ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 519.63

Е.М. ФЕДОТОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Построение и исследование разностных схем для нестационарных уравнений математической физики представляет значительный практический и теоретический интерес. Одним из наиболее интересных и важных аспектов теории разностных схем является исследование их корректности. Общая теория корректности операторно-разностных схем, построенная в [1]–[4], позволяет в линейном случае свести исследование конкретных разностных схем к проверке свойств входящих в них сеточных операторов. Теория разностных схем для нелинейных задач развита слабее. Отметим здесь работы [5]–[12], в которых формулируются достаточно общие условия на разностные операторы, обеспечивающие разрешимость и устойчивость некоторых классов разностных уравнений. Отметим также работы [13]–[17], в которых получены оценки точности некоторых видов разностных схем для задач одно- и двумерной газодинамики. В настоящей работе, используя результаты о корректности системы двухслойных операторно-разностных схем (см. [12]), мы исследуем сходимость сеточной схемы для трехмерной лагранжевой системы уравнений динамики вязкой сжимаемой жидкости в переменных удельный объем-скорость-энтропия при общих предположения относительно уравнений состояния.

Рассмотрим задачу о течении вязкой жидкости, занимающей начальный объем $\overline{\Omega} = \{0 < \overline{x}_i < 1,\ i = \overline{1,m}\}$, $m = 2, 3$, с границей Γ. Течение жидкости описывается системой уравнений

$$\rho_0 \frac{d\eta}{dt} - |J| \nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} + |J|(\nabla p - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \vec{v} - \mu \Delta \vec{v}) = \rho_0 \vec{f}, \tag{2}$$

$$\rho_0 T \frac{ds}{dt} = |J|((\lambda + \mu)(\operatorname{div} \vec{v})^2 + \mu \nabla v_i \cdot \nabla v_i), \tag{3}$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}, \quad t > 0, \tag{4}$$

где η, $\vec{v}$, s — удельный объем, скорость, удельная энтропия соответственно, λ и μ — коэффициенты Ляме, $|J| = \det(J)$, $J \equiv J(\vec{x}) = (\partial x_i / \partial \overline{x}_j)_{i,j=1}^m$ — матрица Якоби перехода от отсчетной декартовой (лагранжевой) системы координат $\vec{\overline{x}}$ к эйлеровой, $p = -\partial\varepsilon/\partial\eta$ — давление, $T = \partial\varepsilon/\partial s$ — температура, $\varepsilon = \varepsilon(\eta, s)$ — термодинамический потенциал.

Граничные и начальные условия для уравнений (1)–(4) запишем в виде

$$\begin{gathered} \vec{v} = 0, \quad \overline{x} \in \Gamma, \\ (\eta, \vec{v}, s) = (\eta_0, \vec{v}_0, s_0), \quad \vec{x} = \vec{x}_0 \equiv \vec{\overline{x}}, \quad t = 0, \quad \overline{x} \in \Omega. \end{gathered} \tag{5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00400).

Будем полагать, что термодинамический потенциал $\varepsilon(y,z)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, и при $1/\mu_0 \geq y \geq \mu_0 > 0$, $1/\mu_0 \geq z \geq \mu_0 > 0$ выполнены условия

$$\begin{gathered} p'_\eta(y,z) < c_0 < 0, \quad T'_s(y,z) > c_0 > 0, \\ \left(\varepsilon''_{\eta\eta}\varepsilon''_{ss} - 2(\varepsilon''_{\eta s})^2\right)(y,z) > c_0 > 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Будем также предполагать существование достаточно гладкого решения $(\eta, \vec{v}, s)$ задачи (1)–(5) при $t \in [0, t^*]$ такого, что

$$1/\mu_0 > \eta, s > \mu_0 > 0 \quad \text{и} \quad |J(x)| > c_0 > 0. \tag{7}$$

Аппроксимируем уравнения (1)–(5), используя при этом конечноэлементный подход. Разобьем регулярным образом область Ω на равные прямоугольные при $m = 2$ или кубические при $m = 3$ ячейки δ_s со сторонами h так, чтобы они имели общими либо вершины, либо ребра, грани, либо вовсе не имели пересечений. Множество вершин ячеек $(\{x_{kl}\}_{k,l=0}^N)$ обозначим через $\overline{\omega}_h$. На каждой ячейке разбиения δ_s определим локальную нумерацию вершин $b_k^{(s)}$, $k = \overline{1,\, 2^m}$.

