Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
Кафедра алгебры и математической логики

Направление: 010100.62 – математика
Специализация: алгебра

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

Простые лиевы пучки малых размерностей.

Работа завершена:
«____» _____2014 г. _____ Хабибуллина А.Р.
Работа допущена к защите:
Научный руководитель
доцент, кандидат (физико-математических наук)
«____» _____2014 г. _____Корешков Н.А.
Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук,
профессор
«____» _____2014 г. _____Арсланов М.М.

КАЗАНЬ — 2014

Оглавление

1. Введение 3

2. Основные определения.....4

3. Простые двумерные лиевы пучки.....6

4. Простые лиевы пучки ранга 2.....7

5. Простые лиевы пучки ранга 1.....9

6. Список литературы.....20

Введение

Конструкция алгебры Ли возникла в связи с решением задачи о разрешимости в квадратурах систем дифференциальных уравнений. Софус Ли, определивший эту конструкцию, показал, что система дифференциальных уравнений разрешима в квадратурах, тогда и только тогда, когда соответствующая Алгебра Ли разрешима. В дальнейшем было замечено, что некоторые решения систем дифференциальных уравнений могут быть обнаружены с помощью более общей конструкции, которая была названа лиевым пучком . Впервые лиевые пучки были введены в работах Кантора И.Л. и Персица Д.Б. в небольшой заметке опубликованной на девятой всесоюзной геометрической конференции в 1989 году.
В дальнейшем конструкция лиевых пучков использовалась при изучении вопроса интегрируемости некоторых гамильтоновых систем (см. [2],[3]). С другой стороны, в работе [4] были введены в рассмотрение *n*-кратные алгебры Ли. Для этих алгебр в [4],[5] были доказаны аналоги теорем Энгеля и Ли. Кроме того, конструкция *n*-кратной алгебры Ли при n=2 под названием бигамильтоновой операды рассматривалась в [6]. Как видно из приводимых ниже определений понятие лиева пучка и n-кратной алгебры Ли совпадают. Поэтому в данной работе используется термин *n*-кратный лиев пучок.

1 Основные определения.

Если $L-$векторное пространство над полем P, то обозначим через K пространство всех билинейных кососимметрических отображений из $L \times L$ в L.

Определение 1. Векторное пространство L над полем P называется n-кратным лиевым пучком, если существует n линейно независимых элементов $s_i, i = 1, 2, ..., n$ из K таких,что для любых элементов $a, b, c \in L$ и любых отображений s_i, s_j имеет место соотношение

$$J(a, b, c, s_i, s_j) + J(a, b, c, s_j, s_i) = 0, \tag{1}$$

где $J(a, b, c, s_i, s_j) = (as_ib)s_jc + (bs_ic)s_ja + (cs_ia)s_jb$. (Здесь xs_ky-образ пары $(x, y) \in L \times L$ при отображении s_k).

Данное определение с заменой термина "$n-$кратный лиев пучок"на "n-кратная алгебра Ли"использовалась в работах [4],[5].
Для отображений $s_i, i = 1, ..., n$ из K определим отображение $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i, \alpha_i \in P$, действующее по правилу $asb = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(as_ib)$. Возникающее таким образом пространство, являющееся линейной оболочкой отображений $s_1, ..., s_n$, обозначим S. Легко видеть, что для любых двух элементов s и $\tilde{s}$ из S имеет место $J(a, b, c, s, \tilde{s}) + J(a, b, c, \tilde{s}, s) = 0, a, b, c \in L$. Более того, если характеристика поля P отлична от двух, то соотношение (1) из определения 1, равносильно соотношениям

$$(asb)sc + (bsc)sa + (csa)sb = 0, a, b, c \in L, \tag{1'}$$

когда s пробегает все пространство умножений S.

Данное определение является определением лиева пучка из работы [1].

В дальнейшем лиев пучок $L = L(S)$ будем называть $n-$кратным лиевым пучком, если $dim_pS = n$.

Подпространство I в $L(S)$ называется идеалом лиева пучка $L(S)$, если $xsy \in I, \forall x \in I, \forall y \in L(S), \forall s \in S$.

Лиев пучок $L(S)$ называется простым, если он не содержит нетривиальных идеалов.

Подпространство B в $L(S)$ называется подалгеброй лиева пучка $L(S)$, если $xsy \in B, \forall x, y \in B, \forall s \in S$, т.е. $B(S)-$лиев пучок с пространством B.

Подпучком лиева пучка $L(S)$ называется пучок $L(S')$, когда $S'-$подпространство в S.

Определение 2. Сэндвичевой алгеброй $M_r(L, S)$ называется пара пространств L, S, содержащихся в пространстве матриц M_r($r-$порядок соответствующих матриц), удовлетворяющих условию $asb - bsa \in L$, когда $a, b \in L, s \in S$. (Здесь asb и $bsa-$обычные произведения матриц.)

Заметим, что для любого фиксированного $s \in S$ отображение $(a, b) \longrightarrow asb - bsa$ задает билинейное кососимметрическое отображение из $L \times L$ в L, удовлетворящее тождеству Якоби. Следовательно, сэндвичева алгебра удовлетворяет определению (1'),т.е. является лиевым пучком.

Для классификации простых лиевых пучков малых размерностей будем использовать их картановские подалгебры и соответствующие корневые разложения.

Лиев пучок $L = L(S)$ назовем нильпотентным, если существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $L^k(S) = 0$,где $L^{i+1}(S) = L^i(S)L(S), L^1(S) = L(S), i \geq 1$. Здесь произведением MN двух подпространств M и N из $L(S)$ является подпространство $\langle msn, \forall m \in M, \forall n \in N, \forall s \in S\rangle_P$.

Лиев пучок $L = L(S)$ назовем разрешимым, если существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $L^{(k)}(S) = 0$,где $L^{(i)}(S) = L^{(i-1)}(S)L^{(i-1)}(S), L^{(0)}(S) = L(S), i \geq 0$.

Картановской подалгеброй лиева пучка $L(S)$ назовем подпространство H в L, которое является нильпотентной подалгеброй и совпадает со своим нормализатором $N_{L(S)}(H) = \{x \in L | hsx \in H, \forall h \in H, \forall s \in S\}$.

В работе [5] доказано, что любой лиев пучок над бесконечным полем содержит картановскую подалгебру H, которая является нульпространством L_0 относительно некоторой пары $(x_0, s_0) \in L \times S$, т.е. $L_0 = \{x \in L | (ad_{s_0} x_0)^k x = 0, k \in \mathbb{N}\}$, где ad_{s_0}-оператор левого умножения , определенный элементом $s_0 \in S$. (Пару $(x_0, s_0) \in L \times S$ назовем регулярной, если $dim_P L_0$ минимальна,а размерность H назовем рангом лиева пучка $L(S)$ и обозначим $rL(S)$.)

Определение 3. Лиев пучок $L(S)$ изоморфен сэндвичевой алгебре $M_r(L', S')$, если существуют изоморфизмы векторных пространств $\varphi : L \to L', \psi : S \to S'$ такие, что для любых элементов $a, b \in L$ и любого $s \in S$ имеет место равенство $\varphi(asb) = \varphi(a)\psi(s)\varphi(b) - \varphi(b)\psi(s)\varphi(a)$.

