ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 12 (511)

УДК 519.10

В.М. КРАВЦОВ

О НОВЫХ СВОЙСТВАХ МАКСИМАЛЬНО НЕЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Введение

Известно [1], что трехиндексная аксиальная задача о назначениях, имеющая многочисленные приложения [2]–[4], является NP-полной. Сложное строение нецелочисленных вершин многогранника $M(3,n)=\Big\{x=\|x_{ijt}\|_n : x_{ijt}\geq 0\ \forall (i,j,t)\in N_n^3,\ \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n x_{ijt}=1\ \forall t\in N_n,\ \sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{t=1}^n x_{ijt}=1\ \forall j\in N_n,\ \sum\limits_{j=1}^n\sum\limits_{t=1}^n x_{ijt}=1\ \forall i\in N_n\Big\}$, где $N_n=\{1,2,\dots,n\}$, $n\geq 2$, $N_n^3=N_n\times N_n\times N_n$, порожденного условиями этой задачи, создает принципиальные трудности при его исследовании.

Для современных исследований свойств многогранника $M(3,n)$ характерны следующие два направления. К первому направлению относятся работы [5]–[7], в которых изучаются граневые структуры и фасеты (грани максимальной размерности) многогранника $M(3,n)$. Основным объектом исследований второго направления являются его нецелочисленные вершины [8]–[14]. Примеры нецелочисленных вершин этого многогранника встречались давно [15], но само понятие s-нецелочисленной вершины введено совсем недавно. Напомним [9], [11] это понятие. Вершина многогранника $M(3,n)$ называется s-нецелочисленной, если она содержит ровно s нецелочисленных (дробных) компонент. Упомянем два результата, относящихся ко второму направлению.

1) Для любого числа $s\in\{4,6,7,\dots,3n-2\}$, и только для него, у многогранника $M(3,n)$ существуют s-нецелочисленные вершины [12].
2) Оценки снизу числа $\sigma(n,s)$ s-нецелочисленных вершин многогранника $M(3,n)$ [9], [11], [13], позволившие опровергнуть гипотезу 18 из [16]. С помощью этих оценок и явных формул для $\sigma(n,4)$ и $\sigma(n,6)$ [11] в [9] получены оценки снизу числа нецелочисленных вершин многогранника $M(p,n)$ p-индексной ($p\geq 3$) аксиальной задачи о назначениях, которые значительно улучшают оценку из [8].

Так как всякая вершина многогранника $M(3,n)$ содержит не более чем $3n-2$ положительных компонент [15], то $(3n-2)$-нецелочисленные вершины этого многогранника будем называть максимально нецелочисленными вершинами (м. н. в.). К настоящему времени известно [10], [14] $(n-\left[\frac{n}{2}\right]-3)(\left[\frac{n}{2}\right]-2)+n+2\left[\frac{n}{2}\right]-8$ типов неэквивалентных м. н. в. многогранника $M(3,n)$, $n\geq 7$. Идентификация типов вершин проводится по количеству дробных компонент, содержащихся в двумерных сечениях трехиндексных матриц, представляющих собой его вершины. Две вершины многогранника $M(3,n)$ называются неэквивалентными, если одна из них не может быть переведена в другую путем перестановки ее двумерных сечений. Неэквивалентные вершины этого многогранника имеют различные структуры.

В данной работе указаны новые типы м. н. в. многогранника $M(3,n)$ и для них установлено существование различных структур. Доказано, что у многогранника $M(3,n)$, $n\geq 7$, существуют м. н. в., содержащие компоненты, равные $\frac{1}{n^2-5n+6}$ и $\frac{n^2-7n+10}{n^2-7n+12}$. Тем самым получено опровержение предположения, высказанного в [10], согласно которому для любого натурального числа n наименьшая (наибольшая) положительная компонента среди всех м. н. в. многогранника $M(3,n)$,

$n \geq 3$, равна $\frac{1}{n}\binom{n-1}{n}$. Разработана также простая процедура построения м. н. в. многогранника $M(3,n)$, $n \geq 4$, на базе м. н. в. многогранника $M(3,n-1)$, которая находит применение при доказательстве приведенных теорем. В дальнейшем будем предполагать, что $n \geq 3$.