Пространство непрерывных в Ω и полилинейных на ячейках δ_s функций обозначим через V, через $\overset{\circ}{V}$ будем обозначать подпространство функций из V, равных нулю на Γ, а через V_* — пространство функций кусочно-постоянных на ячейках δ_s. Ясно, что функции из V однозначно определяются своими значениями в точках сетки $\overline{\omega}_h$, а функции из V_* — своими значениями в центрах ячеек, множество которых обозначим ω_h^*.

Пусть $H_1 = V_* \otimes \overset{\circ}{V}{}^m \otimes V_*$, $\overset{\circ}{H}_1 = V_* \otimes \overset{\circ}{V}{}^m \otimes V_*$, $H_2 = V^m$, $\overset{\circ}{H}_2 = \overset{\circ}{V}{}^m$, $H = H_1 \otimes H_2$. Определим билинейную форму

$$\langle y, \eta \rangle_h = (h/2)^m \sum_{\{\delta_s\}} \sum_{k=1}^{2^m} (y\eta)(b_k^{(s)}),$$

являющуюся составной кубатурной формулой трапеций для вычисления интегралов вида $\int\limits_\Omega u(x)z(x)\,dx$. При этом в качестве значений функций y, η в точках $b_k^{(s)}$ будем понимать соответствующие пределы со стороны ячеек δ_s.

Положим $\rho_0 = 1$. Всюду по повторяющимся индексам, если не указано противное, будем предполагать суммирование от 1 до m. Малыми буквами с индексами p, T будем обозначать элементы пространства V_*, с индексами x — элементы пространства V и с индексами v — элементы пространства $\overset{\circ}{V}{}^m$. Большими буквами в позициях аргументов при определении сеточных операторов и их свойств будем обозначать элементы пространства H_1: $Y = (y_p, \vec{y}_v, y_T)$. Знаком ∂_j всюду будем обозначать частную производную $\partial/\partial \overline{x}_j$.

Введем в рассмотрение скалярные произведения и нормы в V и V_*, H_1, H_2

$$(y,w) = \langle y, w\rangle_h, \quad (y,w)_1 = \left[\langle y,w\rangle_h + \sum_{i=1}^m \langle y_{vi}, w_{vi}\rangle_h + \langle y_T, w_T\rangle_h\right],$$

$$(\overline{y}_x, \overline{w}_x)_2 = \sum_{i=1}^m \langle y_{xi}, w_{xi}\rangle_h, \quad \|y\| = (y,y)^{1/2},$$

$$\|Y\|_1 = (Y,Y)_1^{1/2}, \quad \|Y\|^2_{(+)} = \|Y\|_1^2 + \sum_{\alpha,\beta} (\partial_\alpha y_{v\beta}, \partial_\alpha y_{v\beta}),$$

$$\|y_x\|_2^2 = \sum_j \left[(y_{xj}, y_{xj})_1 + \sum_i (\partial_i y_{xj}, \partial_i y_{xj})\right].$$

Определим оператор A равенством

$$\begin{gathered}
(A(y_x,Y),W)_1 = -\left(\widetilde{\partial}_i y_{v,i}, w_p\right) + \left(\widetilde{\partial}_i w_{v,i}, y_p\right) + \\
+\left((\lambda+\mu)|J(y_x)|^{-1}\widetilde{\partial}_i y_{v,i}, \widetilde{\partial}_j w_{v,j}\right) + \left(\mu|J(y_x)|^{-1}\widetilde{\partial}_i y_{v,j}, \widetilde{\partial}_i w_{v,j}\right) - \\
-\left((y_T|J(y_x)|)^{-1}\left((\lambda+\mu)\,\widetilde{\partial}_i y_{v,i}\widetilde{\partial}_j y_{v,j} + \mu\widetilde{\partial}_i y_{v,j}\widetilde{\partial}_i y_{v,j}\right), w_T\right), \\
W \in \overset{\circ}{H}_1, Y = (y_p, \vec{y}_v, y_T) \in H_1, \vec{y}_x \in H_2.
\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $J(y_x) = (\partial_j y_{x,i})_{i,j=1}^m$, $|J(y_x)| = \det J(y_x)$, $\widetilde{\partial}_\alpha \cdot = M_{\alpha,k}\partial_k \cdot$, $M_{\alpha,k} \equiv M_{\alpha,k}(y_x) = |J(y_x)| j_{\alpha,k}(y_x)$, $j_{\alpha,k}(y_x)$ — компоненты матрицы обратной к $J(y_x)$. Оператор P определим выражением $P(y_x,Y) = y_v$, а оператор D — равенством

