ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 517.958 : 539.3

Г.И. МИХАСЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК В ВИДЕ ДВУМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

В [1], [2] методом В.П. Маслова [3] построены комплексные ВКБ-решения линейных уравнений движения тонких оболочек в виде одномерных волновых пакетов, бегущих по поверхности оболочки. В [4] предложена новая конструкция решений, сосредоточенных вблизи замкнутых линий. В ее основу положена идея [5] перехода к подвижной локальной системе координат, связанной с центром волнового пакета, а также конкретный вид [6] функции эйконала в анзатце ВКБ-ряда.

Целью данной работы является развитие метода, изложенного в [4], на случай двумерных волновых пакетов. Предлагается ВКБ-процедура построения формального асимптотического решения задачи Коши для уравнений пологих оболочек, сосредоточенного в окрестности подвижных точек. Предполагается, что толщина оболочки, а также физические характеристики материала являются переменными. Приводится пример о возможных волновых формах движения тонкой сферической панели с переменными модулем Юнга и плотностью материала.

1. Постановка задачи

Предполагая большую изменяемость волн в обоих направлениях, используем систему уравнений пологих оболочек, записанную в безразмерном виде [7],

$$\begin{aligned} \varepsilon^2\{\Delta d\Delta w - K[(1-\nu)d,w]\} + \Delta_k\Phi + m\partial^2 w/\partial t^2 = 0,\\ \varepsilon^2\{\Delta g\Delta\Phi - K[(1+\nu)g,\Phi]\} - \Delta_k w = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered} \Delta z = \frac{1}{A_1A_2}\sum_i \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{A_j}{A_i}\frac{\partial z}{\partial\alpha_i}\right), \quad \Delta_k z = \frac{1}{A_1A_2}\sum_i \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\frac{A_j}{A_iR_j}\frac{\partial z}{\partial\alpha_i}\right),\\ K[\Psi,z] = \frac{1}{A_1A_2}\sum_i \frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left\{\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_j}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\frac{1}{A_j}\frac{\partial z}{\partial\alpha_j}\right) + \frac{1}{A_i^2}\frac{\partial z}{\partial\alpha_i}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\right] - \right.\\ \left. -\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha_j}\sum_k \frac{A_l}{A_k}\frac{\partial}{\partial\alpha_k}\left(\frac{1}{A_l^2}\frac{\partial z}{\partial\alpha_l}\right)\right\}, \quad i,j,k,l = 1,2, \quad l\neq k,\\ d(\alpha_k) = \frac{Eh^3}{1-\nu^2}, \quad g(\alpha_k) = \frac{1}{Eh}, \quad m(\alpha_k) = \rho h. \end{gathered} \tag{2}$$

В качестве криволинейных координат α_1, α_2 на срединной поверхности взяты линии кривизны, так что первая квадратичная форма поверхности имеет вид $d\sigma^2 = R_0^2(A_1^2\,d\alpha_1^2 + A_2^2\,d\alpha_2^2)$, где R_0 — характерный размер оболочки. Безразмерные величины в (1), (2) введены по формулам

$$\begin{gathered} w_* = \varepsilon^{-2}R_0 w, \quad \Phi_* = E_0R_0^2\Phi, \quad t_* = T_0 t,\\ E_* = E_0E(\alpha_k), \quad h_* = h_0h(\alpha_k), \quad \rho_* = \rho_0\rho(\alpha_k), \quad \nu_* = \nu(\alpha_k),\\ R_{*j} = R_0R_j(\alpha_k), \quad T_0^2 = \varepsilon^{-2}\rho_0R_0^2E_0^{-1}, \quad \varepsilon^4 = h_0^2(12R_0^2)^{-1}. \end{gathered}$$

Здесь w_*, Φ_* — нормальный прогиб и функция напряжений, R_{*j} — радиусы кривизны, h_*, E_*, ν_*, ρ_* — толщина оболочки, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала, h_0, E_0, ρ_0 — соответствующие им характерные значения (будут введены ниже), $0 < \varepsilon$ — естественный малый параметр, T_0 — характерное время.

