И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 3 (490)

УДК 517.948

Б.И. ПЕЛЕШЕНКО

О СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ СВЕРТКИ СЛАБОГО ТИПА (φ, φ)

1. *Введение. Обозначения и определения.* В [1] получено описание свойств ядра $k(x)$ операторов свертки

$$T_\varepsilon f(x) = \int\limits_{R^n} k_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int\limits_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)f(y)dy, \quad \varepsilon > 0, \tag{1}$$

в случае, когда ядро $k(x)$ локально интегрируемо в $R^n - \{0\}$ и выполняется условие Хёрмандера

$$\int\limits_{2|x|<|y|} |k(y+x) - k(y)|dy \le B, \quad |x| \ne 0, \tag{2}$$

а операторы $\{T_\varepsilon\}$ слабого типа (p,p) равномерно по ε при некотором $p \in [1,\infty)$. В [2] введено определение оператора слабого типа (φ,φ) и доказана теорема интерполяции таких операторов в пространствах $L_p(R^n)$, $1 < p < \infty$. В данной статье исследованы свойства ядра $k(x)$ при условии, что операторы (1) являются операторами слабого типа (φ,φ) равномерно по всем ε.

Пусть Φ — множество выпуклых возрастающих на полупрямой $[0,\infty)$ функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям $\varphi(t) > 0$, когда $t > 0$, $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$. Через $f^*(t)$ обозначается невозрастающая перестановка модуля измеримой на R^n функции $f(x)$.

Определение 1. Пусть функция $\varphi(t) \in \Phi$. Операторы $\{T_\varepsilon\}$ назовем слабого типа (φ,φ) (см. [2], [3]) равномерно, если существует такая постоянная $C > 0$, что при любом $t > 0$

$$\operatorname{mes}\{x \in R^n : |T_\varepsilon f(x)| > t\} \le C \int_{R^n} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)dx$$

для всех функций $f(x) \in L^0_\infty(R^n)$ и всех $\varepsilon > 0$.

2. *Перейдем к формулировке и доказательству результатов.*

Теорема 1. *Пусть $\varphi(t) \in \Phi$, $k(x) \in L_1^{\rm loc}(R^n - \{0\})$ и выполнено условие* (2). *Если $\{T_\varepsilon\}$ — операторы слабого типа (φ,φ) равномерно, то*

$$\sup_{0<\rho<\infty} \int\limits_{\rho\le|y|\le2\rho} |k(y)|dy \le \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\rho > 0$ и множество $\Omega_\rho = \{y \in R^n : \rho \le |y| \le 2\rho\}$ является носителем функции $f(y) \in L^0_\infty(R^n)$ с $\|f\|_{L_\infty} \le 1$. Так как $k \in L_1^{\rm loc}(R^n - \{0\})$, то $\int\limits_{\Omega_\rho} k(y)f(-y)dy$ существует. Пусть $\Big|\int\limits_{\Omega_\rho} k(y)f(-y)dy\Big| = \lambda > B$, где B — константа из условия (2). Тогда для $\varepsilon = \rho/2$ и $|x| \le \rho/2$

имеем

$$|(k_{\rho/2} * f)(x)| = \Big| \int_{\Omega_\rho} k(y+x) f(-y) dy \Big| \geq$$

$$\geq \Big| \int_{\Omega_\rho} k(y) f(-y) dy \Big| - \Big| \int_{\Omega_\rho} (k(y+x) f(-y) - k(y) f(-y)) dy \Big| \geq \lambda - B > 0,$$

т. е. $(k_{\rho/2} * f)^*(t) \geq \lambda - B > 0$ для всех $t \in (0, \gamma 2^{-n} \rho^n)$, где γ — объем единичного шара. При доказательстве этого неравенства воспользовались тем, что условие $|x - y| > \rho/2$ выполняется, если $y \in \Omega_\rho$ и $|x| \leq \rho/2$.

