ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 7 (506)

УДК 517.544

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ, И.Г. САЛЕХОВА

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА

1. Введение

Некоторые прикладные задачи гидромеханики и теории упругости сводятся к решению задачи Римана (задачи линейного сопряжения)

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{1}$$

К задаче (1) в случае коэффициента $G(t) = c_0$ приводятся видоизмененная задача Дирихле или смешанная задача для плоскости и полуплоскости ([1], гл. IV, § 91–95). Прикладной интерес представляют эти задачи в случае счетного множества щелей, периодически расположенных в полуплоскости. Это частный случай так называемой квазипериодической краевой задачи Римана, характеризующийся периодичностью коэффициента $G(t)$.

В данной статье предполагаем $L = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} L_k$, где $L_0 = (a_0, 1)$ и $0 < a_0 < 1$, а $L_k = L_0 + k$. Относительно коэффициента задачи считаем $G(t+1) = G(t)$, $G(t) \in H_\gamma(\overline{L}_0)$ (удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $0 < \gamma \le 1$) и $G(t) \neq 0$ $\forall t \in \overline{L}_0$. Кроме того, $g(t) \in H_\lambda(\overline{L})$ и $g(\infty) = 0$. Класс функций, ограниченных и аналитических в области D с границей L, обозначим через B.

2. Исследование однородной задачи в классе B

Пусть $g(t) \equiv 0$. Рассмотрим функцию

$$\gamma_1(z) = \frac{z}{2\pi i}\int_L \ln G(x)[x(x-z)]^{-1}dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \ln G(x)[\Psi(x) - \Psi(x-z)]dx,$$

где $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — пси-функция (логарифмическая производная гамма-функции Эйлера). В дальнейшем будем использовать функцию

$$\gamma(z) = -(2\pi i)^{-1}\int_{L_0} \ln G(x)\Psi(x-z)dx,$$

отличающуюся от $\gamma_1(z)$ лишь на постоянную. В окрестности узлов имеем представление

$$\gamma(z) = \mp\frac{\ln G(c_0)}{2\pi i}\ln[1/\Gamma(c_0 - z)] + \Omega(z).$$

Здесь знак минус выбирается при $c_0 = a_0$, а плюс — при $c_0 = 1$. Функция $\Omega(z)$ голоморфна вне L и непрерывно продолжима на $\overline{L}$. Введем функцию $X(z) = \exp\gamma(z)$. В окрестности узла c_0 справедливо равенство $X(z) = [1/\Gamma(c_0 - z)]^{\alpha_0^\mp + i\beta_0^\mp}\exp\Omega(z)$, где $\alpha_0^\mp + i\beta_0^\mp = \mp\ln G(c_0)/2\pi i$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-0914).

Если концы c_0 неособенные ([1], гл. IV, § 83), то фиксируем ветвь аргумента: $-2\pi < \arg G(a_0) < 0$. Подберем целое число χ_0 так, чтобы $0 < \alpha^+ - \chi_0 < 1$. В качестве канонической функции из класса B (функции, осуществляющей факторизацию задачи (1)) возьмем

$$X_1(z) = X(z)[\Gamma(1-z)]^{\chi_0}. \tag{2}$$

Во всех узлах (и только в них) она имеет нули порядка меньше единицы.

Если узлы a_k особенные, то считаем выполненным равенство $\arg G(a_0) = 0$. В окрестности узла a_k функции $X_1(z)$ и $1/X_1(z)$ ограничены, а в узлах $k+1$ у функции (2) по-прежнему нули порядка меньше единицы. Наконец, если все узлы особенные, то считаем выполненным условие $\chi_0 = \alpha_0^+$. В этом случае функции $X_1(z)$ и $1/X_1(z)$ ограничены в ε-окрестности каждого узла.