Предполагается, что все коэффициенты в уравнениях (1) бесконечно дифференцируемы по α_i и нигде не обращаются в нуль.

Пусть

$$\begin{aligned} w|_{t=0} &= W^0(\zeta_1,\zeta_2)\exp\{i\varepsilon^{-1}S^0(\alpha_1,\alpha_2)\}, \\ \dot{w}|_{t=0} &= i\varepsilon^{-1}V^0(\zeta_1,\zeta_2)\exp\{i\varepsilon^{-1}S^0(\alpha_1,\alpha_2)\}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$S^0 = \mathbf{P}^0(\alpha_1,\alpha_2)^\top + \frac{1}{2}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{B}^0(\alpha_1,\alpha_2)^\top,$$

$$W^0 = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}w_k^0(\zeta_1,\zeta_2), \quad V^0 = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}v_k^0(\zeta_1,\zeta_2),$$

$$\zeta_k = \varepsilon^{-1/2}\alpha_k, \quad k=1,2, \quad \mathbf{B}^0 = \mathbf{B}_1^0 + i\mathbf{B}_2^0,$$

где w_k^0, v_k^0 — полиномы степеней M_k аргументов ζ_1, ζ_2 с комплексными коэффициентами, $\mathbf{P}^0 = (p_1^0, p_2^0)$ — ненулевой вектор, $\mathbf{B}^0$ — симметричная комплексная матрица размерности 2×2 с положительно определенной мнимой частью $\mathbf{B}_2^0$. Точка в (3) и ниже указывает на дифференцирование по времени t, а значок $\top$ означает транспонирование. Условия (3) задают на поверхности начальный волновой пакет с центром в начале координат $(0,0)$. Положим $h_0 = h_*(0,0)$, $E_0 = E_*(0,0)$, $\rho_0 = \rho_*(0,0)$.

2. Метод решения

Решение задачи (1), (3) будем искать в виде волнового пакета с центром в точке $Q(q_1,q_2)$, где $q_1(t)$, $q_2(t)$ — дважды дифференцируемые функции времени t и такие, что $q_1(0) = q_2(0) = 0$. Перейдем в (1) к новой системе координат по формуле

$$\alpha_k = q_k(t) + \varepsilon^{1/2}\xi_k, \quad k=1,2. \tag{4}$$

Принимая во внимание (3), выберем в качестве анзатца решения ряды [4]

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}w_k(\xi_1,\xi_2,t)\exp\{i\varepsilon^{-1}S(\xi_1,\xi_2,t,\varepsilon)\}, \\ \Phi &= \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{k/2}\Phi_k(\xi_1,\xi_2,t)\exp\{i\varepsilon^{-1}S(\xi_1,\xi_2,t,\varepsilon)\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$S(\xi_1,\xi_2,t,\varepsilon) = \int_0^t\omega(\tau)d\tau + \varepsilon^{1/2}\mathbf{P}(t)\Xi + \frac{1}{2}\varepsilon\Xi^\top\mathbf{B}(t)\Xi, \tag{6}$$

$$\mathbf{P} = (p_1(t),p_2(t)), \quad \Xi = (\xi_1,\xi_2)^\top,$$

$\mathbf{B}(t)$ — симметричная комплексная матрица с положительно определенной мнимой частью $\operatorname{Im}\mathbf{B}(t)$ для любого $t \geq 0$, w_k, Φ_k — полиномы аргументов ξ_1, ξ_2. Все неизвестные в (5), (6) величины будем искать в классе дважды дифференцируемых функций времени t. При фиксированном t $\omega(t)$ имеет смысл мгновенной частоты колебаний оболочки в окрестности подвижного центра Q, $p_k(t)$ — волновые числа, а компоненты матрицы $\operatorname{Im}\mathbf{B}(t)$ определяют скорость затухания амплитуды волн при удалении от центра Q.

Для определения входящих в (5), (6) функций подставим (4)–(6) в (1), а все коэффициенты в исходных уравнениях (1) разложим в ряды Тейлора в окрестности точки Q.