2 Простые двумерные лиевы пучки.

Пусть размерность пространства $L = 2$. Тогда очевидно, что размерность картановской подалгебры у простого лиева пучка $L(S)$, когда $dimL = 2$, равна 1. Тогда корневое разложение алгебры Ли $L(s_0)$ имеет вид $L = H \oplus L_1$, где $H = \langle h \rangle, L_1 = \langle e \rangle$, причем $hs_0e = \alpha e, \alpha \neq 0$, т.е. корневое подпространство L_1 имеет размерность 1 и совпадает с пространством собственных векторов, отвечающих собственному значению α. Теперь рассмотрим лиев пучок $L(S)$, где $S = \langle s_0, s \rangle$, пространство умножений с базисом умножений s_0, s. Заметим, что соотношение (1) в силу его линейности, достаточно проверить только для базисных элементов.

Напишем условие согласования, вытекающее из соотношения (1). В качестве a, b, c, берем e, h, e.

Таблица умножения имеет вид:
$hs_0e = e$
$hse = Ah + Be$

Условие согласования:
$(es_0h)se+(hs_0e)se+(es_0e)sh+(esh)s_0e+(hse)s_0e+(ese)s_0h = 0+0+0-Ae+Ae+0 = 0.$
Т.е. условие согласования выполняется тривиальным образом.

Умножение s заменяем на $\tilde{s}$ по формуле:
$s \longrightarrow \tilde{s} = s + \lambda s_o.$
$h\tilde{s}e = Ah + Be + \lambda e$, в качестве λ возьмем $\lambda = -B \to h\tilde{s}e = Ah \to h\tilde{s}e = h$. $A \neq 0$, т.к. $L(s)-$ простой лиев пучок.

Возьмем еще одно умножение $hs_1e = \alpha e + \beta h$.
Тогда легко видеть, что
$s_1 = \alpha s_0 + \beta \tilde{s}$.
Т.е. любой $n-$кратный лиев пучок размерности два, является двукратным лиевым пучком.

Пусть $I \lhd L(s_0, s)$ идеал, $0 \neq x = \alpha e + \beta h \in I$.
$(xs_0e) = \beta(hs_0e) = \beta e$, если $\beta \neq 0 \to e \in I$, а также $e\tilde{s}h = h \to h \in I$, т.о. идеал I совпадает со всей алгеброй.
А если $\beta = 0$,то $x = \alpha e \in I$ и $h = e\tilde{s}h \in I$,т.е. и в этом случае идеал I совпадает со всей алгеброй.

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2.1. *Пусть $L(S)$-двумерный $n-$кратный лиев пучок,$n > 1$. Тогда $n = 2$ и имеется ровно один двумерный двухкратный лиев пучок, который к тому же является простым, таблица умножения в котором, имеет вид:*
$hs_0e = e$
$hse = h$
$hs_0h = es_0e = 0$
$hsh = ese = 0.$

Полученный пучок изоморфен сэндвичевой алгебре $M_2(L', S')$, где $L' = \langle E_{11}, E_{21} \rangle, S' = \langle E_{11}, E_{12}, \rangle$ а изоморфизмы φ и ψ определяются формулами: $\varphi(h) = E_{11}, \varphi(e) = E_{21}, \psi(s_0) = E_{11}, \psi(s) = E_{12}$.

3 Простые лиевы пучки ранга 2.

Далее изучим ситуации,когда размерность лиева пучка $L(S)$ равна трем. Вначале, рассмотрим случай, когда ранг лиева пучка $L(S)$ равен двум, т.е. имеется картановская подалгебра $H, dimH = 2$.

Пусть h_1, h_2–некоторый базис в H. Картановская подалгебра $H = \langle h_1, h_2 \rangle$-нильпотентна, поэтому алгебра Ли $H(s), \forall s \in S$, также нильпотентна.
Из монографии [7], известно, что нильпотентная алгебра Ли, размерности два, может быть только абелева алгебра Ли.

Пусть s_0-умножение в $L(S)$, которое фигурирует в определении нильпотентности H. Тогда $L(s_0) = H \oplus L_\alpha-$ разложение на корневые подпространства алгебры Ли $L(s_0)$, относительно картановской подалгебры H,
где
$H = L_0 = \{x \in L | (ad_{s_0} h)^m x = 0, \forall h \in H\}$,
$L_\alpha = \{x \in L | (ad_{s_0} h - \alpha(h)E)^m x = 0, \forall h \in H\}$.

Т.к. $dimL = 3$,а $dimH = 2$, то $dimL_\alpha = 1$ и $L_\alpha = \langle e \rangle$.
Кроме того, в силу одномерности L_α, имеем $hs_0e = \alpha(h)e, \forall h \in H$.
Т.к. $H \neq L$ и функция $\alpha-$ не нулевая, то существует базис в H, что

$$\left.\begin{array}{c} h_1 s_0 e = e \\ h_2 s_0 e = 0 \\ h_1 s_0 h_2 = 0 \end{array}\right\} (*)$$

Т.к. $dimS > 1$, то обозначим через s еще один базисный элемент пространства S, отличный от s_0. Пусть формулы умножения для s имеют вид:

$$\left.\begin{array}{c} h_1 se = A_1 h_1 + A_2 h_2 + Ce \\ h_2 se = B_1 h_1 + B_2 h_2 + De \\ h_1 s h_2 = 0 \end{array}\right\} (**)$$

Проверим согласованность этих умножений:

$(h_1 s_0 h_2)se + (h_2 s_0 e)sh_1 + (es_0 h_1)sh_2 + (h_1 sh_2)s_0 e + (h_2 se)s_0 h_1 + (esh_1)s_0 h_2 = 0.$
Из этого следует
$-esh_2 + (B_1 h_1 + B_2 h_2 + De)s_0 h_1 + (-A_1 h_1 - A_2 h_2 - Ce)s_0 h_2 = 0.$
После упрощений, имеем
$B_1 h_1 + B_2 h_2 = 0$, т.е.
$B_1 = 0$
$B_2 = 0.$

Далее заменим умножение s на $\hat{s}$ по формуле
$s \longrightarrow \hat{s} = s + \lambda s_o$
$h_1 \hat{s} e = A_1 h_1 + A_2 h_2 + Ce + \lambda e$, в качестве λ возьмем $\lambda = -C \to h_1 \hat{s} e = A_1 h_1 + A_2 h_2$.

Т.к. $L(s)$-является алгеброй Ли, то проведем проверку тождества Якоби для этой алгебры:
$(h_1se)sh_2 + (esh_2)sh_1 + (h_2sh_1)se = 0$
$D(A_1h_1 + A_2h_2) = 0$
$\Rightarrow DA_1 = 0$
$\Rightarrow DA_2 = 0$

1 случай. $D = 0$. Тогда таблицы $(*)$ и $(**)$ примут вид:
$h_1s_0e = e$
$h_2s_0e = 0$
$h_1s_0h_2 = 0$
$h_1se = A_1h_1 + A_2h_2$
$h_2se = 0$
$h_1sh_2 = 0$
Отсюда следует, что $\langle e, A_1h_1 + A_2h_2\rangle \lhd L(S), S = \langle s_0, s\rangle$.