Введем $\widetilde{B}$ — класс функций, аналитических в области D и ограниченных в любом круге $|z| < R$. Решение задачи (1) в этом классе запишем в виде

$$\Phi(z) = X(z)P(z), \tag{3}$$

где $P(z)$ — произвольная целая функция. Выясним, когда $\Phi(z)$ принадлежит B. Рассмотрим следующие случаи.

1) $\chi_0 = 0 \;\Rightarrow\; X_1(z) \equiv X(z)$. Интегрируя $\gamma(z)$ по частям при $\arg z \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, получим представление $X(z) = \exp[\mu_1 \Psi(1-z)]\widetilde{X}(z)$, где функции $\widetilde{X}(z)$ и $1/\widetilde{X}(z)$ ограничены в указанном узле, и $\mu_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \ln G(x)dx$.

Хорошо известны (напр., [2], гл. 6, § 6) асимптотические формулы

$$\ln\Gamma(z) = z\ln z - z - \frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O(z^{-1}), \tag{4}$$

$$\Psi(z) = \ln z + (2z)^{-1} + O(z^{-2}), \quad z \to \infty, \quad |\arg z| < \pi - \delta, \quad \delta > 0. \tag{5}$$

Поэтому

$$|X(z)| \sim |z|^{\mu}, \quad z \to \infty, \quad \mu = \operatorname{Re}\mu_1. \tag{6}$$

Пусть теперь $t > 0$. Воспользуемся формулой $\Psi(z) - \Psi(1-z) = -\pi\operatorname{ctg}\pi z$ ([3], с. 761) для исследования асимптотического поведения интеграла $\gamma(t)$, который при $t \in L$ понимается в смысле главного значения по Коши. Получим следующие результаты.

Лемма 1. *Справедливо представление $X^+(t) = A_1(t)A_2(t)$, где $|A_1(t)| \sim t^{\mu}$, $t \to +\infty$, а $A_2(t) = A_2(t+1)$ и $A_2(t) \in C(\overline{L}_0)$, причем эта функция обращается в нуль только в неособенных узлах.*

Теорема 1. *Пусть $\chi_0 = 0$. При $\mu > 0$ однородная задача имеет лишь тривиальное решение, а при $\mu \le 0$ ее общее решение определяется формулой (3), где $P(z)$ — произвольный полином степени $p \le [-\mu]$. Это решение имеет бесконечное множество нулей в $\overline{D}$ лишь при наличии неособенных узлов.*

2) $\chi_0 < 0$. По формуле (4) каноническая функция (2) в области D имеет уточненный порядок $\rho(r) = \frac{\ln(r\ln r)}{\ln r}$. В формуле (3) $P(z) = [\Gamma(1-z)]^{\chi_0}P_1(z)$, где $P_1(z)$ — произвольная целая функция. Следовательно, целая функция $P(z)$ обращается в нуль в точках $1+k$, $k \in N$, т. е. в силу (6) получим $\Phi(z) \notin B$ при $P_1(z) \equiv 0$. Итак, в этом случае нетривиальных решений нет.

3) $\chi_0 > 0$. Для индикатора канонической функции (2) справедлива формула

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|X_1(re^{i\theta})|}{r\ln r} = -\chi_0\cos\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{7}$$

Равенство (7) выполняется равномерно относительно θ вне некоторых окрестностей неособенных узлов. В формуле (7) имеет место точный, а не верхний предел, т. к. $1/\Gamma(1-z)$ — целая функция вполне регулярного роста с простыми нулями в точках $1+k$, $k \in N$. Вместо формулы (3) решение задачи в классе $\widetilde{B}$ удобно записать в виде

$$\Phi(z) = X_1(z)\exp[\chi_0(\pi i - 1)z]P(z), \tag{8}$$

где $P(z) = Az^m \exp(az)\prod\limits_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{z_n}, 1)$ — целая функция уточненного порядка $\rho(r) = \frac{\ln(r\ln r)}{\ln r}$.