$$DY = (-p(y_p,y_T), \vec{y}_v, T(y_p,y_T)), \quad Y \in H_1. \tag{9}$$

На отрезке $[0,t^*]$ построим сетку $\overline{\omega}_\tau = \{0,\tau,2\tau,\dots,t^*\}$ и введем в рассмотрение пространство $X = X_{\tau,h} = \{(v(t),\chi(t)) \in H,\ t \in \overline{\omega}_\tau\}$ вектор-функций, определенных на $\overline{\omega}_\tau$, со значениями в пространстве H. Под приближенным решением $((\eta_h,\vec{v}_h,s_h),\ \vec{x}_h)$ задачи (1)–(4) будем понимать решение разностной схемы вида

$$\begin{cases}
y_t + A\left(\chi^{(\sigma)}, \widetilde{D}(y,\widehat{y})\right) = \varphi(t), \\
\chi_t = P\left(\chi^{(\sigma)}, \widetilde{D}(y,\widehat{y})\right), \quad t \in \omega_\tau = \overline{\omega}_\tau \setminus \{t^*\}, \\
y(0) = y_0, \quad \chi(0) = x_0,
\end{cases} \tag{10}$$

где $\sigma \in [0,1]$ – числовой параметр, вес слоя, $v^{(\sigma)} = \sigma\widehat{v} + (1-\sigma)v$, $\widetilde{D}(y,v) = \int_0^1 D(\sigma v + (1-\sigma)y)d\sigma$, $(y,\chi) \in X$, $(y_0,x_0) \in H$, $y_0 = (\eta_0,\vec{v}_0,s_0)$, $\vec{x}_0 = \vec{\overline{x}}$.

Исследуем разрешимость и сходимость разностной схемы (10). Для этого воспользуемся результатами из [12], касающимися исследования (u,δ)-корректности операторно-разностных схем (ОРС) вида (10) в смысле данного там определения.

Определение ([12]). ОРС (10) назовем (u,δ)-корректной, если существуют $\delta_i = \delta_i(\tau,h) > 0$, $i = 1,2$, и нормы $\|\cdot\|_{(j)}$, $j = 1,2$, такие, что при выполнении неравенств $\|y_0 - u(0)\|_{(1)} \le \delta_1$, $\|\Psi\|_{(2)} \le \delta_2$ ОРС (10) имеет решение $y : \|y(t) - u(t)\|_{(1)} \le \delta$, и имеет место оценка (неравенство корректности)

$$\|y(t) - u(t)\|_{(1)} \le J(\Psi(u)) \equiv M_1\|y_0 - u(0)\|_{(1)} + M_2\|\Psi\|_{(2)} \le \delta$$

с постоянными M_1, M_2, не зависящими от τ, h, $\Psi(u)(\widehat{t}) = \varphi(\widehat{t}) - A\left(u_x^{(\sigma)}, \widetilde{D}(u,\widehat{u})\right) - u_t$, $t \in \omega_\tau$, $\Psi(u)(0) = 0$.

