. 479–498.
12. Султанов А.Я. *Продолжения тензорных полей и связностей на расслоения Вейля* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 81–90.
13. Muñoz J., Rodriguez J., Muriel F.J. *Weil bundles and jet spaces* // Czech. Math. J. – 2000. – V. 550. – № 4. – P. 721–748.
14. Shurygin V.V. *The structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras* // Lobachevskii J. Math. – 1999. – V. 5. – P. 29–55.
15. Thurston W.P. *The Geometry and Topology of 3-manifolds.* – Princeton Univ. Lect. Notes, 1978/1979.
16. Малахальцев М.А. *(X, G)-слоения* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 7. – С. 55–65.
17. Molino P. *Riemannian Foliations.* – Birkhäuser, 1988. – 339 p.
18. Апанасов Б.Н. *Геометрия дискретных групп и многообразий.* – М.: Наука, 1991. – 432 с.
19. Brickell F., Clark R.S. *Integrable almost tangent structures* // J. Different. Geom. – 1974. – V. 9. – № 4. – P. 557–563.
20. Crampin M., Thompson G. *Affine bundles and integrable almost tangent structures* // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1985. – V. 98. – P. 61–71.
21. De Filippo S., Landi G., Marmo G., Vilasi G. *Tensor fields defining a tangent bundle structure* // Ann. Inst. H. Poincaré. – 1989. – V. 50. – № 2. – P. 205–218.
22. Thompson G., Schwardmann U. *Almost tangent and cotangent structures in the large* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 327. – № 1. – P. 313–327.
23. Малахальцев М.А. *Структуры многообразия над алгеброй дуальных чисел на торе* // Тр. геометрич. семин. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – Вып. 22. – С. 47–62.
24. Vanžura J. *On the geometry and topology of manifolds over algebras* // Weiterbildungszentr. Math. Kybern. und Rechentechn. Sect. Math. – 1978. – V. 28. – P. 133–136.
25. Шурыгин В.В. *Расслоения струй как многообразия над алгебрами* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1987. – Т. 19. – С. 3–22.
26. Kamber F.W., Tondeur Ph. *Foliated Bundles and Characteristic Classes* // Lect. Notes Math. – Springer, 1975. – V. 493. – 208 p.
27. Reinhart B.L. *Differential Geometry of Foliations.* – Springer, 1983. – 195 p.
28. Пирс Р. *Ассоциативные алгебры.* – М.: Мир, 1986. – 544 с.
29. Kobayashi S., Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry.* V. 1. – Intersci. Publ., 1963. – 329 p.

Казанский государственный университет

Поступила 21.04.2003