Теперь рассмотрим 2 случай,когда $A_1 = A_2 = 0$.
В этом случае таблица имеет вид:
$h_1\tilde{s}e = 0$
$h_2\tilde{s}e = De$
$h_1\tilde{s}h_2 = 0$
$h_1s_0e = e$
$h_2s_0e = 0$
$h_1s_0h_2 = 0$
Следует, что $\langle e\rangle \lhd L(S), S = \langle s_0, \tilde{s}\rangle$

Если пространство S натянуто на умножения $s_0, s, \tilde{s}$, то пучок $L(s_0, s, \tilde{s})-$ также имеет идеал $I = \langle e, A_1h_1 + A_2h_2\rangle$.

Пространство умножений $S = \langle s_0, s, \tilde{s}\rangle$ не может быть больше расширенно, т.к. любое другое умножение $\hat{s}$ либо $\hat{s} = \frac{\hat{D}}{D}\tilde{s}$, либо $\hat{s} = s\frac{\hat{A}_2}{A_2} + s_0\hat{A}_1$. Поэтому в пучке $L(S), dimL = 3, dimS > 1$, ранга два, всегда имеется нетривиальный идеал.

4 Простые лиевы пучки ранга 1.

В этом случае возможны два вариата.
Рассмотрим случай, когда ранг лиева пучка $L(S)$ равен единице, т.е. существует картановская подалгебра $H, dimH = 1$ и имеет место картановское разложение $L(s_0) = H \oplus L_{\alpha_1} \oplus L_{\alpha_2}, dimL_{\alpha_i} = 1, i = 1, 2$, либо $L(s_0) = H \oplus L_\alpha, dimL_\alpha = 2$.
В первом случае $L_{\alpha_i} = \langle e_i \rangle, i = 1, 2$.
$hs_0e_i = \alpha_i(h)e_i$.

Таблица умножения в этом случае имеет вид:
$e_1s_0e_2 = 0$
$e_1s_0h = \alpha e_1$
$e_2s_0h = \delta e_2$
$e_1s_1e_2 = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3h$
$e_1s_1h = B_1e_1 + B_2e_2 + B_3h$
$e_2s_1h = C_1e_1 + C_2e_2 + C_3h$

Проверим согласованность этих умножений:
$(e_1s_0e_2)s_1h+(e_2s_0h)s_1e_1+(hs_0e_1)s_1e_2+(e_1s_1e_2)s_0h+(e_2s_1h)s_0e_1+(hs_1e_1)s_0e_2 = \delta e_2s_1e_1+(-\alpha e_1)s_1e_2+(A_1e_1+A_2e_2+A_3h)s_0h+(C_1e_1+C_2e_2+C_3h)s_0e_1-(B_1e_1+B_2e_2+B_3h)s_0e_2 = -\delta A_1e_1 - \delta A_2e_2 - \delta A_3h - \alpha A_1e_1 - \alpha A_2e_2 - \alpha A_3h + A_1\alpha e_1 + A_2\delta e_2 - C_3\alpha e_1 + B_3\delta e_2 = (-\delta A_1 - C_3\alpha)e_1 + (-\alpha A_2 + B_3\delta)e_2 + (-\delta A_3 - \alpha A_3)h = 0.$

Отсюда следует,что
$\delta A_1 + C_3\alpha = 0 \Rightarrow A_1 = -C_3(\frac{\alpha}{\delta})$
$-\alpha A_2 + B_3\delta = 0 \Rightarrow A_2 = B_3(\frac{\delta}{\alpha})$
$\delta A_3 + \alpha A_3 = 0 \Rightarrow A_3(\delta + \alpha) = 0 \Rightarrow A_3 = 0$, т.к. $\alpha \neq -\delta$, в противном случае получается что $\alpha = -\delta$. А этого быть не может,т.к. если $\alpha = -\delta$, то тогда имеется умножение, относительно которого, данный пучок является простой трехмерной алгеброй Ли.

Проверка тождества Якоби для $L(s_1)$:
$(e_1s_1e_2)s_1h + (e_2s_1h)s_1e_1 + (hs_1e_1)s_1e_2 = 0$
$(A_1e_1 + A_2e_2 + A_3h)s_1h + (C_1e_1 + C_2e_2 + C_3h)s_1e_1 + (-B_1e_1 - B_2e_2 - B_3h)s_1e_2 = 0$
$A_1(B_1e_1 + B_2e_2 + B_3h) + A_2(C_1e_1 + C_2e_2 + C_3h) - C_2(A_1e_1 + A_2e_2 + A_3h) - C_3(B_1e_1 + B_2e_2 + B_3h) - B_1(A_1e_1 + A_2e_2 + A_3h) + B_3(C_1e_1 + C_2e_2 + C_3h) = 0$

После упрощения получается:
$A_2C_1 - C_2A_1 - C_3B_1 + B_3C_1 = 0$
$A_1B_1 - C_3B_2 - B_1A_2 + B_3C_2 = 0$
$A_1B_3 + A_2C_3 = 0$
В полученные выражения подставим A_1 и A_2.

Отсюда следует, что
$B_3\frac{\delta}{\alpha}C_1 + C_3\frac{\alpha}{\delta}C_2 - C_3B_1 + B_3C_1 = 0$
$-C_3\frac{\alpha}{\delta}B_1 - C_3B_2 - B_1B_3\frac{\delta}{\alpha} + B_3C_2 = 0$
$-C_3\frac{\alpha}{\delta}B_3 + B_3\frac{\delta}{\alpha}C_3 = 0$

С помощью замены $\tilde{s} = s_0 + \lambda s_1$, сделаем, чтобы $B_1 = 0$.

Далее возьмем умножение равное линейной комбинации умножений s_0 и s_1:
$e_1(xs_0 + ys_1)e_2 = yA_1e_1 + A_2e_2$
$e_1(xs_0 + ys_1h = x\alpha e_1 + y(B_2e_2 + B_2h)$
$e_2(xs_0 + ys_1h = x\delta e_2 + y(C_1e_1 + C_2e_2 + C_3h)$

Запишем определитель матрицы,составленный из данных элементов.
Если определитель не будет равен нулю, то существует такое умножение, относительно которого, пучок $L(S)$ будет содержать простую трехмерную алгебру Ли.
Поэтому

$$\begin{vmatrix} yA_1 & A_2 & 0 \\ x\alpha & yB_2 & yB_3 \\ yC_1 & x\delta + C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

$y^2A_1B_2C_3 + y^2A_2B_3C_1 - y^2A_1B_3(x\delta + C_2) - A_2C_3x\alpha = 0$

Отсюда следует, что
$A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 - A_1B_3C_2 = 0$
$A_1B_3\delta = 0$
$A_2C_3\alpha = 0$

Запишем все полученные ограничения :
$-B_2C_3^2\frac{\alpha}{\delta} + B_3^2\frac{\delta}{\alpha}C_1 - B_3C_2C_3\frac{\alpha}{\delta} = 0$
$C_3\frac{\alpha}{\delta}B_3 = 0$
$B_3\frac{\delta}{\alpha}C_3 = 0$
$B_3C_3(-\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\delta}{\alpha}) = 0$
$C_3B_2 + B_3C_2 = 0$
$B_3\frac{\delta}{\alpha}C_1 + C_2C_3\frac{\alpha}{\delta} + B_3C_1 = 0$
$A_1 = -C_3\frac{\alpha}{\delta}$
$A_2 = B_3\frac{\delta}{\alpha}$
$A_3 = B_1 = 0$
Здесь $\delta \neq -\alpha$, т.к. в противном случае $L(s_0)$-простая трехмерная алгебра Ли.