Теорема 2. *При* $\mu = -\chi_0/2$ *функция* $\Phi(z)$ *принадлежит* B *тогда и только тогда, когда* а) *сходится ряд* $\sum\limits_n r_n^{-1/2}\lim\frac{\theta_n}{2}$, $z_n = r_n e^{i\theta_n}$; б) *существует неотрицательный конечный предел* $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{4\sqrt{r}}\int\limits_0^r \frac{dt}{t}\int\limits_0^t [\chi_0 x - n(x)]\frac{dx}{x} = \gamma \geq 0$; в) *сходится интеграл* $\int\limits_0^\infty [\chi_0 x - n(x)]\frac{dx}{x^2}$; г) $m\ln t + \sum\limits_n \ln\left|\frac{t-z_n}{t-r_n}\right| + t\int\limits_0^\infty \frac{\chi_0 x - n(x)}{x(x-t)}dx < C$; д) $a = \int\limits_0^\infty (\chi_0 x - n(x))x^{-2}dx + \sum\limits_{n=1}^\infty (1-e^{-i\theta_n})r_n^{-1}$. *Здесь* $n(x)$ — *считающая функция последовательности корней* $\{z_n\}$, *причем* $0 < r_n \to \infty$, $n \to \infty$.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из классических результатов Н.В. Говорова [4] по исследованию задачи Римана с бесконечным индексом. Здесь надо взять тот частный случай рассмотренной им задачи ([4], гл. 5, § 25–27), когда $L = [1, \infty)$ и $\ln G(t) = 2\pi i\chi_0 t$. Тогда каноническая функция Н.В. Говорова $X(z) = \exp[-\chi_0 z\ln(1-z)]$ имеет ту же асимптотику, что и каноническая функция (2) (см. формулы (4) и (5)).

Замечание 1. Существуют ограниченные на каждом луче $\arg z = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$, решения задачи (1), не принадлежащие классу B. Достаточно, например, в формуле (8) вместо функций $P(z)$, описанных в теореме 2, взять функции $P(z) + Q(z)$, где

$$Q(z) = \int_0^\infty t^{-t}e^{zt}dt. \tag{9}$$

Целая функция (9) ограничена на каждом луче [5]. Поэтому ее порядок $\rho = \infty$ в силу принципа Фрагмена–Линделёфа. Итак, существует бесконечное число линейно независимых решений задачи (1), ограниченных на каждом луче, но имеющих в D бесконечный порядок.

Пусть теперь $\mu + \chi_0/2 \neq 0$. Тогда решение задачи (1) в классе B определяется формулой $\Phi(z) = \chi_1(z)\exp\left\{\left[\chi_0(\pi i - 1) + \mu + \frac{\chi_0}{2}\right]z\right\}P(z)$, где функция $P(z)$ удовлетворяет теореме 2 с той лишь разницей, что в условиях б)–д) этой теоремы вместо члена $\chi_0 x$ надо взять $\chi_0 x - \mu - \frac{\chi_0}{2}$.

3. Исследование неоднородной задачи в классе $\widehat{B}$

Пусть $\widehat{B}$ — класс функций, ограниченных вне любых окрестностей особенных узлов и допускающих в них лишь логарифмические особенности (класс так называемых почти ограниченных решений ([1], гл. 4, § 77)). В случае, если все узлы неособенные, имеем $\widehat{B} \equiv B$. В дальнейшем ограничимся исследованием именно этого случая.

Рассмотрим вначале простейший случай $\chi_0 = 0$.

1) $\mu > 0$. Решение задачи (1) в классе $\widehat{B}$ запишется в виде

$$\Phi(z) = X(z)[\omega(z) + P(z)], \tag{10}$$

где $P(z)$ — произвольная целая функция и

$$\omega(z) \equiv \omega(z, g(\tau)) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)}. \tag{11}$$

Ясно, что при решении задачи (1) в классе B надо положить в формуле (10) $P(z) \equiv 0$, т.к. $\lim\limits_{r\to\infty}\omega(re^{i\theta}) = 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$. Пусть B_ε — класс решений задачи (1), ограниченных в любом углу $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. Очевидно, $B \in B_\varepsilon$.