3. Первое и второе приближения

Приравнивая в (1) коэффициенты при ε^{-2}, получим однородную систему алгебраических уравнений

$$\mathbf{L}_0\mathbf{X}_0 = 0, \tag{7}$$

где $\mathbf{X}_0 = (w_0\Phi_0)^\top$, а $\mathbf{L}_0$ — матрица размерности 2×2 с элементами

$$\begin{gathered} l_{0,11} = d\left(\frac{p_1^2}{A_1^2}+\frac{p_2^2}{A_2^2}\right)^2 - m(\omega-\dot q_1 p_1-\dot q_2 p_2)^2, \\ l_{0,12} = -\left(\frac{p_1^2}{A_1^2R_2}+\frac{p_2^2}{A_2^2R_1}\right), \quad l_{0,22} = g\left(\frac{p_1^2}{A_1^2}+\frac{p_2^2}{A_2^2}\right)^2, \quad l_{0,21} = l_{0,12}. \end{gathered} \tag{8}$$

Значения функций m, d, g, A_k^2, R_k в (8) вычисляются в точке Q. Из условия существования нетривиального решения системы (7) находим

$$\omega = \dot q_1 p_1 + \dot q_2 p_2 \mp H(p_k, q_k), \quad k = 1, 2, \tag{9}$$

где

$$H = \left[\frac{d}{m}\left(\frac{p_1^2}{A_1^2}+\frac{p_2^2}{A_2^2}\right)^2 + \frac{1}{mg}\left(\frac{p_1^2}{A_1^2R_2}+\frac{p_2^2}{A_2^2R_1}\right)^2\left(\frac{p_1^2}{A_1^2}+\frac{p_2^2}{A_2^2}\right)^{-2}\right]^{1/2}$$

— функция Гамильтона. Будем предполагать, что $\mathbf{P}(t)\neq 0$ на некотором отрезке $t\in[0,T]$.

Пусть $w_0 = Z_0(\xi_1,\xi_2,t)$ — полином аргументов ξ_1, ξ_2. Тогда

$$\Phi_0 = \lambda Z_0, \quad \lambda = -l_{0,11}l_{0,12}^{-1}. \tag{10}$$

Во втором приближении (при $\varepsilon^{-3/2}$) имеем неоднородную систему уравнений

$$\mathbf{L}_0\mathbf{X}_1 = -\mathbf{L}_1\mathbf{X}_0, \tag{11}$$

где $\mathbf{X}_1 = (w_1, \Phi_1)^\top$, а $\mathbf{L}_1$ — матрица, элементы $l_{1,kl}$ $(k,l=1,2)$ которой суть операторы

$$l_{1,kl} = \left(\frac{\partial l_{0,kl}}{\partial\mathbf{P}}\mathbf{B} + \frac{\partial l_{0,kl}}{\partial\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}}\frac{\partial l_{0,kl}}{\partial\omega}\right)\Xi - i\frac{\partial l_{0,kl}}{\partial\mathbf{P}}\frac{\partial}{\partial\Xi}. \tag{12}$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{P}} = \left(\frac{\partial}{\partial p_1},\frac{\partial}{\partial p_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\mathbf{Q}} = \left(\frac{\partial}{\partial q_1},\frac{\partial}{\partial q_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\Xi} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1},\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)^\top,$$

$\mathbf{Q} = (q_1,q_2)^\top$, а под произведением векторов в (12) и ниже подразумевается их скалярное произведение.

Условие существования решения системы (11) приводит к дифференциальному уравнению относительно Z_0, которое имеет решение в виде полинома, если векторы $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{P}(t)$ удовлетворяют системе Гамильтона

$$\dot{\mathbf{Q}} = H_{\mathbf{P}}, \quad \dot{\mathbf{P}} = -H_{\mathbf{Q}}. \tag{13}$$

Уравнения (13) и дальнейшие построения соответствуют случаю, когда перед функцией Гамильтона в (9) берется знак минус.

Из (3)–(6) получаем

$$\mathbf{Q}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{P}|_{t=0} = \mathbf{P}^0. \tag{14}$$

При сделанных выше предположениях относительно входящих в уравнения (1) коэффициентов задача (13), (14) на некотором отрезке $[0,t]$ имеет единственное и непрерывное решение.