Далее, используя условие, что операторы $T_{\rho/2}$ слабого типа (φ, φ) равномерно для всех $\rho > 0$, получаем

$$2^{-n} \gamma \rho^n \leq \operatorname{mes}\{x : |(k_{\rho/2} * f)(x)| > \lambda - B\} \leq C \int_{R^n} \varphi\Big(\frac{|f(y)|}{\lambda - B}\Big) dy \leq C \varphi\Big(\frac{1}{\lambda - B}\Big) 2^n \gamma \rho^n,$$

где $C > 0$ и не зависит от ρ и $f(x)$. Отсюда $2^{-2n}/C \leq \varphi(\frac{1}{\lambda - B})$, и, значит, найдется такое число $L > 0$, независящее от $\rho > 0$, для которого $\frac{1}{\lambda - B} \geq L$. Тогда $|\int\limits_{\rho < |y| \leq 2\rho} k(y) f(-y) dy| \leq \frac{1}{L} + B$ для всех $f(x)$ из $L^0_\infty(R^n)$, имеющих норму $\|f\|_{L_\infty} \leq 1$ и носитель в множестве Ω_ρ. Из двойственности пространств $L_1(\Omega_\rho)$ и $L_\infty(\Omega_\rho)$ следует $\int\limits_{\Omega_\rho} |k(y)| dy \leq \frac{1}{L} + B$. Полученное неравенство выполняется для любого $\rho > 0$. □

Теорема 2. *Пусть $\varphi(t) \in \Phi$ и $\beta_\varphi < \infty$. Если выполнено условие*

$$\sup_{0 < \rho < \infty} \int_{\Omega_\rho} |k(y)| dy < \infty$$

и операторы $\{T_\varepsilon\}$ слабого типа (φ, φ) равномерно, то

$$\sup_{\rho_1, \rho_2 > 0} \Big| \int\limits_{\rho_1 \leq |y| \leq \rho_2} k(y) dy \Big| < \infty. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть число $\rho > 0$, $0 < \varepsilon < \rho$, а функция $f(y) \in L^0_\infty(R^n)$ и такая, что $\|f\|_{L_\infty} \leq 1$, $f(y) = 1$ для $|y| \leq 2\rho$ и $f(y) = 0$ для $|y| \geq 3\rho$. Тогда для $|x| \leq \rho$ имеет место соотношение

$$(k_\varepsilon * f)(x) = \int\limits_{|y| \leq \rho} k_\varepsilon(y) dy + \int\limits_{\rho \leq |y| \leq 4\rho} k(y) f(x - y) dy,$$

и, следовательно,

$$|(k_\varepsilon * f)(x)| \geq \Big| \int\limits_{|y| \leq \rho} k_\varepsilon(y) dy \Big| - 2 \sup_{0 < \rho < \infty} \int_{\Omega_\rho} |k(y)| dy = \mu - 2B_1.$$

Если для всех $\rho > 0$ и $0 < \varepsilon < \rho$ выполняется неравенство $|\int\limits_{|y| \leq \rho} k_\varepsilon(y) dy| \leq 2B_1$, то теорема доказана. Предположим, что $\mu = |\int\limits_{|y| \leq \rho} k_\varepsilon(y) dy| > 2B_1$, т. е. величина $\mu - 2B_1$ положительна. Используя условие теоремы о семействе операторов свертки $\{T_\varepsilon\}$, получаем

$$\gamma \rho^n \leq \operatorname{mes}\{x \in R^n : |(k_\varepsilon * f)(x)| > \mu - 2B_1\} \leq C \varphi\Big(\frac{1}{\mu - 2B_1}\Big) 3^n \gamma \rho^n,$$