Здесь через u обозначен элемент из X_1 ($X_\alpha = \{v(t) \in H_\alpha,\ t \in \overline{\omega}_\tau\}$), совпадающий при каждом $t \in \overline{\omega}_\tau$, $\overline{x} \in \overline{\omega}_h$ со значениями решения $(\eta,\vec{v},s)$, и элемент $u_x \in X_2$ определяется (ср. с [12]) как решение задачи

$$u_{xt} = P\left(u_x^{(\sigma)}, \widetilde{D}(u,\widehat{u})\right), \quad t \in \omega_\tau, \quad u_x(0) = x_0. \tag{11}$$

Положим $\delta = \overline{c}h^\theta/2^m$, $2 > \theta > m/2$ и определим окрестности в H и X так: $O_\delta(v,\chi) = O_{1,\delta}(v) \otimes O_{2,\delta}(\chi)$, $O_{\alpha,\delta}(v) = \{z \in H_\alpha : \|z - v\|_\alpha < \delta\}$, $U_\delta(v,\chi) = U_{1,\delta}(v) \otimes U_{2,\delta}(\chi)$, $U_{\alpha,\delta}(v) = \{z(t) \in O_{\alpha,\delta}(v(t)),\ t \in \overline{\omega}_\tau\}$.

Ясно, что из включения $(Y, y_x) \in O_\delta(u(t), u_x(t))$ следует выполнение в соответствующих точках сеток неравенств

$$\max\{|y_p - \eta|,\ |y_{vi} - v_i|,\ |y_T - s|\} \le \overline{c} h^{\theta - m/2}, \tag{12}$$

$$|y_{xi} - u_{xi}| \le \overline{c} h^{\theta} \ln^{1/2} h^{-1}, \quad |\partial_j y_{xi} - \partial_j u_{xi}| \le \overline{c} h^{\theta - m/2}. \tag{13}$$

Элемент u_x, определяемый соотношением (11), очевидно, равен

$$u_x(t) = x(0) + \sum_{t'=0}^{t-\tau} \tau v^{(1/2)}(t') = x(t) + O(\tau^2).$$

Отсюда, из (7) и (13), а также (6) и (12) следует, что найдется такое достаточно малое число h_0, что при любых $h \le h_0$, $\tau \le c h^{\theta/2}$ для $(Y, y_x) \in O_\delta(u(x), x(t))$ (E — единичная матрица)

$$\begin{gathered} p'_\eta(y_p, y_T) \le c_0 < 0, \quad T'_s(y_p, y_T) \ge c_0 > 0, \\ \left(\varepsilon''_{\eta\eta}\varepsilon''_{ss} - 2(\varepsilon''_{\eta s})^2\right)(y_p, y_T) \ge c_0 > 0, \end{gathered} \tag{14}$$

$$|J(y_x)| \ge c_0 > 0, \quad \nu_0 E \le \left(J(y_x)\right)^T J(y_x) \le \nu_1 E, \ \ \nu_1 \ge \nu_0 > 0. \tag{15}$$

Теорема ([12]). *Пусть при $\tau \le \tau_0$, $h \le h_0$ операторы D, A и P удовлетворяют условиям*

а) *оператор D дважды непрерывно дифференцируем по Фреше в $O_{1,\delta}\left(u^{(\xi)}(t)\right)$ $\forall \xi \in [0,1]$, потенциален и при любых v, $v_i \in O_{1,\delta}\left(u^{(\xi)}(t)\right)$, $i = 1, 2$, $v_j \in H_1$, $j = 3, 4$, выполнены неравенства*

$$(Dv_1 - Dv_2, v_1 - v_2)_1 \ge d_1 \|\ v_1 - v_2\ \|_1^2, \quad d_1 > 0, \tag{16}$$

$$|(D^{(1)}(v) v_3, v_4)_1| \le d_2 \|v_3\|_1\, \|v_4\|_1, \quad d_2 > 0, \tag{17}$$

$$|Dv_1 - Dv_2|^2 \le d_3 \|\ v_1 - v_2\ \|_1^2, \quad d_3 > 0,$$

$$|(D^{(2)}(v) u_t v_3, v_4)_1| \le d_4 \|v_3\|_1\, \|v_4\|_1, \quad d_4 > 0, \tag{18}$$