1. Предварительные результаты

Известно [15], что ранг матрицы системы ограничений трехиндексной аксиальной транспортной задачи порядка $m \times k \times l$ равен числу $m+k+l-2$. С помощью этого факта методом от противного легко доказывается

Утверждение 1. *Для того чтобы матрица x была м. н. в. многогранника $M(3,n)$, необходимо, чтобы она содержала $3n-2$ положительных элементов и для любых непустых подмножеств I, J, T множества N_n выполнялось неравенство $|x(I,J,T)| \leq |I|+|J|+|T|-2$, где $x(I,J,T)=\{(i,j,t) \in I \times J \times T : x_{ijt}>0\}$ $(|\emptyset|=0)$.*

Утверждение, обратное утверждению 1, неверно.

Зафиксируем число $m \in N_{n-1}$. Пусть I_1, J_1, T_1 — некоторые подмножества (возможно, совпадающие) мощности m множества N_n. Положим $I_2 = N_n \setminus I_1$, $J_2 = N_n \setminus J_1$, $T_2 = N_n \setminus T_1$. Так как $m \leq n-1$, то $I_2 \neq \emptyset$, $J_2 \neq \emptyset$, $T_2 \neq \emptyset$. Для двух троек подмножеств (I_1,J_1,T_1) и (I_2,J_2,T_2) определим многогранники $M(I_s,J_s,T_s)=\Big\{x=\|x_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|} : \sum\limits_{i\in I_s}\sum\limits_{j\in J_s} x_{ijt}=1\ \forall t\in T_s$, $\sum\limits_{i\in I_s}\sum\limits_{t\in T_s} x_{ijt}=1\ \forall j\in J_s$, $\sum\limits_{j\in J_s}\sum\limits_{t\in T_s} x_{ijt}=1\ \forall i\in I_s$, $x_{ijt}\geq 0\ \forall (i,j,t)\in I_s\times J_s\times T_s\Big\}$, $s=1,2$.

Замечание 1. Многогранники $M(I_1,J_1,T_1)$ и $M(I_2,J_2,T_2)$ отличаются от многогранников $M(3,m)$ и $M(3,n-m)$ соответственно лишь нумерацией элементов их матриц.

При $m=1$ многогранник $M(I_1,J_1,T_1)$, а при $m=n-1$ многогранник $M(I_2,J_2,T_2)$ вырождаются в точку.

Для вершины $y^s=\|y^s_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $s=1,2$, введем множество

$$K(I_s,J_s,T_s,y^s)=\{(i,j,t)\in I_s\times J_s\times T_s : y^s_{ijt}>0\}.$$

С помощью утверждения 1 доказывается

Лемма 1. *Пусть $y^s=\|y^s_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ — некоторая вершина многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $s=1,2$. Тогда для любых двух троек индексов $(i_1,j_1,t_1)\in K(I_1,J_1,T_1,y^1)$ и $(i_2,j_2,t_2)\in K(I_2,J_2,T_2,y^2)$ и любого числа $r\in\{1,2,3\}$ матрица $x^r=\|x^r_{ijt}\|_n$ с элементами*
$x^r_{ijt}=y^s_{ijt}\ \forall (i,j,t)\in K(I_s,J_s,T_s,y^s)\setminus\{(i_s,j_s,t_s)\}$, $s=1,2$,
$x^r_{ijt}=y^s_{ijt}-\theta$, если $(i,j,t)=(i_s,j_s,t_s)$, $s=1,2$,
$x^1_{ijt}=\theta\ \forall (i,j,t)\in\{(i_1,j_2,t_1),(i_2,j_1,t_2)\}$,
$x^2_{ijt}=\theta\ \forall (i,j,t)\in\{(i_2,j_1,t_1),(i_1,j_2,t_2)\}$,
$x^3_{ijt}=\theta\ \forall (i,j,t)\in\{(i_1,j_1,t_2),(i_2,j_2,t_1)\}$,
$x^r_{ijt}=0$ для остальных $(i,j,t)\in N_n^3$
является вершиной многогранника $M(3,n)$, где $\theta=\min\{y^1_{i_1,j_1,t_1},y^2_{i_2,j_2,t_2}\}$.