где C не зависит от ρ, ε и $f(x)$. Отсюда

$$3^{-n}/C \leq \varphi\Big(\frac{1}{\mu - 2B_1}\Big).$$

Тогда найдется такое число $M > 0$, для которого $(\frac{1}{\mu - 2B_1}) \geq M$ и $\mu \leq 1/M + 2B_1$. Таким образом, для любого $\rho > 0$ и $\varepsilon \in (0, \rho)$ имеем

$$\Bigl|\int\limits_{\varepsilon \leq |y| \leq \rho} k(y)dy\Bigr| = \Bigl|\int\limits_{|y| \leq \rho} k_\varepsilon(y)dy\Bigr| \leq \frac{1}{M} + 2B_1. \qquad \square$$

Следствие 1. Пусть функция $\varphi(t) \in \Phi$, $k(x) \in L_1^{\text{loc}}(R^n - \{0\})$ и выполнено условие (2). Если операторы $\{T_\varepsilon\}$ слабого типа (φ, φ) равномерно, то $\{T_\varepsilon\}$

а) слабого типа $(1, 1)$ равномерно;

б) равномерно ограничены из $L_\infty(R^n)$ в $BMO(R^n)$;

в) равномерно ограничены из $L_p(R^n)$ в $L_p(R^n)$ при $1 \leq p < \infty$.

Доказательство. Из теорем 1, 2 следует, что для ядра $k(x)$ выполняются условия (3), (4). Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ и $x \neq 0$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{2|x| \leq |y|} |k_\varepsilon(y + x) - k_\varepsilon(y)|dy \leq \int\limits_{2|x| \leq |y|} |k(y + x) - k(y)|dy + 2 \int\limits_{\varepsilon \leq |y| \leq 3\rho} |k(y)|dy \leq B + 4B_1.$$

По теореме Бенедека–Кальдерона–Панцоне ([4], с. 65) из условий (2)–(4) получаем равномерную ограниченность операторов $\{T_\varepsilon\}$ из $L_2(R^n)$ в $L_2(R^n)$. Применяя затем теоремы из ([5], с. 35; [6], с. 231), доказываем утверждения а) и б). С помощью интерполяционной теоремы из [7] получаем в).

Теорема 3. *Пусть $k(x) \in L_1^{\text{loc}}(R^n)$ и выполнено условие* (2)*. Тогда условия* (3), (4) *являются необходимыми и достаточными для того, чтобы операторы $\{T_\varepsilon\}$ были слабого типа (φ, φ) равномерно по ε для всякой функции $\varphi(t)$ из Φ, удовлетворяющей Δ_2-условию $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$, $t \to \infty$.*

Доказательство. Необходимость доказана в теоремах 1, 2.

Достаточность при $\varphi(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, следует из результатов Бенедека–Кальдерона–Панцоне ($p = 2$) ([4], с. 65) и Хёрмандера ([5], с. 35). Пусть функция $\varphi(t) \in \Phi$. В силу выпуклости $\varphi(t)$ на интервале $(0, \infty)$ и условия $\varphi(0) = 0$ для всякого $\lambda \geq 1$ имеет место неравенство $\lambda \leq \frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(1)}$. Кроме того, из Δ_2-условия для $\lambda \in (0, 1]$ следует $\frac{\varphi(1)}{\varphi(\lambda)} = \frac{\varphi(\lambda^{-1}\lambda)}{\varphi(\lambda)} \leq A^{1+\log_2 \lambda^{-1}} = (2^\alpha)^{1+\log \lambda^{-1}} \leq A\frac{1}{\lambda^\alpha}$, где $\alpha = \log_2 A > 0$. Тогда $\lambda^\alpha \leq \frac{A}{\varphi(1)}\varphi(\lambda)$. Пусть $t > 0$, $\alpha \geq 1$ и $f(x) \in L_\infty^0(R^n)$. Представим функцию $f(x)$ в виде суммы функций $f_t(x) + f^t(x)$, где $f^t(x) = f(x)$, когда $f(x) \leq t$, и $f(x) = 0$ для других x, а $f_t(x) = f(x) - f^t(x)$. Функции $f_t(x)$ и $f^t(x)$ принадлежат пространствам $L_p(R^n)$ при любом $p \geq 1$. Из равномерной ограниченности операторов $\{T_\varepsilon\}$ из $L_p(R^n)$ в $L_p^*(R^n)$ при $1 \leq p < \infty$ следует