Учитывая (12), (13), находим общее решение системы (11)

$$w_1 = Z_1, \quad \Phi_1 = \lambda Z_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{P}}\mathbf{P}\Xi Z_0 + \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{Q}}\Xi Z_0 - i\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{P}}\frac{\partial Z_0}{\partial\Xi}, \tag{15}$$

где $Z(\xi_1, \xi_2, t)$ — полином аргументов ξ_1, ξ_2.

4. Третье и высшие приближения

Рассмотрим систему

$$\mathbf{L}_0\mathbf{X}_2 = -\mathbf{L}_1\mathbf{X}_1 - \mathbf{L}_2\mathbf{X}_0, \tag{16}$$

возникающую в третьем приближении (при ε^{-1}). Здесь $\mathbf{L}_2$ — матрица с элементами

$$\begin{aligned} l_{2,kl} = \frac{1}{2}\Xi\biggl(\mathbf{B}\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\mathbf{P}^2}\mathbf{B} + 2\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\mathbf{Q}\partial\mathbf{P}}\mathbf{B} + \frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\mathbf{Q}^2} + \dot{\mathbf{P}}^\top\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\omega^2}\dot{\mathbf{P}} + \\ + 2\dot{\mathbf{P}}\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\omega\partial\mathbf{Q}} + 2\dot{\mathbf{P}}\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\omega\partial\mathbf{P}}\mathbf{B}\biggr)\Xi - i\Xi^\top\biggl(\mathbf{B}\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\mathbf{P}^2} + \frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\mathbf{Q}\partial\mathbf{P}} + \\ + \dot{\mathbf{P}}\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\omega\partial\mathbf{P}}\frac{\partial}{\partial\Xi}\biggr) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\biggl(\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\mathbf{P}^2}\mathbf{B}\biggr) - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\biggl(\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\mathbf{P}^2}\frac{\partial^2}{\partial\Xi^2}\biggr) - \\ - \frac{1}{2}\biggl(\dot\omega\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\omega^2} + 2\dot{\mathbf{P}}^\top\frac{\partial^2 l_{0,kl}}{\partial\omega\partial\mathbf{P}}\biggr) - i\frac{\partial l_{0,kl}}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial l_{0,kl}}{\partial\theta}\Xi^\top\dot{\mathbf{B}}\Xi + in_{kl}, \quad k,l = 1,2, \end{aligned}$$

где

$$n_{11} = -\sum_k\biggl\{\frac{2}{A_1A_2}\biggl[\biggl(\frac{dA_j}{A_k^3}\biggr)'_{\alpha_k}p_k^3 + \biggl(\frac{d}{A_1A_2}\biggr)'_{\alpha_k}p_kp_j^2\biggr] + m\ddot{q}_kp_k\biggr\},$$

$$n_{12} = \frac{1}{A_1A_2}\sum_k\biggl(\frac{A_j}{A_kR_j}\biggr)'_{\alpha_k}p_k^3, \qquad n_{21} = -n_{12},$$

$$n_{22} = -\frac{2}{A_1A_2}\sum_k\biggl\{\biggl(\frac{gA_j}{A_k^3}\biggr)'_{\alpha_k}p_k^3 + \biggl(\frac{g}{A_kA_j}\biggr)'_{\alpha_k}p_kp_j^2\biggr\}, \quad k,l = 1,2, \quad k \neq j,$$

tr означает след матрицы, а $\partial^2 l_{0,kl}/\partial\mathbf{P}^2$, $\partial^2 l_{0,kl}/\partial\mathbf{Q}\partial\mathbf{P}$, $\partial^2 l_{0,kl}/\partial\mathbf{Q}^2$, $\partial^2/\partial\Xi^2$ — матрицы размерности 2×2.