Следствие 1. Пусть $y^s=\|y^s_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ — некоторая м. н. в. многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $s=1,2$. Если для некоторой пары троек индексов $(i_1,j_1,t_1)\in K(I_1,J_1,T_1,y^1)$ и $(i_2,j_2,t_2)\in K(I_2,J_2,T_2,y^2)$ выполняется условие $y^1_{i_1,j_1,t_1}\neq y^2_{i_2,j_2,t_2}$ $(y^1_{i_1,j_1,t_1}=y^2_{i_2,j_2,t_2})$, то вершины x^1, x^2, x^3, указанные в лемме 1, являются $(3n-3)$-нецелочисленными ($(3n-4)$-нецелочисленными) вершинами многогранника $M(3,n)$.

С помощью следствия 1 и утверждения 1 легко доказать следующую лемму, дающую простую процедуру построения м. н. в. многогранника $M(3,n)$ с использованием м. н. в. многогранников $M(I_1,J_1,T_1)$ и $M(I_2,J_2,T_2)$.

Лемма 2. *Пусть* $n \geq 4$, $|I_s| = |J_s| = |T_s| \geq 2$ *и* $y^s = \|y^s_{ijt}\|_{|I_s|\times|J_s|\times|T_s|}$ *— некоторая м. н. в. многогранника* $M(I_s, J_s, T_s)$, $s = 1, 2$. *Тогда для любых четырех троек индексов* (i_s, j_s, t_s), $(i'_s, j'_s, t'_s) \in K(I_s, J_s, T_s, y^s)$, $s = 1, 2$, *удовлетворяющих условиям*

$$y^1_{i_1,j_1,t_1} \neq y^2_{i_2,j_2,t_2}, \quad y^1_{i'_1,j'_1,t'_1} \neq y^2_{i'_2,j'_2,t'_2}, \tag{1}$$

и любого числа $r \in N_6$ *матрица* $x^r = \|x^r_{ijt}\|_n$ *с элементами*

$x^r_{ijt} = y^s_{ijt}\ \forall (i,j,t) \in K(I_s, J_s, T_s, y^s) \setminus \{(i_s, j_s, t_s),\ (i'_s, j'_s, t'_s)\}$, $s = 1, 2$,

$x^r_{ijt} = y^s_{ijt} - \theta$, *если* $(i,j,t) = (i_s, j_s, t_s)$, $s = 1, 2$,

$x^r_{ijt} = y^s_{ijt} - \theta'$, *если* $(i,j,t) = (i'_s, j'_s, t'_s)$, $s = 1, 2$,

$x^1_{ijt} = \theta\ \forall (i,j,t) \in \{(i_1, j_2, t_1), (i_2, j_1, t_2)\}$,

$x^1_{ijt} = \theta'\ \forall (i,j,t) \in \{(i'_2, j'_1, t'_1), (i'_1, j'_2, t'_2)\}$,

$x^2_{ijt} = \theta\ \forall (i,j,t) \in \{(i_1, j_2, t_1), (i_2, j_1, t_2)\}$,

$x^2_{ijt} = \theta'\ \forall (i,j,t) \in \{(i'_1, j'_1, t'_2), (i'_2, j'_2, t'_1)\}$,

$x^3_{ijt} = \theta\ \forall (i,j,t) \in \{(i_2, j_1, t_1), (i_1, j_2, t_2)\}$,

$x^3_{ijt} = \theta'\ \forall (i,j,t) \in \{(i'_1, j'_2, t'_1), (i'_2, j'_1, t'_2)\}$,

$x^4_{ijt} = \theta\ \forall (i,j,t) \in \{(i_2, j_1, t_1), (i_1, j_2, t_2)\}$,

$x^4_{ijt} = \theta'\ \forall (i,j,t) \in \{(i'_1, j'_1, t'_2), (i'_2, j'_2, t'_1)\}$,

$x^5_{ijt} = \theta\ \forall (i,j,t) \in \{(i_1, j_1, t_2), (i_2, j_2, t_1)\}$,

$x^5_{ijt} = \theta'\ \forall (i,j,t) \in \{(i'_1, j'_2, t'_1), (i'_2, j'_1, t'_2)\}$,

$x^6_{ijt} = \theta\ \forall (i,j,t) \in \{(i_1, j_1, t_2), (i_2, j_2, t_1)\}$,

$x^6_{ijt} = \theta'\ \forall (i,j,t) \in \{(i'_2, j'_1, t'_1), (i'_1, j'_2, t'_2)\}$,

$x^r_{ijt} = 0$ *для остальных* $(i,j,t) \in N^3_n$

является м. н. в. многогранника $M(3, n)$, *где* $\theta = \min\{y^1_{i_1,j_1,t_1}, y^2_{i_2,j_2,t_2}\}$, $\theta' = \min\{y^1_{i'_1,j'_1,t'_1}, y^2_{i'_2,j'_2,t'_2}\}$.