Любой пучок $L(S)$ с условием, что $L(s_0)-$ простая трехмерная алгебра Ли, где $s_0 \in L$ является простым.

Пусть формулы умножения для s_0 следующие:
$e_1se_2 = h$
$e_1sh = -e_2$
$e_2sh = e_1$

и $\hat{s}$ еще одно умножение из S, определенное формулами:

$$\left.\begin{array}{r} e_1\hat{s}e_2 = \lambda_{11}e_1 + \lambda_{12}e_2 + \lambda_{13}h \\ e_1\hat{s}h = \lambda_{21}e_1 + \lambda_{22}e_2 + \lambda_{23}h \\ e_2\hat{s}h = \lambda_{31}e_1 + \lambda_{32}e_2 + \lambda_{33}h \end{array}\right\} (2)$$

Тогда из условий согласованности операций s и $\hat{s}$ имеем

$$\lambda_{12} + \lambda_{23} = 0, \lambda_{11} - \lambda_{33} = 0, \lambda_{32} + \lambda_{21} = 0. \tag{3}$$

Если $\tilde{s}$-еще одно умножение, согласованное с s, то легко проверить, что оно будет согласованно и с $\hat{s}$. Т.к. размерность пространства матриц , определяющих умножения из S по формулам (2) равна шести, то получаем следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть $L(S)-$ трехмерный $n-$кратный лиев пучок над алгебраически замкнутым полем и в пространстве S имеется умножение s, для которого $L(s)-$простая трехмерная алгебра Ли. Тогда $n = 1, ..., 6$ и для любого n из этого множества соответствующий пучок является простым.*

Если $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, то

$$[E_1, E_2] = H, [E_2, H] = E_1, [H, E_1] = E_2.$$

С другой стороны, для любой симметрической матрицы $S' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & f \\ c & f & k \end{pmatrix}$, имеются соотношения:
$E_1 S' E_2 - E_2 S' E_1 = -f E_1 - b E_2 + dH$
$E_1 S' H - H S' E_1 = -e E_1 - a E_2 + bH$
$E_2 S' H - H S' E_2 = k E_1 + e E_2 - fH.$

Т.е. матрица $\begin{pmatrix} -f & -b & d \\ -c & -a & b \\ k & c & -f \end{pmatrix}$ удовлетворяет соотношениям (3).

Следовательно, каждый указанный в теореме 4.1. лиев пучок $L(S)$ изоморфен сэндвичевой алгебре $M_3(L', T)$ с пространством $L' = \langle E_1, E_2, H \rangle$ и $T-$ подпространство в пространстве всех симметрических матриц. Отображения, задающее изоморфизм, определяются равенствами:
$\varphi(e_1) = E_1, \varphi(e_2) = E_2, \varphi(h) = H.$
$\psi(\tilde{s}) = S'$ для любого $\tilde{s} \in S$ и соответсвующей матрицы S' из пространства симметрических матриц третьего порядка.
Таким образом теорему 4.1. можно переформулировать в следующем виде:

Теорема 4.2. *Если в пространстве умножений S, трехмерного лиева пучка $L(S)$, имеется умножение s_0, относительно которого $L(s_0)-$ простая трехмерная алгебра Ли, то $L(S) = M_3(R, T)$, где $R-$ пространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P), T-$ любое подпростанство в пространстве всех симметрических матриц в $M_3(P)$, содержащее $\langle E \rangle, (E$-единичная матрица). В частности, когда $T = \langle E \rangle$, пучок $L(S)-$ это простая трехмерная алгебра Ли.*

Поэтому далее рассмотрим случай, когда $-\alpha^2 + \delta^2 \neq 0$. Тогда либо $B_3 = 0$, либо $C_3 = 0$.

1) Рассмотрим первый случай, когда $B_3 = 0$.
Из условий согласования, получается, что $A_2 = 0$.
$C_3B_2 = 0$.
$C_2C_3 = 0$.
Откуда следует, что

1.1.Либо $C_3 = 0$. И тогда $A_1 = 0$ и таблица имеет вид:
$e_1s_0e_2 = 0$
$e_1s_0h = \alpha e_1$
$e_2s_0h = \delta e_2$
$e_1s_1e_2 = 0$
$e_1s_1h = B_2e_2$
$e_2s_1h = C_1e_1 + C_2e_2$
Здесь $\langle e_1, e_2\rangle \lhd L(S)$.

1.2. Либо $B_2 = C_2 = 0$,тогда таблица запишется в виде:
$e_1s_0e_2 = 0$
$e_1s_0h = \alpha e_1$
$e_2s_0h = \delta e_2$
$e_1s_1e_2 = A_1e_1$
$e_1s_1h = 0$
$e_2s_1h = C_1e_1 + C_3h$
Здесь $\langle e_1\rangle \lhd L(S)$.

2) Далее рассмотрим случай, когда $C_3 = 0$.
Пусть $C_3 = 0$, отсюда будет следовать, что $A_1 = 0$
$B_3C_1 = 0$
$B_3C_2 = 0$
Возникают 2 подслучая:

2.1.Либо $B_3 = 0$. Откуда следует, что $A_2 = 0$
и получим следующую таблицу:
$e_1s_0e_2 = 0$
$e_1s_0h = \alpha e_1$
$e_2s_0h = \delta e_2$
$e_1s_1e_2 = 0$
$e_1s_1h = B_2e_2$
$e_2s_1h = C_1e_1 + C_2e_2$
Здесь $\langle e_1, e_2\rangle \lhd L(S)$.

2.2. Либо $C_1 = C_2 = 0$.
Получим таблицу:
$e_1s_0e_2 = 0$
$e_1s_0h = \alpha e_1$
$e_2s_0h = \delta e_2$
$e_1s_1e_2 = A_2e_2$
$e_1s_1h = B_2e_2 + B_3h$
$e_2s_1h = 0$
Здесь $\langle e_2\rangle \lhd L(S)$.