Условие существования решения системы (16) с учетом (13), (15) снова дает дифференциальное уравнение относительно Z_0. Последнее имеет решение в виде полинома тогда и только тогда, когда $\mathbf{B}(t)$ является решением матричного уравнения Риккати

$$\dot{\mathbf{B}} + \mathbf{B}H_{\mathbf{PP}}\mathbf{B} + H_{\mathbf{QP}}\mathbf{B} + \mathbf{B}T_{\mathbf{QQ}}^\top + H_{\mathbf{QQ}} = 0. \tag{17}$$

Тогда функция Z_0 найдется из уравнения

$$-\frac{i}{2}\operatorname{tr}\biggl(H_{\mathbf{PP}}\frac{\partial^2 Z_0}{\partial\Xi^2}\biggr) + \Xi\biggl(H_{\mathbf{QP}}\frac{\partial Z_0}{\partial\Xi}\biggr) + (\mathbf{B}\Xi)\biggl(H_{\mathbf{PP}}\frac{\partial Z_0}{\partial\Xi}\biggr) + \frac{\partial Z_0}{\partial t} + GZ_0 = 0, \tag{18}$$

$$\begin{aligned} G = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(H_{\mathbf{PP}}\mathbf{B}) - \frac{1}{2H}\dot\omega - \frac{1}{H}(H_{q_1}H_{p_1} + H_{q_2}H_{p_2}) + \\ + \frac{l_{0,22}}{2mH}\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{P}}\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{Q}} + \frac{1}{2mHl_{0,22}}(2l_{0,12}n_{21} - l_{0,11}n_{22} - l_{0,22}n_{11}). \end{aligned}$$

Через $H_{\mathbf{PP}}$, $H_{\mathbf{QP}}$, $H_{\mathbf{QQ}}$ в (17), (18) обозначены матрицы, элементы которых получаются дифференцированием гамильтониана H по p_i, q_i на векторах $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$, удовлетворяющих задаче (13), (14).

Сравнивая (3) и (6), получим начальное условие

$$\mathbf{B}|_{t=0} = \mathbf{B}^0 \tag{19}$$

для (17). На отрезке $[0,T]$ задача (17), (19) имеет единственное и непрерывное решение $\mathbf{B}(t)$, для которого $\operatorname{Im}\mathbf{B}(t)$ — положительно определенная матрица для любого $t\in[0,T]$ ([5], гл. 3, § 2, с. 104). Последнее утверждение в одномерном случае доказано в [4].

Уравнение (18) имеет решение в виде полинома

$$Z_0 = \sum_{s=0}^{N} \sum_{\substack{k,l\\ k+l=s}} A_{kl}(t;c_{0,j})\xi_1^k\xi_2^l \tag{20}$$

любой целой степени $N\ge 0$ с коэффициентами A_{kl}, содержащими неопределенные постоянные интегрирования $c_{0,j}$, где $j=0,\dots,\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$.

Условия существования решения неоднородных систем алгебраических уравнений, возникающих в высших приближениях (при $\varepsilon^{-1+k/2}$, где $k\ge 1$), приводят к неоднородным дифференциальным уравнениям относительно функций $Z_k(\xi_1,\xi_2,t)$, правые части которых представляют собой некие полиномы аргументов ξ_1, ξ_2.

5. Решение задачи Коши (1), (3)

Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{X}^a = (w^a,\Phi^a)^\top = \sum_{m=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^{k/2}\mathbf{X}_k^{(m)}\exp\{i\varepsilon^{-1}S^{(m)}\}, \tag{21}$$

где

$$S^{(m)} = \int_0^t \omega^{(m)}(\tau)d\tau + \varepsilon^{1/2}\mathbf{P}^{(m)}(t)\Xi^{(m)} + \frac{1}{2}\varepsilon(\Xi^{(m)})^\top\mathbf{B}^{(m)}(t)\Xi^{(m)},$$

$$\Xi^{(m)} = (\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)})^\top,\quad \xi_j^{(m)} = \varepsilon^{-1/2}[\alpha_j - q_j^{(m)}(t)],\quad \mathbf{X}_k^{(m)} = (w_k^{(m)},\Phi_k^{(m)})^\top,\quad m,j=1,2.$$

В частности, $\mathbf{X}_0^{(m)} = Z_0^{(m)}(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},t;c_{0,j}^{(m)})(1,\lambda^{(m)})^\top$. Функция $\lambda^{(m)}$ определяется по формуле (10) при $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^{(m)}(t)$, $\mathbf{P}=\mathbf{P}^{(m)}(t)$. Здесь индексы $m=1$ и $m=2$ отвечают согласно (9) отрицательной и положительной ветвям построенных решений.