б) *оператор A является непрерывным в $\bigcup\limits_{\xi \in [0,1]} DO_{1,\delta}(u^{(\xi)}) \otimes DO_{2,\delta}(u_x^{(\sigma)})$, и при $\widehat{U} = \widetilde{D}(u, \widehat{u})$, $t \in \omega_\tau$, $U(0) = \widetilde{D}(u(0), u(0))$, и любых v, $v_2 \in O_{2,\delta}(u_x^{(\sigma)})$, $v_1 : |v_1 - U| \le \sqrt{d_3}\delta$, $v_3 \in H_1$ выполнены неравенства*

$$d_6 \left(A(v, v_1) - A(v, U), v_1 - U\right)_1 + d_5 |v_1 - U|^2 \ge \|\ v_1 - U\ \|_{(+)}^2, \tag{19}$$

$$\left|\left(A(v, U) - A(v_2, U), v_3\right)_1\right| \le d_7 \|v_3\|_{(+)}\, \|v - v_2\|_2, \quad d_5 \ge 0, \ \ d_6 > 0, \ \ d_7 \ge 0; \tag{20}$$

в) *оператор P при $v, v_1 \in O_{2,\delta}(u_x^{(\sigma)})$, $v_2, v_3 \in DO_{1,\delta}(u^{(\xi)})$ удовлетворяет неравенствам*

$$\begin{gathered} \|P(v_1, v_2) - P(v, v_2)\|_2 \le d_8 \|v_1 - v\|_2, \\ \|P(v_1, v_2) - P(v_1, v_3)\|_2 \le d_8 \|v_2 - v_3\|_{(+)}, \quad d_8 \ge 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Тогда ОРС (10) (u, δ)-корректна, причем неравенство корректности имеет вид

$$\max_{t \in \overline{\omega}_\tau} \|y(t) - u(t)\|_1 + \max_{t \in \overline{\omega}_\tau} \|\chi(t) - u_x(t)\|_2 \le J\left(\Psi(u)\right),$$

$$J\left(\Psi(u)\right) \equiv \left\{ M \left[\sum_{t \in \omega_\tau} \tau \|\Psi(u)(\widehat{t}\,)\|_{(-)}^2 + \|y(0) - u(0)\|_1^2 \right] \right\}^{1/2},$$

где постоянная M зависит лишь от d_α, $\alpha = \overline{1,8}$, τ_0, h_0 и t^*, а $\|\psi\|_{(-)} = \sup\limits_{z \ne 0} |(z, \psi)_1| / \|z\|_{(+)}$.

Покажем, что условия теоремы выполнены. Из определения оператора D (9), гладкости функции ε и (14) следует справедливость неравенства (16) с постоянной $d_1 = c_0/2$ и неравенств (17), (18) (при этом норму $|\cdot|$ полагаем равной $\|\cdot\|_1$) с постоянными d_2, d_3, d_4, зависящими лишь от μ_0, производных от потенциала ε и максимума производных $\partial\eta/\partial t$, $\partial s/\partial t$. Неравенства (21), очевидно, выполнены при $d_8 = 1$.

Проверим справедливость неравенств (19) и (20). Положим $Z = Y - U$, $|Y - U| \leq \sqrt{d_3}\delta$ и рассмотрим выражение

$$(A(y_x, Y) - A(y_x, U), Y - U)_1 = \Big((\lambda+\mu)|J(y_x)|^{-1}\widetilde{\partial}_i z_{v,i}, \widetilde{\partial}_j z_{v,j}\Big) + \\ + \Big(\mu|J(y_x)|^{-1}\widetilde{\partial}_i z_{v,j}, \widetilde{\partial}_i z_{v,j}\Big) - \Big(|J(y_x)|^{-1}(y_T^{-1}((\lambda+\mu)\widetilde{\partial}_i y_{v,i}\widetilde{\partial}_j y_{v,j} + \mu\widetilde{\partial}_i y_{v,j}\widetilde{\partial}_i y_{v,j}) - \\ - u_T^{-1}((\lambda+\mu)\widetilde{\partial}_i u_{v,i}\widetilde{\partial}_j u_{v,j} + \mu\widetilde{\partial}_i u_{v,j}\widetilde{\partial}_i u_{v,j})), z_T\Big). \quad (22)$$