$$\begin{aligned}
&\text{mes}\{|T_\varepsilon f(x)| > 2t\} \leq \text{mes}\{|T_\varepsilon f_t(x)| > t\} + \text{mes}\{|T_\varepsilon f^t(x)| > t\} \leq \\
&\leq C_1 \int_{R^n} \frac{|f_t(x)|}{t} dx + C_2 \int_{R^n} \left|\frac{f^t(x)}{t}\right|^\alpha dx \leq \frac{C_1}{\varphi(1)} \int_{R^n} \varphi\left(\left|\frac{f_t(x)}{t}\right|\right) dx + \frac{C_2 A}{\varphi(1)} \int_{R^n} \varphi\left(\left|\frac{f^t(x)}{t}\right|\right) dx \leq \\
&\qquad \leq \frac{C_1 + C_2 A}{\varphi(1)} \int_{R^n} \varphi\left(\left|\frac{f(x)}{t}\right|\right) dx \leq C_3 \int_{R^n} \varphi\left(\left|\frac{f(x)}{2t}\right|\right) dx,
\end{aligned}$$

где постоянная C_3 не зависит от f, t и ε. $\square$

Замечание. Установлено, что при выполнении условий теоремы 1 операторы $\{T_\varepsilon\}$ являются операторами слабого типа (φ, φ) равномерно по $\varepsilon > 0$ для всякой функции $\varphi(t)$ из Φ, удовлетворяющей Δ_2-условию. Будет ли это верно в случае, если функция $\varphi(t)$ не удовлетворяет Δ_2-условию? Положительный ответ на этот вопрос в случае, когда $\varphi(t) = t^p e^{-1/t}$ $(1 < p < \infty)$ и операторы $\{T_\varepsilon\}$ определены на характеристических функциях множеств конечной лебеговой меры, дает следующая

Теорема 4. *Пусть $\varphi(t) \in \Phi$, $1 < p < \infty$, $k(x) \in L_1^{\mathrm{loc}}(R^n - \{0\})$ и выполнено условие* (2). *Если $\{T_\varepsilon\}$ — операторы слабого типа (φ, φ) равномерно, то существует такая постоянная $A(p) > 1$, что для всякой характеристической функции $\chi_E(x)$ множества E из R^n конечной лебеговой меры равномерно по ε выполняется неравенство*

$$\operatorname{mes}\{x \in R^n : |T\chi_\varepsilon(x)| > 2t\} \le A(p) \int_{R^n} \exp\left(- \frac{B_1 t}{\chi_E(x)}\right) \left(\frac{\chi_E(x)}{t}\right)^p dx. \tag{5}$$

Доказательство. Из теорем Бенедека–Кальдерона–Панцоне ([4], с. 65) и Хёрмандера ([5], с. 35) следует, что операторы $\{T_\varepsilon\}$ равномерно ограничены из пространства $L_p(R^n)$ в $L_p(R^n)$ при любом $p \in (1, \infty)$. Пусть $p \in (1, \infty)$, $t > 0$ и E — множество конечной лебеговой меры из R^n. Тогда для любого куба $Q \in R^n$, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\frac{1}{\operatorname{mes} Q} \int_Q |T_\varepsilon f(x)| dx \le \left\{ \frac{1}{\operatorname{mes} Q} \int_Q |T_\varepsilon f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \le C(p) (\operatorname{mes} Q)^{-1/p} \|f\|_{L_p}.$$