Замечание 2. Отметим, что лемма 2 остается справедливой и для случая, когда $n \geq 4$, $|I_2| = |J_2| = |T_2| = 1$. При этом $(i_2, j_2, t_2) = (i'_2, j'_2, t'_2)$, условие (1) заменяется на условие $y^1_{i_1,j_1,t_1} + y^1_{i'_1,j'_1,t'_1} \neq 1$ и величина θ' вычисляется по формуле $\theta' = \min\{y^1_{i'_1,j'_1,t'_1}, 1 - \theta\}$.

2. Основные результаты

Совокупность элементов трехиндексной матрицы $x = \|x_{ijt}\|_n$ с фиксированным значением одного индекса, например t, будем называть двумерным сечением ориентации (i, j) матрицы x. Двумерное сечение представляет собой обычную двухиндексную матрицу. Таким образом, у матрицы x имеются двумерные сечения ориентации (i, j), (i, t) и (j, t). Ясно, что переставляя местами двумерные сечения одной ориентации матрицы x, представляющей собой м. н. в. многогранника $M(3, n)$, получаем новую вершину x'. Эти вершины имеют одну и ту же структуру.

Число дробных компонент матрицы $x \in M(3, n)$, содержащихся в двумерном сечении ориентации (g, h) с фиксированным индексом s, обозначим через $z(x^s_{gh})$. Вектор, составленный из компонент $z(x^1_{gh}), z(x^2_{gh}), \ldots, z(x^n_{gh})$, будем обозначать через $z(x, (g, h))$.

Совокупность элементов матрицы $x = \|x_{ijt}\|_n$ с фиксированными значениями двух индексов, например i и j, будем называть одномерным сечением ориентации t матрицы x.

Для вершины $x = \|x_{ijt}\|_n$ многогранника $M(3, n)$ введем множество $S(x) = \{k \in (0, 1) : \exists (i, j, t) \in N^3_n : x_{ijt} = k\}$.

Очевидно утверждение: для того чтобы пара м. н. в. x и x' многогранника $M(3, n)$ имела разные структуры, достаточно, чтобы выполнялось условие $S(x) \neq S(x')$. Следующие два примера показывают, что это условие не является необходимым.

Пример 1. С помощью леммы 2 и замечания 2 нетрудно убедиться, что матрицы $x^r = \|x^r_{ijt}\|_4$, $r = 0, 1, 2$, с ненулевыми элементами $x^0_{141} = x^0_{331} = x^0_{421} = x^0_{312} = x^0_{313} = x^0_{244} = x^0_{414} = x^0_{444} = \frac{1}{3}$, $x^0_{122} = x^0_{233} = \frac{2}{3}$, $x^1_{122} = x^1_{233} = \frac{2}{3}$, $x^1_{111} = x^1_{221} = x^1_{331} = x^1_{342} = x^1_{413} = x^1_{344} = x^1_{414} = x^1_{444} = \frac{1}{3}$, $x^2_{122} = x^2_{233} = \frac{2}{3}$, $x^2_{111} = x^2_{331} = x^2_{441} = x^2_{342} = x^2_{313} = x^2_{224} = x^2_{414} = x^2_{444} = \frac{1}{3}$ являются м. н. в. многогранника $M(3, 4)$. Вершины x^0, x^1 и x^2 обладают свойствами:

1) $S(x^0) = S(x^1) = S(x^2) = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$;

2) $z(x^r,(i,j)) = z(x^r,(i,t)) = (3,2,2,3)$, $z(x^r,(j,t)) = (2,2,3,3)$, $r = 0,1,2$;
3) среди одномерных сечений матрицы x^0 (соответственно матрицы x^1 и x^2) имеются три (соответственно четыре, два) сечения, каждое из которых содержит две дробных компоненты, а остальные сечения содержат не более одной дробной компоненты.

Из свойства 3) вытекает, что вершины x^0, x^1 и x^2 имеют разные структуры.