Теперь для 1) запишем третье умножение:
$e_1\hat{s}e_2 = A'_1e_1 + A'_2e_2 + A'_3h$
$e_1\hat{s}h = B'_1e_1 + B'_2e_2 + B'_3h$
$e_2\hat{s}h = C'_1e_1 + C'_2e_2 + C'_3h$

После проверки согласованности с s_0 получается таблица:
$e_1\hat{s}e_2 = A'_1e_1$
$e_1\hat{s}h = 0$
$e_2\hat{s}h = C'_1e_1 + C'_3h$

Возьмем умножение равное линейной комбинации $s_0, s_1, \hat{s}$.
$e_1(xs_0 + ys + z\hat{s})e_2 = zA'_1e_1$
$e_1(xs_0 + ys + z\hat{s})h = x\alpha e_1 + yB_2e_2$
$e_2(xs_0 + ys + z\hat{s})h = x\delta e_2 + y(C_1e_1 + C2e_2) + z(C'_1e_1 + C'h)$

Запишем определитель матрицы,составленный из получающейся матрицы коэффициентов.
Если определитель не будет равен нулю, то существует такое умножение, относительно которого пучок $L(S)$, будет содержать простую трехмерную алгебру Ли.
Поэтому

$$\begin{vmatrix} zA'_1 & 0 & 0 \\ x\alpha & yB_2 & 0 \\ yC_1 + zC_1 & x\delta + yC_2 & zC'_3 \end{vmatrix} = 0$$

Т.е. $z^2yA'_1B_2C'_3 = 0$.

Отсюда следует, что
$A'_1B_2C'_3 = 0$

Если $B_2 \neq 0$, то $A'_1 = C'_3 = 0$. Тогда относительно трех умножений, с таблицами
$e_1s_0e_2 = 0$
$e_1s_0h = \alpha e_1$
$e_2s_0h = \delta e_2$
$e_1s_1e_2 = 0$
$e_1s_1h = B_2e_2$
$e_2s_1h = C_1e_1 + C_2e_2$
$e_1\hat{s}e_2 = 0$
$e_1\hat{s}h = 0$
$e_2\hat{s}h = C'_1e_1$
имеется двумерный идеал $\langle e_1, e_2\rangle \lhd L(S)$.

А если $B_2 = 0$, то относительно трех умножений, с таблицами
$e_1s_0e_2 = 0$
$e_1s_0h = \alpha e_1$
$e_2s_0h = \delta e_2$
$e_1s_1e_2 = 0$
$e_1s_1h = 0$
$e_2s_1h = C_1e_1 + C_2e_2$

$e_1\hat{s}e_2 = A_1'e_1$
$e_1\hat{s}h = 0$
$e_2\hat{s}h = C_1'e_1 + C_3'h$
имеется одномерный идеал $\langle e_1\rangle \lhd L(S)$.

Таким образом, для любого пучка $L(S), dimS = 3$ ранга 1, не содержащего простых трехмерных алгебр Ли, всегда существует либо одномерный, либо двумерный идеал. Поэтому пучок $L(S)$ не является простым.

Пусть $dimS \geq 3$. Если существует $s \in S$, для которого таблица умножения имеет вид:
$e_1se_2 = 0$
$e_1sh = B_2e_2, B_2 \neq 0$
$e_2sh = C_1e_1 + C_2e_2,$

то для любого $\tilde{s} \notin \langle s_0, s\rangle$ имеют место следующие формулы:
$e_1\tilde{s}e_2 = 0$
$e_1\tilde{s}h = 0$
$e_2\tilde{s}h = C_1'e_2.$

Т.е. $dimS = 3$, и $\langle e_1, e_2\rangle \lhd L(S)$.

Если существует $s \in S, s \notin \langle s_0\rangle$ с таблицей умножения:
$e_1se_2 = 0$
$e_1sh = 0$
$e_2sh = C_1e_1 + C_2e_2,$

то для любого $\tilde{s} \notin \langle s_0, s\rangle$ имеют место следующие формулы:
$e_1\tilde{s}e_2 = A_1'e_1$
$e_1\tilde{s}h = 0$
$e_2\tilde{s}h = C_1'e_1 + C_3'h.$

Т.е. $\langle e_1\rangle \lhd L(S)$, для любого $S, dimS \geq 3$.

Аналогично для случая 2.
$e_1\bar{s}e_2 = A_1''e_1 + A_2''e_2 + A_3''h$
$e_1\bar{s}h = B_1''e_1 + B_2''e_2 + B_3''h$
$e_2\bar{s}h = C_1''e_1 + C_2''e_2 + C_3''h$

После проверки согласованности с s_0 получается таблица:
$e_1\bar{s}e_2 = A_2''e_2$
$e_1\bar{s}h = B_2''e_2 + B_3''h$
$e_2\bar{s}h = 0$

Возьмем умножение равное линейной комбинации $s_0, s_1, \bar{s}$.
$e_1(xs_0 + ys + z\bar{s})e_2 = zA_2''e_2$
$e_1(xs_0 + ys + z\bar{s})h = x\alpha e_1 + yB_2e_2 + z(B_2''e_2 + B_3''e_3)$
$e_2(xs_0 + ys + z\bar{s})h = x\delta e_2 + y(C_1e_1 + C_2e_2)$

Запишем определитель матрицы,составленный из получающейся матрицы коэффициентов.

Опять если определитель не будет равен нулю, то существует такое умножение, относительно которого пучок $L(S)$, будет содержать простую трехмерную алгебру Ли.
Поэтому

$$\begin{vmatrix} 0 & zA_2'' & 0 \\ x\alpha & yB_2 + zB_2'' & B_3'' \\ yC_1 & x\delta + yC_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Т.е. $zyA_2''B_3''C_1 = 0$

Отсюда следует, что
$A_2''B_3''C_1 = 0$

Если $C_1 \neq 0$, то $A_2'' = B_3'' = 0$. Тогда относительно трех умножений, с таблицами
$e_1 s_0 e_2 = 0$
$e_1 s_0 h = \alpha e_1$
$e_2 s_0 h = \delta e_2$
$e_1 s_1 e_2 = 0$
$e_1 s_1 h = B_2 e_2$
$e_2 s_1 h = C_1 e_1 + C_2 e_2$
$e_1 \bar{s} e_2 = 0$
$e_1 \bar{s} h = B_2'' e_2$
$e_2 \bar{s} h = 0$
имеется двумерный идеал $\langle e_1, e_2 \rangle \lhd L(S)$.

А если $C_1 = 0$, то относительно трех умножений, с таблицами
$e_1 s_0 e_2 = 0$
$e_1 s_0 h = \alpha e_1$
$e_2 s_0 h = \delta e_2$
$e_1 s_1 e_2 = 0$
$e_1 s_1 h = B_2 e_2$
$e_2 s_1 h = C_2 e_2$
$e_1 \bar{s} e_2 = A_2'' e_2$
$e_1 \bar{s} h = B_2'' e_2 + B_3'' h$
$e_2 \bar{s} h = 0$
имеется одномерный идеал $\langle e_2 \rangle \lhd L(S)$.

Таким образом, для любого пучка $L(S), dimS = 3$ ранга 1, не содержащего простых трехмерных алгебр Ли, всегда существует либо одномерный, либо двумерный идеал. Поэтому пучок $L(S)$ не является простым.

Как выше: Пусть $dimS \geq 3$ и существует $s_1 \in S, s_1 \notin \langle s_0 \rangle$ для которого
$e_1 s_1 e_2 = 0$
$e_1 s_1 h = B_2 e_2$
$e_2 s_1 h = C_1 e_1 + C_2 e_2, C_1 \neq 0.$

Тогда $dimS = 3$ и $\langle e_1, e_2 \rangle \lhd L(S)$.