Отсюда следует, что $(T_\varepsilon f)_Q = \frac{1}{\operatorname{mes} Q} \int\limits_Q T_\varepsilon f(x) dx \to 0$ равномерно по ε, когда $\operatorname{mes} Q \to \infty$. Применяя к функции $|T_\varepsilon \chi_E(x)|^p$ при заданном $\varepsilon > 0$ лемму Кальдерона–Зигмунда ([4], с. 27), получаем такую последовательность кубов $\{Q_{x_k, r_k}\}$ с непересекающимися внутренностями, что $|T_\varepsilon(x)| \le t$ почти всюду на дополнении $R^n - (\bigcup\limits_k Q_{x_k, r_k})$ и

$$(\operatorname{mes} Q_{x_k, 2r_k})^{-1} \int_{Q_{x_k, 2r_k}} |T_\varepsilon f(x)|^p dx < t^p \le (\operatorname{mes} Q_{x_k, r_k})^{-1} \int_{Q_{x_k, r_k}} |T_\varepsilon \chi_E(x)|^p dx.$$

При этом

$$(T_\varepsilon f)_{Q_k} = \left\{ \frac{1}{\operatorname{mes} Q_{x_k, 2r_k}} \int_{Q_{x_k, 2r_k}} |T_\varepsilon f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \le t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}\{x \in R^n : |T_\varepsilon \chi_E(x)| > 2t\} &= \operatorname{mes}\{(x \in R^n : |T_\varepsilon \chi_E(x)| > 2t) \cap (\bigcup_k Q_{x_k, r_k})\} \le \\ &\le \sum_k \operatorname{mes}\{(x \in R^n : |T_\varepsilon \chi_E(x) - (T_\varepsilon \chi_E) Q_{x_k, 2r_k}| > t) \cap Q_{x_k, 2r_k}\}. \end{aligned}$$

По теореме из [6] операторы $\{T_\varepsilon(x)\}$ равномерно ограничены из $L_\infty(R^n)$ в $BMO(R^n)$. Применяя теорему Йона–Ниренберга [8] на каждом из кубов Q_{x_k, r_k}, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_k \operatorname{mes}\{(x \in R^n : |T_\varepsilon \chi_E(x) - (T_\varepsilon \chi_E) Q_{x_k, 2r_k}| > t) \cap Q_{x_k, 2r_k}\} \le \\ &\le C \exp(-B_0 t \|T_\varepsilon \chi_E\|^{-1}_{BMO(R^n)}) \sum_k \operatorname{mes} Q_{x_k, 2r_k} \le 2^n C \exp(-B_1 t \|\chi_E\|^{-1}_{L_\infty}) \sum_k \operatorname{mes} Q_{x_k, 2r_k} \le \\ &\le 2^n C \exp(-B_1 t) t^{-p} \int\limits_{\bigcup\limits_k Q_{x_k, 2r_k}} |T\chi_E(x)|^p dx \le 2^n C \cdot C(p) \exp(-B_1 t) t^{-p} \|\chi_E\|^p_{L_p(R^n)} \le \\ &\le A(p) \int_E \exp\left(- \frac{B_1 t}{\chi_E(x)}\right) \left(\frac{\chi_E(x)}{t}\right)^p dx. \end{aligned}$$

Из полученных неравенств следует неравенство (5), в котором постоянная $A(p)$ не зависит от ε, t, χ_E, т. е. неравенство выполняется равномерно по $\varepsilon > 0$ для любых t и множеств E конечной лебеговой меры. □

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 4 и функция $\varphi_0(t)$ из множества Φ удовлетворяет условию

$$\sup_{0<t<\infty} \frac{\min\{t^{-1}, t^{-p} \exp(-B_1 t/2)\}}{\varphi_0(t)} < \infty.$$

Тогда существует такая постоянная $A(\varphi_0) > 0$, что для характеристической функции $\chi_E(x)$ всякого множества E конечной лебеговой меры справедливо неравенство $\operatorname{mes}\{x \in R^n : |T\chi_E(x)| > t\} \le A(\varphi_0) \int\limits_{R^n} \varphi_0(\frac{\chi_E(x)}{t})dx$.