Пример 2. С помощью леммы 2 легко проверить, что матрицы $x^3 = \|x^3_{ijt}\|_4$ и $x^4 = \|x^4_{ijt}\|_4$ с ненулевыми элементами $x^3_{111} = x^3_{221} = x^3_{242} = x^3_{414} = x^3_{444} = \frac{1}{4}$, $x^3_{122} = \frac{3}{4}$, $x^3_{331} = x^3_{233} = x^3_{413} = x^3_{344} = \frac{1}{2}$, $x^4_{141} = x^4_{421} = x^4_{212} = x^4_{244} = x^4_{414} = \frac{1}{4}$, $x^4_{122} = \frac{3}{4}$, $x^4_{331} = x^4_{233} = x^4_{313} = x^4_{444} = \frac{1}{2}$ являются м. н. в. многогранника $M(3,4)$. Вершины x^3 и x^4 обладают свойствами:

1) $S(x^3) = S(x^4) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$;
2) $z(x^r,(i,j)) = z(x^r,(i,t)) = (3,2,2,3)$, $z(x^r,(j,t)) = (2,3,2,3)$, $r = 3,4$;
3) среди одномерных сечений матрицы x^3 (x^4) имеются три (два) сечения, каждое из которых содержит две дробных компоненты, а остальные сечения содержат не более одной дробной компоненты.

В силу свойства 3) заключаем, что вершины x^3 и x^4 имеют разные структуры.

Согласно [10] будем говорить, что м. н. в. x многогранника $M(3,n)$ имеет тип $A(p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3)$, если количество дробных компонент, содержащихся в ее двумерных сечениях, задается векторами

$$z(x,(i,j)) = (3,\dots,3,\underbrace{2}_{\text{место } p_1},3,\dots,3,\underbrace{2}_{\text{место } q_1},3,\dots,3),$$
$$z(x,(i,t)) = (3,\dots,3,\underbrace{2}_{\text{место } p_2},3,\dots,3,\underbrace{2}_{\text{место } q_2},3,\dots,3),$$
$$z(x,(j,t)) = (3,\dots,3,\underbrace{2}_{\text{место } p_3},3,\dots,3,\underbrace{2}_{\text{место } q_3},3,\dots,3),$$

где $p_l, q_l \in N_n$, $p_l \neq q_l$, $l = 1,2,3$.

В [10] сформулировано предположение: значения ненулевых элементов любой матрицы, представляющей м. н. в. многогранника $M(3,n)$, имеющей тип $A(p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3)$, не зависят от числа n и принадлежат множеству $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$. Вершины x^3 и x^4 из примера 2 дают опровержение этого предположения. Из примеров 1 и 2 вытекает также следующий результат: тип $A(p_1,q_1,p_2,q_2,p_3,q_3)$ м. н. в. многогранника $M(3,4)$ определяется неоднозначно, т. е. имеет разные структуры.

В [10] высказано также следующее предположение: для любого натурального числа n наименьшая (наибольшая) положительная компонента среди всех м. н. в. многогранника $M(3,n)$ равна $\frac{1}{n}$ $(\frac{n-1}{n})$. Опровержение этого предположения дает

Теорема 1. *Для любого числа $r \in \{0,1,2,\dots,n-2\}$ матрица $x^r = \|x^r_{ijt}\|_n$ с ненулевыми элементами*

$$x^r_{kk1} = \frac{1}{n+r}, \quad k = 1,2,\dots,n-1,$$
$$x^r_{nn1} = \frac{r+1}{n+r}, \quad x^r_{k-1,k,k} = \frac{n+r-1}{n+r}, \quad k = 2,3,\dots,n-1,$$
$$x^r_{n-1,n,n} = \frac{n-1}{n+r}, \quad x^r_{n-1,1,k} = \frac{1}{n+r}, \quad k = 2,\dots,r+1 \quad (r \geq 1),$$
$$x^r_{n1k} = \frac{1}{n+r}, \quad k = r+2,\dots,n-1 \quad (n \geq r+3), \quad x^r_{n1n} = \frac{r+1}{n+r}$$

является м. н. в. многогранника $M(3,n)$.

Эта теорема доказана в [10] для случая $r = 0$.

Доказательство теоремы 1 проведем индукцией по числу r. Предположим, что она верна для $r - 1$.