В силу проведенных построений функции w^a, Φ^a являются формальным асимптотическим решением уравнений (1). Входящие в $\mathbf{X}_k^{(m)}(\xi_1^{(m)},\xi_2^{(m)},t,c_{k,j}^{(m)})$ неопределенные константы $c_{k,j}^{(m)}$ могут быть найдены из начальных условий. Подставим (21) в (3) и учтем, что при $t=0$ $\xi_j^{(1)}=\xi_j^{(2)}=\zeta_j$. В результате получим систему уравнений

$$(Z_k^{(1)}+Z_k^{(2)})|_{t=0} = F_{k,1}^0,\quad (Z_k^{(1)}-Z_k^{(2)})|_{t=0} = F_{k,2}^0, \tag{22}$$

где, в частности,

$$F_{0,1}^0 = w^0(\zeta_1,\zeta_2),\quad F_{0,2}^0 = -\frac{v^0(\zeta_1,\zeta_2)}{H(p_1^0,p_2^0,0,0)}$$

— известные полиномы степени M_0. Рассмотрим систему (22) при $k=0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\zeta_1^m\zeta_2^n$, получим систему из $(M_0+1)(M_0+2)$ алгебраических уравнений относительно (в общем случае комплексных) неизвестных $c_{0,j}^{(1)}$, $c_{0,j}^{(2)}$, где $j=\frac{1}{2}(M_0+1)(M_0+2)$.

6. Анализ решения и пример

Решение (21) при $t > 0$ представляет собой пару пакетов изгибных волн с центрами в точках $(q_1^{(1)}(t), q_2^{(1)}(t))$ и $(q_1^{(2)}(t), q_2^{(2)}(t))$, бегущих с групповыми скоростями $\mathbf{V}_g^{(1)}(t) = (H_{p_1}^{(1)}, H_{p_1}^{(1)})^\top$ и $\mathbf{V}_g^{(2)}(T) = (-H_{p_1}^{(2)}, -H_{p_1}^{(2)})^\top$ соответственно. Индекс (m) указывает на то, что производные гамильтониана по p_j находятся на векторах $\mathbf{P}^{(m)}$, $\mathbf{Q}^{(m)}$.

Для более детального анализа решения рассмотрим в качестве примера тонкую сферическую панель с переменным модулем Юнга и плотностью материала, которая имеет параметры

$$\alpha_1 = \theta, \quad -\pi/2 < \theta_1 \le \theta \le \theta_2 < \pi/2, \quad \alpha_2 = \varphi, \quad -\pi < \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 < \pi,$$
$$A_1 = 1, \quad A_2 = \cos\theta, \quad h \equiv 1, \quad (E/\rho)^{1/2} = f(\varphi).$$

Здесь θ — угол между радиус-вектором точки на поверхности оболочки и экваториальной плоскостью, а φ — долготный угол. Пусть $p_1^0 = 0$, $p_2^0 \neq 0$. Исследуем решение на множестве $(0, \varphi_2)$. Для этого рассмотрим два случая: 1) $f'(\varphi) < 0$ при $\varphi \in (0, \varphi_2)$, 2) $f'(\varphi) > 0$, если $\varphi \in (0, \varphi_2)$. Из анализа системы Гамильтона получаем, что в обоих случаях $p_1^{(1)} = q_1^{(1)} = 0$ для любого $t \in [0, T]$. В качестве T берем некий момент времени, при котором центр волнового пакета находится достаточно далеко от края $\varphi = \varphi_2$, так что граничными условиями и эффектом отражения волн от края можно пренебречь.