Доказательство получаем из п. а) следствия 1 и теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда существует такая постоянная $C(p)$, что для характеристической функции $\chi_E(x)$ любого множества E конечной лебеговой меры выполняются равномерно по ε неравенства*

$$(T_\varepsilon\chi_E)^*(t) \le C(1)\Big\{t^{-1}\int_0^t \chi_E^*(z)dz + \int_t^\infty \chi_E^*(z)z^{-1}dz\Big\} \qquad \text{при } p = 1$$

и

$$t^{-1}\int_0^t (T_\varepsilon\chi_E)^*(z)dz \le C(p)\Big\{t^{-1/p}\int_0^t \chi_E^*(z)z^{1/p-1}dx + \int_t^\infty \chi_E^*(z)z^{-1}dz\Big\} \quad \text{при } 1 < p < \infty. \tag{6}$$

Доказательство. Из следствия 1 и теоремы 4 следует при всяком $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\operatorname{mes}\{x \in R^n : |T\chi_E(x)| > t\} \le$$
$$\le 2^p A(p)t^{-p}\exp\Big(-\frac{B_1}{2}t\Big)\operatorname{mes} E \le A_1(p)\begin{cases}(\frac{2}{B_1 t})^p \operatorname{mes} E, & 0 < t \le \frac{2}{B_1};\\ \exp(1 - \frac{B_1}{2}t)\operatorname{mes} E, & \frac{2}{B_1} < t < \infty,\end{cases}$$

где $A_1(p) = \max(A(p)B_1^p e^{-1}, 1)$. Тогда для невозрастающей перестановки $(T_\varepsilon\chi_E)^*(t)$ справедлива оценка

$$(T_\varepsilon\chi_E)^*(t) \le \frac{2}{B_1}\begin{cases}(1 - \ln\frac{1}{A_1(p)\operatorname{mes} E}), & 0 < t \le A_1(p)\operatorname{mes} E;\\ (A_1(p)\operatorname{mes} E)^{1/p}t^{-1/p}, & A_1(p)\operatorname{mes} E < t < \infty.\end{cases} \tag{7}$$

Если $0 < t \le \operatorname{mes} E$, то

$$(T_\varepsilon\chi_E)^*(t) \le \frac{2}{B_1}\Big(1 - \ln\frac{1}{A_1(p)\operatorname{mes} E}\Big) = \frac{2}{B_1}\Big\{pt^{-1/p}\int_0^t \chi_E^*(z)z^{1/p-1}dz + \int_t^{A_1(p)\operatorname{mes} E} z^{-1}dz\Big\} =$$
$$= \frac{2}{B_1}\Big\{pt^{-1/p}\int_0^t \chi_E^*(z)z^{1/p-1}dz + \int_t^{\operatorname{mes} E} z^{-1}dz + \ln A_1(p)\Big\} \le$$
$$\le \frac{2}{B_1}\Big\{(p + pA_1(p))t^{-1/p}\int_0^t \chi_E^*(z)z^{1/p-1}dz + \int_t^\infty \chi_E^*(z)z^{-1}dz\Big\}.$$

В случае, когда $\operatorname{mes} E < t \le A_1(p)\operatorname{mes} E$, имеем

$$(T_\varepsilon\chi_E)^*(t) \le \frac{2}{B_1}\Big(1 + \ln\frac{A_1(p)\operatorname{mes} E}{\operatorname{mes} E}\Big) = \frac{2}{B_1}(1 + \ln A_1(p))pt^{-1/p}\int_0^t \chi_E^*(z)z^{1/p-1}dz.$$

Если $t > A_1(p)\operatorname{mes} E$, то

$$(T_\varepsilon\chi_E)^*(t) \le \frac{2}{B_1}A_1^{1/p}(p)t^{-1/p}\int_0^{\operatorname{mes} E} z^{1/p-1}dz = \frac{2}{B_1}A_1^{1/p}(p)t^{-1/p}\int_0^t \chi_E^*(z)z^{1/p-1}dz.$$

Таким образом, для всякого $t > 0$

$$(T_\varepsilon\chi_E)^*(t) \le C(p)\Big\{t^{-1/p}\int_0^t \chi_E^*(z)z^{1/p-1}dz + \int_t^\infty \chi_E^*(z)z^{-1}dz\Big\}. \tag{8}$$

При $p = 1$ неравенство доказано.