Лемма 2. *При $0 < \mu \le 1$ задача* (1) *в классе B_ε имеет единственное решение*

$$\Phi(z) = X(z)\omega(z). \tag{12}$$

При $\mu > 1$ функция (12) *будет решением в классе B_ε тогда и только тогда, когда выполнены условия разрешимости*

$$\omega(0, \tau^{m+1}g(\tau)) = 0, \quad m = \overline{0, [\mu] - 1}. \tag{13}$$

Доказательство. Очевидно, $\omega(re^{i\theta}) = O(r^{-1})$ при $r \to \infty$ и $\theta \in (0, 2\pi)$. Заметим, что при $\mu > 1$

$$\omega(z, g(\tau)) = z^{-1}\omega(z, \tau g(\tau)) - z^{-1}\omega(0, \tau g(\tau)). \tag{14}$$

Если $\omega(0, \tau g(\tau)) \neq 0$, то асимптотика функции (11) определяется вторым слагаемым в правой части (14), откуда и вытекает неизбежность выполнения условия (13) при $m = 0$. Продолжая при необходимости этот процесс, получим всю совокупность условий (13). $\square$

Замечание 2. При нецелом μ полученное решение из класса B_ε удовлетворяет более сильному условию $\Phi(re^{i\theta}) = O(r^\delta)$ равномерно относительно $\theta \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ при $\delta = \mu - [\mu] - 1$. Если дополнительно предположить, что $\lambda + \mu - [\mu] > 1$ (здесь λ — показатель Гёльдера свободного члена $g(t)$ (см. введение)), то можно потребовать, чтобы условие (13) выполнялось и при $m = [\mu]$. В таком случае при $r \to \infty$ имеем $\delta = \mu - [\mu] - 2$.

Замечание 3. Вместо формулы (11) можно использовать равенство

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{L_0}\frac{g(\tau + k)}{\chi^+(\tau + k)}(\tau + k - z)^{-1}d\tau, \quad z \in D.$$

Ряд (11) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в D, т. к. для общего члена b_k справедливо соотношение $b_k = O(k^{-1-\lambda-\mu})$.

Теорема 3. *Если $0 < \mu \le 1$, то функция* (12) *принадлежит классу B. Это же справедливо и при $\mu > 1$, если только выполнены условия разрешимости* (13).

Доказательство вытекает из общих свойств интеграла типа Коши с гёльдеровской плотностью.

2) $\mu = 0$. Решение определяется формулой (10) при $P(z) \equiv \mathrm{const}$.

3) $\mu < 0$. Общее решение в классе B имеет вид $\Phi(z) = X(z)[z^{-[\mu]}\omega(z, \tau^{[\mu]}g(\tau)) + P(z)]$, где $P(z)$ — полином с произвольными коэффициентами степени $p \le [-\mu]$.

Теперь перейдем к исследованию более сложного случая $\chi_0 < 0$. Выберем число $\varepsilon \in (0, a_0)$ и введем новую каноническую функцию

$$X_2(z) = X(z)[\Gamma(1 - z)/\Gamma(1 + \varepsilon + m - z)]^{\chi_0}, \tag{15}$$

где число m натуральное. Это мероморфная в D функция, удовлетворяющая на L краевому условию (1) при $g(t) \equiv 0$. У нее полюсы $1 + \varepsilon + m + k \notin L$, $k \in N$, имеют порядок $-\chi_0$, а в неособенных узлах у нее будут нули порядка меньше единицы. Справедлива асимптотическая формула $|X_2(re^{i\theta})| \sim d_1(\varepsilon)r^h$, $r \to \infty$, где $d_1(\varepsilon) < 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $h = \mu - \chi_0(\varepsilon + m)$. Кроме того, для граничного значения $X_2^+(t)$ справедлив аналог леммы 1 с заменой μ на h.