В случае 1) имеем $\dot{p}_2 > 0$, $\dot{q}_2^{(1)} > 0$ для любого $t \in [0, T]$, что говорит о том, что в направлении убывания функции E/ρ волновой пакет движется неограниченно, а волновое число p_2 растет. Здесь $t < T_2 = \mathrm{T}(\varphi_2)$ и

$$\mathrm{T}(\varphi) = \frac{H_0}{2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{f^2(\varphi')[H_0^2 f^{-2}(\varphi') - \delta]^{3/4}}, \quad H_0 = H(0, p_2^0, 0, 0), \quad \delta = 1 - \nu^2.$$

В случае 2) динамика оболочки сложнее. Пусть

$$f(0)[1 + (p_2^0)^4 \delta^{-1}]^{1/2} \ge f(\varphi_2).$$

Тогда $p_2^{(1)} > 0$, $\dot{p}_2^{(1)} < 0$, $\dot{q}_2^{(1)} > 0$ при $t \in [0, T]$, где $T < T_2$. Здесь движение пакета также является неограниченным, однако волновое число $p_2^{(1)}$ уменьшается. И, наконец, при

$$f(0)[1 + (p_2^0)^4 \delta^{-1}]^{1/4} < f(\varphi_2) \tag{23}$$

получаем

$$\begin{gathered} p_2^{(1)} > 0, \quad \dot{p}_2^{(1)} < 0, \quad \dot{q}_2^{(1)} > 0, \quad t \in [0, T_r), \\ p_2^{(1)}(T_r) = \dot{q}_2^{(1)}(T_r) = 0, \\ p_2^{(1)} < 0, \quad \dot{p}_2^{(1)} < 0, \quad \dot{q}_2^{(1)} < 0, \quad t \in (T_r, T], \end{gathered} \tag{24}$$

где $T_r = \mathrm{T}(\varphi_r)$, а φ_r находится из уравнения

$$f(\varphi) = f(0)[1 + (p_2^0)^4 \delta^{-1}]^{1/4}.$$

Из (24) следует, что в случае 2) в момент времени T_r имеет место отражение волнового пакета от линии $\varphi = \varphi_r$. Обнаруженный эффект соответствует результатам, полученным в [1] при исследовании осесимметричных семейств изгибных волн в бесконечной цилиндрической оболочке с переменными E и ρ. Однако в нашем случае $p_2(t) \to 0$ при $t \to T_r$, а функция напряжений Φ принимает бесконечно большие значения. Таким образом, в случае 2), если выполняется неравенство (23), построенное решение (21) следует считать справедливым на отрезке $[0, T]$, где $T < T_r$. Последнее обстоятельство хорошо согласуется с тем фактом, что уравнения пологих оболочек (1) дают плохую точность при малом числе волн в обоих направлениях. Для построения решения, справедливого при $T_r \le t \le T_2$ (а также исследования эффекта отражения волнового пакета), может быть использована полная система уравнений в перемещениях подобно [1].

Литература

1. Михасев Г.И. *О распространении осесимметричных изгибных волн в бесконечной цилиндрической оболочке* // Изв. АНБ. Сер. физ.-матем. наук. – 1994. – № 1. – С. 39–45.
2. Михасев Г.И. *О распространении изгибных волн в некруговой цилиндрической оболочке* // Изв. АН. МТТ. – 1994. – № 3. – С. 164–172.
3. Маслов В.П. *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.* – М.: Наука, 1977. – 384 с.
4. Михасев Г.И. *О комплексном ВКБ-решении задачи Коши для уравнения движения тонкой цилиндрической оболочки* // Докл. АНБ. – 1994. – Т. 38. – № 4. – С. 24–27.
5. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.М. *Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны.* – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 272 с.
6. Товстик П.Е. *Двумерные задачи устойчивости и колебаний оболочек нулевой гауссовой кривизны* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 271. – № 1. – С. 69–71.
7. Михасев Г.И. *Локальная потеря устойчивости оболочек нулевой кривизны с переменными толщиной и модулем упругости* // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1984. – № 7. – С. 104–106.

Витебский государственный педагогический институт

Поступила 05.06.1995