Пусть $1 < p < \infty$, $1 < t \leq A_1(p) \operatorname{mes} E$. Интегрируя левую и правую части неравенства (7), получаем

$$\int_0^t (T_\varepsilon \chi_E)^*(z) dz \leq \frac{2}{B_1} \int_0^t \left(1 - \ln \frac{z}{A_1(p) \operatorname{mes} E}\right) dz \leq \frac{2}{B_1} t \left(1 - \ln \frac{t}{A_1(p) \operatorname{mes} E}\right).$$

Отсюда следует

$$(T_\varepsilon \chi_E)^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t (T \chi_E)^*(z) dz \leq \frac{2}{B_1} \left(1 - \ln \frac{t}{A_1(p) \operatorname{mes} E}\right). \tag{9}$$

В случае $t > A_1(p) \operatorname{mes} E$ имеем

$$(T_\varepsilon \chi_E)^{**}(t) = \frac{2}{B_1} \frac{1}{t} \int_0^t (A_1(p) \operatorname{mes} E)^{1/p} z^{-1/p} dz = \frac{2}{B_1} \frac{p^2}{p-1} (A_1(p) \operatorname{mes} E)^{1/p} t^{-1/p}. \tag{10}$$

Из неравенств (9), (10) следует оценка для $(T_\varepsilon \chi_E)^{**}(t)$, аналогичная оценке (7) для неубывающей перестановки $(T_\varepsilon \chi_E)^*(t)$. Повторяя рассуждения, применяемые при доказательстве неравенства (8), получаем неравенство (6). $\square$

Замечание. Установленная в теореме 5 оценка (6) справедлива для конечнозначных функций $f(x) = \sum_{k=1}^n C_k \chi_{E_k}(x)$, принимающих конечное число ненулевых значений $\{C_k\}$ на множествах конечной лебеговой меры $\bigcup_{k=1}^n E_k$. Это следует из свойства полуаддитивности $(T_\varepsilon f)^{**}(t) \leq \sum_{k=1}^n (T_\varepsilon \chi_{E_k})^{**}(t)$ и аддитивности для интегралов ([4], с. 218). Такого типа оценки получены в [9] для преобразования Гильберта и использовались вслед идеям Кальдерона для доказательства интерполяционных теорем в пространствах Лоренца–Зигмунда.

Литература

1. Jurkat W.B., Sampson G. *The L^p mapping problem for well-behaved convolutions* // Stud. math. – 1979. – V. 65. – № 3. – P. 227–238.
2. Riviere N.M. *Singular integrals and multiplier operators* // Ark. matem. – 1971. – V. 9. – № 2. – P. 243–278.
3. Пелешенко Б.И. *О сингулярных интегральных операторах свертки слабого типа* // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1987. – Т. 180. – С. 174–175.
4. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* – М.: Мир, 1973. – 342 с.
5. Хёрмандер Л. *Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига.* – М.: Ин. лит., 1962. – 70 с.
6. Spanne S. *Sur interpolasion entre les espaces $L_K^{p,\phi}$* // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. – 1966. – V. 20. – P. 625–648.
7. Stampacchia G. *The spaces $L^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation* // Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. – 1965. – V. 19. – P. 443–462.
8. John F., Nirenberg L. *On functions of bounded mean oscillation* // Comm. Pure Appl. Math. – 1961. – V.14. – № 3. – P. 415–426.
9. Benett C., Rudnick K. *On Lorentz–Zygmund spaces* // Rozpr. Matem. – 1980. – V. 175. – 72p.

Днепропетровский государственный аграрный университет

Поступили
первый вариант 22.03.1999
окончательный вариант 21.02.2001