Если существует $s_1 \in S, s_1 \notin \langle s_0 \rangle$ для которого
$e_1 s_1 e_2 = 0$
$e_1 s_1 h = B_2 e_2$
$e_2 s_1 h = C_2 e_2,$

то для любого $\tilde{s} \in S, \tilde{s} \notin \langle s_0, s_1 \rangle$:
$e_1 \tilde{s} e_2 = A_2'' e_2$
$e_1 \tilde{s} h = B_2'' e_2 + B_3'' h$
$e_2 \tilde{s} h = 0.$

Т.е. $\langle e_2 \rangle \lhd L(S)$ для любого $S, dimS \geq 3$.

Теперь рассмотрим случай, когда собственные вектора, отвечают одному собственному значению,т.е. $\alpha = \delta$.

Таблица умножения имеет вид:
$e_1 s_0 e_2 = 0$
$e_1 s_0 h = \alpha e_1$
$e_2 s_0 h = \alpha e_2$
$e_1 s_1 e_2 = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 h$
$e_1 s_1 h = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 h$
$e_2 s_1 h = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 h$
Т.к. e_1, e_2 отвечают одному собственному значению и алгебра Ли, натянутая на $\langle e_1, e_2 \rangle$ разрешима, то можно выбрать такой базис в ней, что $e_1 s_1 e_2 = e_1$.

Т.о. формулы умножения относительно s_1 имеют вид:
$e_1 s_1 e_2 = e_1$
$e_1 s_1 h = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 h$
$e_2 s_1 h = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 h$

Проверим согласованность этих умножений:
$(e_1 s_0 e_2) s_1 h + (e_2 s_0 h) s_1 e_1 + (h s_0 e_1) s_1 e_2 + (e_1 s_1 e_2) s_0 h + (e_2 s_1 h) s_0 e_1 + (h s_1 e_1) s_0 e_2 = 0$
$\alpha e_2 s_1 e_1 - \alpha e_1 s_1 e_2 + e_1 s_0 h + (C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 h) s_0 e_1 - (B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 h) s_0 e_2 =$
$-\alpha e_1 - \alpha e_1 + \alpha e_1 - C_3 \alpha e_1 - B_3 \alpha e_2 = 0$

Отсюда следует:
$-\alpha - C_3 \alpha = 0 \Rightarrow \alpha(1 + C_3) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$
$-B_3 \alpha = 0 \Rightarrow B_3 = 0.$

Проверим тождество Якоби для умножения s_1
$(e_1 s_1 e_2) s_1 h + (e_2 s_1 h) s_1 e_1 + (h s_1 e_1) s_1 e_2 = 0$
$e_1 s_1 h + (C_1 e_1 + C_2 e_2 - h) s e_1 - (B_1 e_1 + B_2 e_2) s_1 e_1 =$
$B_1 e_1 + B_2 e_2 - C_2 e_1 + B_1 e_1 + B_2 e_2 - B_1 e_1 = 0.$
Отсюда следует, что $B_1 - C_2 = 0$, а значит, $B_1 = C_2$.

Сделаем замену умножения s_1 на $\bar{s}$ по формуле:
$s_1 \Rightarrow \bar{s} = s_1 + \lambda s_0$.
$e_1 \bar{s} h = B_1 e_1 + B_2 e_2 - \lambda \alpha e_1$. Т.к. $\alpha \neq 0$, возьмем $\lambda = \frac{B_1}{\alpha}$.
Тогда $B_1 = C_2 = 0$

Далее рассмотрим умножение равное линейной комбинации s_0, s_1.
$e_1(x s_0 + y s_1) e_2 = y e_1$
$e_1(x s_0 + y s_1) h = x \alpha e_1 + y B_2 e_2$
$e_2(x s_0 + y s_1) h = x \alpha e_2 + y(C_1 e_1 + h)$

Запишем определитель матрицы,составленный из данных элементов.
Опять если определитель не будет равен нулю, то существует такое умножение, относительно которого пучок $L(S)$, будет содержать простую трехмерную алгебру Ли.
Поэтому

$$\begin{vmatrix} y & 0 & 0 \\ x\alpha & yB_2 & \\ yC_1 & x\alpha & y \end{vmatrix} = 0$$

Т.е. $y^3 B_2 = 0$, т.е. $B_2 = 0$.

После упрощения таблица имеет вид:
$e_1 s_1 e_2 = e_1$
$e_1 s_1 h = 0$
$e_2 s_1 h = C_1 e_1 - h$
Сделаем замену $h \Rightarrow h + \gamma e_1 = \bar{h}$.
$e_2 s_1 \bar{h} = e_2 s_1 (h + \gamma e_1) = e_2 s h + e_2 s \gamma e_1 = C_1 e_1 - h - \gamma e_1$.
В качестве γ возьмем $\gamma = C_1$.

Таблица примет вид:
$e_1 s_0 e_2 = 0$
$e_1 s_0 h = \alpha e_1$
$e_2 s_0 h = \alpha e_2$
$e_1 s_1 e_2 = e_1$
$e_1 s_1 h = 0$
$e_2 s_1 h = -h$

Возьмем теперь еще третье умножение $\tilde{s}$ с таблицей умножения:
$e_1 \tilde{s} e_2 = A_1' e_1 + A_2' e_2 + A_3' h$
$e_1 \tilde{s} h = B_1' e_1 + B_2' e_2 + B_3' h$
$e_2 \tilde{s} h = C_1' e_1 + C_2' e_2 + C_3' h$

Из условий согласования с s_0, получается, что $A_3 = 0$. Затем заменим s_0 на $\tilde{s} - \frac{A_1'}{\alpha} s_0$. В результате имеем $e_1 \tilde{s} e_2 = e_2$.(Здесь $\tilde{s}$ совпадает с $\tilde{s} - \frac{A_1}{\alpha} s_0$). Тогда $e_1 \tilde{s} e_2 = e_2$.

Проверим согласованность s_0 и $\tilde{s}$.
$(e_1 s_0 e_2)\tilde{s}h + (e_2 s_0 h)\tilde{s}e_1 + (h s_0 e_1)\tilde{s}e_2 + (e_1 \tilde{s} e_2)s_0 h + (e_2 \tilde{s} h)s_0 e_1 + (h s \tilde{s} e_1)s - 0e_2 = 0$
$\alpha e_2 \tilde{s} e_1 - \alpha e_1 \tilde{s} e_2 + e_2 s_0 h + (C_1' e_1 + C_2' e_2 + C_3' h)s_0 e_1 - (B_1' e_1 + B_2' e_2 + B_3' h)s_0 e_2 =$
$-\alpha e_2 - \alpha e_2 + \alpha e_2 - C_3' \alpha e_1 + B_3' \alpha e_2$
следует, что
$C_3' = 0, B_3' = 1$