Оценим слагаемые в правой части (22). Для удобства ссылок обозначим их римскими цифрами с индексами I^{22}–III^{22}. Первое из слагаемых неотрицательно. Вводя обозначение $a(y_x, z_v) = \Big(|J(y_x)|^{-1}\widetilde{\partial}_i z_{v,j}, \widetilde{\partial}_i z_{v,j}\Big)$, второе запишем в виде

$$\mathrm{II}^{22} = \mu a(y_x, z_v).$$

Оценим третье слагаемое в (22) сверху. Преобразуем его прежде к виду

$$\mathrm{III}^{22} = \Big((|J(y_x)|y_T)^{-1}\left((\lambda+\mu)\,\widetilde{\partial}_i y_{v,i}\widetilde{\partial}_j z_{v,j} + \mu\widetilde{\partial}_i y_{v,j}\widetilde{\partial}_i z_{v,j}\right), z_T\Big) + \\ + \Big((|J(y_x)|y_T)^{-1}\left((\lambda+\mu)\,\widetilde{\partial}_i z_{v,i}\widetilde{\partial}_j u_{v,j} + \mu\widetilde{\partial}_i z_{v,j}\widetilde{\partial}_i u_{v,j}\right), z_T\Big) + \\ + \Big(z_T(|J(y_x)|y_T u_T)^{-1}\left((\lambda+\mu)\,\widetilde{\partial}_i u_{v,i}\widetilde{\partial}_j u_{v,j} + \mu\widetilde{\partial}_i u_{v,j}\widetilde{\partial}_i u_{v,j}\right), z_T\Big). \quad (23)$$

В таком представлении III^{22} оценим модуль каждого слагаемого (III_1^{22}–III_3^{22}).

Первое слагаемое в (23) мажорируем выражением

$$|\mathrm{III}_1^{22}| \leq 2m \max\left|\frac{\lambda+\mu}{y_T}\right| \max\left|\frac{\widetilde{\partial}_i y_{v,i}}{|J(y_x)|^{1/2}}\right| \Big(|J(y_x)|^{-1}\widetilde{\partial}_i z_{v,j}, \widetilde{\partial}_i z_{v,j}\Big)^{1/2} (z_T, z_T)^{1/2}.$$

В силу (12) при достаточно малом h_0 сомножитель $(\lambda+\mu)/y_T$ ограничен. Сомножитель же $\max\left|\widetilde{\partial}_i y_{v,i}/|J(y_x)|^{1/2}\right|$ допускает оценку сверху величиной $\left|\widetilde{\partial}_i u_{v,i}/|J(y_x)|^{1/2}\right| + \max\left|\widetilde{\partial}_i z_{v,i}/|J(y_x)|^{1/2}\right|$, в которой первое слагаемое ограничено в силу (13), (15) и гладкости функций $u_{v,i}$, а второе слагаемое может быть оценено сверху величиной $2^m h^{-m/2} a(y_x, z_v)^{1/2}$. Следовательно,

$$|\mathrm{III}_1^{22}| \leq K_1 a(y_x, z_v)^{1/2} (z_T, z_T)^{1/2} + K_2\left(h^{-m/2}(z_T, z_T)^{1/2}\right) a(y_x, z_v),$$

где постоянные K_1, K_2 зависят лишь от h_0 и исходных данных задачи. Слагаемые III_2^{22} и III_3^{22} оцениваются аналогично. Подставляя их оценки в (23), пользуясь затем неравенством Коши с ε и учитывая малость величины $h^{-m/2}(z_T, z_T)^{1/2}$, получим

$$|\mathrm{III}^{22}| \leq \mu\varepsilon a(y_x, z_v) + \overline{c}_1(\varepsilon^{-1})\|z_T\|^2, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Подставив оценки для I^{22}–III^{22} в (22) и заметив, что в силу (15) верно неравенство

$$a(y_x, z_v) \geq c_0/\nu_1\,(\partial_i z_{v,j}, \partial_i z_{v,j}),$$

придем к (19) с постоянными d_5, d_6, зависящими лишь от h_0 и исходных данных задачи.