Выберем натуральное число m так, чтобы величина h приняла наименьшее неотрицательное значение h_0. Это значение m обозначим через m_0. Возможны два случая.

1) $h_0 = 0$. Тогда существует такая последовательность окружностей $|z| = \widehat{r}_n$, $\widehat{r}_n \to \infty$, что функция (15) на них равномерно ограничена сверху и снизу:

$$\max_{|z|=\hat{z}_n}\{|X_2(z)| + |X_2(z)|^{-1}\} < c_1.$$

Действительно, достаточно положить $\widehat{r}_n = 1 + \varepsilon_1 + n$, где $\varepsilon_1 \in (\varepsilon, a_0)$. Решение задачи в классе B запишется в виде

$$\Phi(z) = X_2(z)[\omega_2(z) + P(z)], \tag{16}$$

где $\omega_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(\tau)}{\chi_2^+(\tau)}(\tau - z)^{-1}d\tau$. Поскольку $|P(z)|$ ограничен на последовательности окружностей $|z| = \widehat{r}_n$, то $P(z) \equiv \mathrm{const}$. Остается заметить, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega_2(t) = 0 \ \Rightarrow\ \mathrm{const} = 0$.

Теорема 4. *Функция* (16) *в случае* $h_0 = 0$, *где* $\varepsilon \in (0, a_0)$, *принадлежит классу* B *тогда и только тогда, когда* $\omega_2(1 + \varepsilon + m_0 + k) = 0\ \forall k \in N$.

2) $h_0 > 0\ \forall\varepsilon \in (0, a_0)$. Введем каноническую функцию $X_3(z) = X_2(z)/z^{[h_0]}$. Теперь можно (с заменой $X_2(z)$ на $X_3(z)$) провести все рассуждения п. 1). Очевидно, целая функция $P(z)$, допускающая оценку $|P(r_n e^{i\theta_n})| \le d_2 r_n^{-q}$, где $d_2 > 0$ и $-1 < q \le 0$, может быть только постоянной (если h_0 нецелое, то $P(z) \equiv 0$). Теорема 4 остается справедливой при условии, что к ранее сформулированным условиям разрешимости добавлены дополнительные: $\omega_2^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{0, [h_0] - 1}$.

Теперь осталось рассмотреть последний случай $\chi_0 > 0$. В силу § 1 достаточно построить любое частное решение задачи (1). По-прежнему будем использовать каноническую функцию (15), считая натуральным число $(-m)$. Обозначим через m_0 такое наименьшее по модулю m, что $h_0 \ge 0$, $\varepsilon \in (0, a_0)$. Если $h_0 = 0$, то этим частным решением будет функция (16) при $P(z) \equiv 0$. При $h_0 > 0$ используем ранее введенную функцию $X_3(z)$ и запишем это частное решение в виде

$$\Phi(z) = X_3(z)\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)d\tau}{X_3^+(\tau)(\tau - z)} + \sum_{j=1}^{[h_0]} \frac{\theta_j}{z + 1 + \varepsilon + j + m_0}\Big]. \tag{17}$$

За счет подбора произвольных коэффициентов θ_j в конечной сумме всегда можно добиться выполнения условий разрешимости $T^{(n)}(0) = 0$, $n = \overline{0, [h_0] - 1}$, где $T(z)$ — выражение в квадратных скобках в правой части формулы (17). Итак, при $\chi_0 > 0$ существует бесконечное множество решений задачи (1) из класса B.

Литература

1. Мусхелишвили И.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1962. – 599 с.
2. Евграфов М.А. *Аналитические функции.* – М.: Наука, 1968. – 471 с.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Дополнительные главы.* – М.: Наука, 1986. – 800 с.
4. Говоров Н.В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* – М.: Наука, 1986. – 239 с.
5. Newman D.I. *An entire function bounded in every direction* // Amer. Math. Monthly. – 1976. – V. 83. – № 3. – P. 192–193.

Казанская государственная
сельскохозяйственная академия

Казанский государственный
университет

Поступила
27.05.2002