Проверим тождество Якоби для умножения $\tilde{s}$.
$(e_1 \tilde{s} e_2)\tilde{s}h + (e_2 \tilde{s} h)\tilde{s}e_1 + (h \tilde{s} e_1)\tilde{s}e_2 = 0$
$e_1 \tilde{s} h + (C_1' e_1 + C_2' e_2)s e_1 - (B_1' e_1 + B_2' e_2 + h)\tilde{s}e_2 = C_1' e_1 + C_2' e_2 + C_1' e_2 - B_1' e_2 + C_1' e_1 + C_2' e_2 = 0$
следует, что
$C_1' = 0.$
$C_2' = B_1'$

Сделаем замену умножения s_1 на $\bar{s}$ по формуле:
$s_1 \Rightarrow \bar{s} = s_1 + \lambda s_0.$
$e_1 \bar{s} h = B_1' e_1 + B_2' e_2 - \lambda \alpha e_1$. Т.к. $\alpha \neq 0$, возьмем $\lambda = \frac{B_1'}{\alpha}$
Следует ,что $B_1' = C_2' = 0$

Далее рассмотрим умножение равное линейной комбинации s_0, s_1.
$e_1(x s_0 + y \tilde{s})e_2 = y e_2$
$e_1(x s_0 + y \tilde{s})h = x \alpha e_1 + y(B_2' e_2 + h)$
$e_2(x s_0 + y \tilde{s})h = x \alpha e_2 + y C_1' e_1$

Запишем определитель матрицы,составленный из данных элементов.

Опять если определитель не будет равен нулю, то существует такое умножение, относительно которого пучок $L(S)$, будет содержать простую трехмерную алгебру Ли.
Поэтому

$$\begin{vmatrix} 0 & y & 0 \\ x\alpha & yB_2' & y \\ yC_1' & x\alpha & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Т.е. $y^3 C_1' = 0$, т.е. $C_1' = 0$.

После упрощения таблица имеет вид:
$e_1 \tilde{s} e_2 = e_2$
$e_1 \tilde{s} h = B_2' e_2 + h$
$e_2 s_1 h = 0.$
Сделаем замену $h \Rightarrow h + \gamma e_2 = \bar{h}$.
$e_1 \tilde{s} \bar{h} = e_1 \tilde{s}(h + \gamma e_2) == B_2' e_2 + h + \gamma e_2$.
В качестве γ возьмем $\gamma = -B_2'$.

Таблица примет вид:
$e_1 s_0 e_2 = 0$
$e_1 s_0 h = \alpha e_1$
$e_2 s_0 h = \alpha e_2$
$e_1 \tilde{s} e_2 = e_2$
$e_1 \tilde{s} h = h$
$e_2 \tilde{s} h = 0$

Предположим что существует идеал $I \neq 0$.
Возьмем элемент $x \in I, x \neq 0$.
$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 h$.
$x s e_1 = -x_2 e_1$, если $x_2 \neq 0$, то $e_1 \in I$.
$x \tilde{s} e_1 = -x_2 e_2 - x_3 h$, если $x_2, x_3 \neq 0$, то $e_2, h \in I$.

Отсюда следует, что идеал совпадает со всей алгеброй. А значит пучок $L(S)$,где $S = \langle s_0, s_1, \tilde{s} \rangle$ является простым.

Легко видеть что получившийся простой лиев пучок $L(S), S = \langle s_0, s_1, \tilde{s} \rangle$, изоморфен сэндвичевой алгебре $M_3(R, T)$, где $R = \langle E_{11}, E_{21}, E_{31} \rangle$, а $T = \langle E_{11}, E_{12}, E_{13} \rangle$, если положить : $\varphi(h) = E_{11}, \varphi(e_1) = E_{21}, \varphi(e_2) = E_{31}$ и $\psi(s_0) = E_{11}, \psi(s_1) = E_{12}, \psi(\tilde{s}) = E_{13}$.

Теперь рассмотрим случай, когда собственные вектора, отвечают одному собственному значению и отностельно умножения s_1 алгебра является абелевой, т.е. таблица имеет вид:
$e_1 s_0 e_2 = 0$
$e_1 s_0 h = \alpha e_1$
$e_2 s_0 h = \alpha e_2$
$e_1 s_1 e_2 = 0$
$e_1 s_1 h = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 h$
$e_2 s_1 h = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 h$

Проверим согласованность этих умножений:
$(e_1 s_0 e_2) s_1 h + (e_2 s_0 h) s_1 e_1 + (h s_0 e_1) s_1 e_2 + (e_1 s_1 e_2) s_0 h + (e_2 s_1 h) s_0 e_1 + (h s_1 e_1) s_0 e_2 = 0$
$\alpha e_2 s_1 e_1 - \alpha e_1 s_1 e_2 + (C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 h) s_0 e_1 - (B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 h) s_0 e_2 = -C_3 \alpha e_1 + B_3 \alpha e_2 = 0$
Отсюда следует:
$C_3 = B_3 = 0$.

Проверим тождество Якоби для s_1.
$(e_1 s_1 e_2) s_1 h + (e_2 s_1 h) s_1 e_1 + (h s_1 e_1) s_1 e_2 = 0$
$(C_1 e_1 + C_2 e_2) s_1 e_1 + (-B_1 e_1 - B_2 e_2) s_1 e_2 = 0$.

Т.е. условие тождества Якоби выполняется тривиально.

С помощью замены $s_1 \Rightarrow \hat{s} = s_1 + \lambda s_0$
$e_1 \hat{s} h = B_1 e_1 + B_2 e_2 - \lambda \alpha e_1$. возьмем $\lambda = \frac{B_1}{\alpha}$. Т.о. $B_1 = 0$.

Таблица примет вид:
$e_1 s_0 e_2 = 0$
$e_1 s_0 h = \alpha e_1$
$e_2 s_0 h = \alpha e_2$
$e_1 s_1 e_2 = 0$
$e_1 s_1 h = B_2 e_2$
$e_2 s_1 h = C_1 e_1 + C_2 e_2$

Из приведенных формул видно, что $I = \langle e_1, e_2 \rangle$ является идеалом в $L(S)$, когда $dimS \geq 2$.

Рассмотрим случай, когда ранг лиева пучка $L(S)$ равен единице, т.е. существует картановская подалгебра $H, dimH = 1$ и имеет место картановское разложение $L(s_0) = H \oplus L_\alpha, dimL_\alpha = 2$.
$(ad_{s_0} h)(e_1) = \lambda e_1 + e_2$
$(ad_{s_0} h)(e_2) = \lambda e_2$

Таблица имеет вид:
$e_1 s_0 e_2 = 0$
$h s_0 e_1 = \lambda e_1 + e_2$
$h s_0 e_2 = \lambda e_2$
$e_1 s_1 e_2 = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 h$
$h s_1 e_1 = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 h$
$h s_1 e_2 = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 h$

Проверим согласованность этих умножений:
$(e_1 s_0 e_2) s_1 h + (e_2 s_0 h) s_1 e_1 + (h s_0 e_1) s_1 e_2 + (e_1 s_1 e_2) s_0 h + (e_2 s_1 h) s_0 e_1 + (h s_1 e_1) s_0 e_2 = 0$
$-\lambda e_2 s_1 e_1 + (\lambda e_1 + e_2) s_1 e_2 + (A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 h) s_0 h - (C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 h) s_0 e_1 +$
$(B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 h) s_0 e_2 =$
$\lambda(A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 h) + \lambda(A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 h) - A_1(\lambda e_1 + e_2) - A_2 \lambda e_2 + C_3(\lambda e_1 + e_2) + B_3 \lambda e_2 = 0.$

Отсюда следует
$\lambda A_1 + C_3 \lambda = 0$, т.е. $\lambda(A_1 + C_3) = 0$, а значит, $A_1 = -C_3$.
$\lambda A_2 - A_1 + C_3 + B_3 \lambda = 0$
$\lambda A_3 + \lambda A_3 = 0$, т.е. $A_1 = 0$.