Проверим справедливость неравенства (20). Для этого при $y_x, v_x \in O_{2,\delta}(u_x^{(\sigma)})$, $w \in H_1$ рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
|(A(y_x,U) - A(v_x,U),W)_1| = &-\left(\left(\widetilde{\partial}_i - \overline{\partial}_i\right) u_{v,i}, w_p\right) + \left(\left(\widetilde{\partial}_i - \overline{\partial}_i\right) w_{v,i}, u_p\right) + \\
&+ \left[\left((\lambda+\mu)|J(y_x)|^{-1}\widetilde{\partial}_i u_{v,i}, \widetilde{\partial}_j w_{v,j}\right) - \left((\lambda+\mu)|J(v_x)|^{-1}\overline{\partial}_i u_{v,i}, \overline{\partial}_j w_{v,j}\right)\right] + \\
&+ \left[\left(\mu|J(y_x)|^{-1}\widetilde{\partial}_i y_{v,j}, \widetilde{\partial}_i w_{v,j}\right) - \left(\mu|J(v_x)|^{-1}\overline{\partial}_i u_{v,j}, \overline{\partial}_i w_{v,j}\right)\right] - \\
&- \left[\left((u_T|J(y_x)|)^{-1}\left((\lambda+\mu)\,\widetilde{\partial}_i u_{v,i}\widetilde{\partial}_j u_{v,j} + \mu\widetilde{\partial}_i u_{v,j}\widetilde{\partial}_i u_{v,j}\right), w_T\right) - \right. \\
&\left. - \left((u_T|J(v_x)|)^{-1}\left((\lambda+\mu)\,\overline{\partial}_i u_{v,i}\overline{\partial}_j u_{v,j} + \mu\overline{\partial}_i u_{v,j}\overline{\partial}_i u_{v,j}\right), w_T\right)\right]. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Здесь $\overline{\partial}_\alpha \cdot = M_{\alpha,k}(v_x)\partial_k \cdot$, $M_{\alpha,k}(v_x) = |J(v_x)| j_{\alpha,k}(v_x)$, $j_{\alpha,k}(v_x)$ — компоненты матрицы, обратной к $J(v_x)$.

Оценим первое слагаемое в (24). Заметим, что $(\widetilde{\partial}_\alpha - \overline{\partial}_\alpha)\cdot = (M_{\alpha,k}(y_x) - M_{\alpha,k}(v_x))\partial_k \cdot$. Входящие сюда выражения $M_{\alpha,k}(\cdot)$ с точностью до знака совпадают с дополнительными минорами матрицы $J(\cdot)$ к элементам с индексами (k,α), т. е. равны $\partial_k \cdot_\alpha$ в случае $m=2$ и представляют собой линейные комбинации произведений вида $\partial_{l_1} \cdot_{n_1} \partial_{l_2} \cdot_{n_2}$, $l_1, l_2 \neq k$ и $n_1, n_2 \neq \alpha$ при $m=3$. Следовательно, в силу (13) их разности представляют собой линейные комбинации производных $\partial_l (y_{x,n} - v_{x,n})$ с ограниченными сомножителями. Учитывая это, а также гладкость U, для первого слагаемого нетрудно получить оценку

$$\left|\left(\left(\widetilde{\partial}_i - \overline{\partial}_i\right) u_{v,i}, w_p\right)\right| \leq \overline{c}_2 \|w_p\|_{(+)} \|y_x - v_x\|_2, \quad \overline{c}_2 \geq 0.$$

Второе слагаемое оценивается аналогичным образом. Для оценки третьего слагаемого в (24) преобразуем его к виду

$$\begin{aligned}
&\left((\lambda+\mu)\left(|J(v_x)| - |J(y_x)|\right)\left(|J(v_x)||J(y_x)|\right)^{-1}\widetilde{\partial}_i u_{v,i}, \widetilde{\partial}_j w_{v,j}\right) + \\
&\quad + \left((\lambda+\mu)|J(v_x)|^{-1}\left(\widetilde{\partial}_i - \overline{\partial}_i\right) u_{v,i}, \overline{\partial}_j w_{v,j}\right) + \left((\lambda+\mu)|J(v_x)|^{-1}\widetilde{\partial}_i u_{v,i}, \left(\widetilde{\partial}_j - \overline{\partial}_j\right) w_{v,j}\right).
\end{aligned}$$

Вновь воспользуемся (13), (14), гладкостью U и неравенством Коши-Буняковского. Будем иметь

$$\begin{aligned}
&\left|\left((\lambda+\mu)|J(y_x)|^{-1}\widetilde{\partial}_i u_{v,i}, \widetilde{\partial}_j w_{v,j}\right) - \left((\lambda+\mu)|J(v_x)|^{-1}\overline{\partial}_i u_{v,i}, \overline{\partial}_j w_{v,j}\right)\right| \leq \\
&\qquad \leq \overline{c}_3 \|w\|_{(+)} \|y_x - v_x\|_2, \quad \overline{c}_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Оставшиеся в (24) слагаемые оцениваются аналогичным образом. Суммируя полученные для слагаемых оценки, приходим к (20).