Проверка тождества Якоби для s_1 :
$(e_1 s_1 e_2) s_1 h + (e_2 s_1 h) s_1 e_1 + (h s_1 e_1) s_1 e_2 = 0$
$(A_1 e_1 + A_2 e_2) s_1 h - (C_1 e_1 + C_2 e_2 - A_1 h) s_1 e_1 + (B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 h) s_1 e_2 =$
$-A_1(B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 h) - A_2(C_1 e_1 + C_2 e_2 - A_1 h) + C_2(A_1 e_1 + A_2 e_2) + A_1(B_1 e_1 +$
$B_2 e_2 + B_3 h) + B_1(A_1 e_1 + A_2 e_2) + B_3(C_1 e_1 + C_2 e_2 - A_1 h) = 0.$

Отсюда следует, что
$-A_2 C_1 + A_1 C_2 + A_1 B_1 + B_3 C_1 = 0$
$A_2 B_1 + B_3 C_2 = 0$
$A_2 A_1 - B_3 A_1 = 0$

С помощью замены s_1 на $\bar{s} = s_1 + \delta s_0$, имеем:
$h \bar{s} e_2 = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 h + \delta(\lambda e_2)$. Возьмем $\delta = -\frac{C_2}{\lambda}$. Тогда $C_2 = 0$.

Теперь возьмем умножение вида $(xs_0 + ys_1)$
$e_1(xs_0 + ys_1)e_2 = y(A_1e_1 + A_2e_2)$
$h(xs_0 + ys_1)e_1 = x(\lambda e_1 + e_2) + y(B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3)$
$h(xs_0 + ys_1)e_2 = x\lambda e_2 + y(C_1e_1 - A_1h)$
Если определитель матрицы не будет равен нулю, то существет такое умножение, относительно которого пучок $L(S)$, будет содержать простую трехмерную алгебру Ли.
Поэтому

$$\begin{vmatrix} A_1y & A_2y & 0 \\ x\lambda + yB_1 & x + yB_2 & yB_3 \\ yC_1 & x\lambda & -A_1 \end{vmatrix} = 0$$

Т.е. $-A_1^2y(x + yB_2) + y^3C_1B_3A_2 - y^2A_1B_3x\lambda + A_1A_2y(x\lambda + yB_1) = 0$
Отсюда следует, что
$C_1B_3A_2 = 0$
$-A_1^2B_2 + A_1A_2B_1 = 0$
$-A_1^2 + A_1A_2\lambda = 0$, следует, что $A_1 = A_2\lambda$.
$-A_1B_3\lambda = 0$
Здесь получается , что

1) Либо $B_3 = 0$, тогда из условий согласования $A_2B_1 = 0$.
Если $A_2 = 0$, то $A_1 = 0$, а значит и $C_3 = 0$.
Получится таблица:
$e_1s_0e_2 = 0$
$hs_0e_1 = \lambda e_1 + e_2$
$hs_0e_2 = \lambda e_2$
$e_1s_1e_2 = 0$
$hs_1e_1 = B_1e_1 + B_2e_2$
$hs_1e_2 = C_1e_1$
А если $B_1 = 0$, то получается , что $A_1A_2 = 0$, но $A_1 = \lambda A_2$, поэтому $A_1 = A_2 = 0$, значит и $C_3 = 0$.

Таблица примет вид:
$e_1s_0e_2 = 0$
$hs_0e_1 = \lambda e_1 + e_2$
$hs_0e_2 = \lambda e_2$
$e_1s_1e_2 = 0$
$hs_1e_1 = B_2e_2$
$hs_1e_2 = C_1e_1$

2) Либо $A_1 = 0$, тогда и $A_2, C_3 = 0$.
Из условий согласования $B_3\lambda = 0$. Т.к. $\lambda \neq 0$, то $B_3 = 0$.

Получается таблица:
$e_1 s_0 e_2 = 0$
$h s_0 e_1 = \lambda e_1 + e_2$
$h s_0 e_2 = \lambda e_2$
$e_1 s_1 e_2 = 0$
$h s_1 e_1 = B_1 e_1 + B_2 e_2$
$h s_1 e_2 = C_1 e_1$

Легко проверить, что все умножения согласованны между собой.
В любом случае имеется идеал $I = \langle e_1, e_2 \rangle$, когда $dimS = 2$.

Если $dimS > 2$, то дополнительные к $\langle s_0, s_1 \rangle$ базисные умножения в силу согласованности с s_0 будут давать таблицы аналогичные умножению s_1.
Следовательно, $\langle e_1, e_2 \rangle -$ идеал в лиевом пучке $L(S)$, когда $dimS \geq 2$.

Итогом наших исследований является следующая теорема.

Теорема 4.3. *Любой простой $n-$кратный лиев пучок над алгебраически замкнутым полем, размерности не превышающий 3, имеет следующий вид:*

1.$L(S) = M_3(R, T)$, *где $R-$ пространство всех кососимметрических матриц в $M_3(P), T-$ любое подпростанство в пространстве всех симметрических матриц в $M_3(P)$, содержащее $\langle E \rangle, (E$-единичная матрица). В частности, когда $T = \langle E \rangle$, пучок $L(S)-$ это простая трехмерная алгебра Ли.*

2.$L(S) = M_k(I, I^t), k = 2, 3.$ *где I-минимальный левый идеал в алгебре матриц $M_k(P), I^t = \{A \in M_k(P) | A^T \in I\}$. (Здесь A^T- транспонированная матрица).*

Список литературы:

[1] Кантор И.Л., Персиц Д.Б. *О замкнутых пучках линейных скобок Пуассона,* IX Всесоюзная геометрич. конф. (Штиинца, Кашинев, 1988), с.141.

[2]Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям* (Мир, М.,1989).

[3]Трофимов В.В., Фоменко А.Т. *Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений* (“Факториал”,”Проспериус”, Удмурт. Гос. ун-т, Ижевск, 1995).

[4]Корешков Н.А. *О нильпотентности n-кратных алгебр Ли и ассоциативных n-кратных алгебр*, Изв. вузов. Матем., № 2, 33-38 (2010).

[5]Корешков Н.А. *Теоремы Ли и Энгеля для n-кратных алгебр Ли*, Сиб. матем. журнал. 54(3), 601-609(2013).

[6] Доценко В.В., Хорошкин А.С. *Формула характера операды пары согласованных скобок и бигамильтоновой операды*, Функц. анализ и его прилож. 41(1), 1-22(2007).

[7] Джекобсон Н.*Алгебры Ли* (Мир, М., 1964).