Таким образом, условия теоремы выполнены, и (u,δ)-корректность разностной схемы (10) установлена. Используя традиционный для теории разностных схем прием исследования погрешности аппроксимации, основанный на поточечном разложении в ряды Тейлора, нетрудно установить ее второй порядок по параметру h и порядок τ^λ с $\lambda = \{2,\ \sigma = 1/2;\ 1,\ \sigma \neq 1/2\}$ по переменной t. Это обеспечивает справедливость оценки

$$J(\Psi(u)) = O\left(\tau^\lambda + h^2\right).$$

Ясно, что при $\tau \leq c h^{\vartheta/\lambda}$, $\vartheta > \theta > m/2$ и достаточно малом h будет верно неравенство $J(\Psi(u)) \leq \delta$. При этом разностная схема (10) будет иметь решение, и для него будет верна оценка точности

$$\max_{t\in\overline{\omega}_\tau} \|y(t) - u(t)\|_1 + \max_{t\in\overline{\omega}_\tau} \|\chi(t) - u_x(t)\|_2 = O\left(\tau^\lambda + h^2\right).$$

Литература

1. Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем.* – М.: Наука, 1971. – 552 с.
2. Самарский А.А. *Классы устойчивых схем* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7. – № 5. – С. 1096–1133.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* – М.: Наука, 1973. – 415 с.
4. Гулин А.В. *Теоремы об устойчивости несамосопряженных разностных схем* // Матем. сб. – 1979. – Т. 117. – № 2. – С. 297–303.
5. Арделян Н.В. *Разрешимость и сходимость нелинейных разностных схем* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 302. – № 6. - С. 1289–1292.
6. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. *Исследование одного класса нелинейных разностных схем* // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 7. – С. 63–71.
7. Ляшко А.Д. *О корректности нелинейных двухслойных операторно-разностных схем* // ДАН СССР. – 1974. – Т. 215. – № 2. – С. 263–265.
8. Лапин А.В., Ляшко А.Д. *О сходимости разностных схем для квазилинейных уравнений параболических на решении* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 12. – С. 30–42.
9. Ляшко А.Д., Федотов Е.М. *Корректность одного класса консервативных нелинейных операторно-разностных схем* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 10. – С. 47–55.
10. Федотов Е.М. *Разностные схемы для нелинейных нестационарных задач.* – Изд-во Казанск. ун-та, 1987. - 90 с.
11. Федотов Е.М. *Об одном классе двухслойных разностных схем для нелинейных гиперболических уравнений* // Исследов. по прикладной матем. – Казань. – 1990. – № 17. – С. 129–146.
12. Федотов Е.М. *Об одном классе двухслойных разностных схем для нелинейных краевых задач с памятью* // Изв. вузов. Математика. - 1997. – № 4. – С. 86–97.
13. Абрашин В.Н. *О разностных схемах газовой динамики* // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17. – № 4. – С. 710–718.
14. Абрашин В.Н., Матус П.П. *О точности разностных схем для одномерных задач газовой динамики* // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17. – № 7. – С. 1155–1161.
15. Смагулов Ш. *О сходящихся разностных схемах для уравнений вязкого газа в переменных Эйлера* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 277. – № 3. – С. 553–556.
16. Амосов А.А., Злотник А.А. *О разностных схемах для некоторых задач об одномерном движении вязкого газа* // Num. Anal. and Math. mod. – Banach Center Publ. Warsaw. – 1990. – V. 24. – С. 415–434.
17. Попов А.В. *Исследование экономичного конечно-разностного метода для двумерных уравнений вязкого теплопроводного газа* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1991. – Т. 31. – № 7. – С. 1066–1080.

Казанский государственный университет

Поступила 29.09.1997