Обозначим через R_{ijt} вектор-столбец матрицы ограничений, определяющих многогранник $M(3,n)$, т. е. вектор, у которого единицы стоят в строках с номерами i, $(n+j)$ и $(2n+t)$, а остальные элементы нули. В силу невырожденности вершины x^{r-1} многогранника $M(3,n)$ система векторов R_{kk1}, $k = 1,\dots,n$, $R_{k-1,k,k}$, $k = 2,\dots,n$, $R_{n-1,1,k}$, $k = 2,\dots,r$, R_{n1k}, $k = r+1,\dots,n$, линейно независима и вектор $R_{n-1,1,r+1} = \sum\limits_{(i,j,t)\in K(x^r)} \beta_{ijt} R_{ijt}$, причем $\beta_{n,1,r+1} \neq 0$. Здесь $K(x^r) = \{(i,j,t) \in N_n^3 : x_{ijt}^r > 0\}$. Поэтому в силу теоремы 2.1 ([17], с. 217) система векторов R_{ijt} $\forall (i,j,t) \in K(x^r) \backslash \{(n,1,r+1)\}$, $R_{n-1,1,r+1}$ также линейно независима. Значит, матрица x^r, положительные компоненты которой отвечают линейно независимой системе векторов, является м.н.в. многогранника $M(3,n)$. $\square$

Следствие 2. Для любого числа $r \in \{0,1,2,\dots,n-2\}$ м. н. в. x^r, указанная в теореме 1, обладает свойствами:

1) $S(x^r) = \{\frac{1}{n+r}, \frac{r+1}{n+r}, \frac{n-1}{n+r}, \frac{n+r-1}{n+r}\}$;
2) $z(x^r,(i,j)) = z(x^r,(i,t)) = (n,\underbrace{2,\dots,2}_{n-1})$, $z(x^r,(j,t)) = (\underbrace{2,\dots,2}_{n-2}, r+2, n-r)$;
3) среди ее одномерных сечений имеются два сечения, одно из которых содержит r, другое $n-1-r$ дробных компонент, а остальные сечения содержат не более одной дробной компоненты.

Зафиксируем число $r \in \{0,1,2,\dots,n-2\}$. Пусть x^r — вершина, указанная в теореме 1. Через $\overline{x}^r$ обозначим вершину, которая получается из вершины x^r путем перестановки местами ее двумерных сечений $n-1$ и n ориентации (j,t). Из следствия 2 вытекает следующий важный результат: для любого числа $r \in \{0,1,2,\dots,[\frac{n-1}{2}]-1\}$ пара м. н. в. x^r, $\overline{x}^{n-2-r}$ многогранника $M(3,n)$ принадлежит к одному и тому же типу, но имеет разные структуры.

В связи с теоремой 1 возникает естественный вопрос: существуют ли у многогранника $M(3,n)$ м. н. в., наименьшая (наибольшая) положительная компонента которых меньше (больше) $\frac{1}{2n-2}$ ($\frac{2n-3}{2n-2}$). Ответ на этот вопрос дают теоремы 2 и 3.

Теорема 2. *У многогранника $M(3,n)$, $n \geq 6$, существует м. н. в., содержащая компоненту, равную $\frac{1}{n^2-5n+6}$.*

Доказательство. Пусть $n \geq 6$, $k = [\frac{n}{2}]$. Положим $I_1 = J_1 = T_1 = N_k$, $I_2 = J_2 = T_2 = N_n \setminus N_k$.

Пусть $n = 2k$, $k \geq 3$. Согласно теореме 1 у многогранника $M(I_s,J_s,T_s)$, $s = 1,2$, где $|I_s| = k \geq 3$, найдутся $(3k-2)$-нецелочисленные вершины y (y'), содержащие по крайней мере $2k-3$ компонент, каждая из которых равна $\frac{1}{2k-2}$ $\left(\frac{1}{2k-3}\right)$. Пусть $y^1 = \|y^1_{ijt}\|_{|I_1|\times|J_1|\times|T_1|}$ и $y^2 = \|y^2_{ijt}\|_{|I_2|\times|J_2|\times|T_2|}$ — некоторые $(3k-2)$-нецелочисленные вершины соответственно многогранников $M(I_1,J_1,T_1)$ и $M(I_2,J_2,T_2)$, содержащие компоненты $y^1_{i_1,j_1,t_1} = y^1_{i'_1,j'_1,t'_1} = \frac{1}{2k-3}$, $y^2_{i_2,j_2,t_2} = y^2_{i'_2,j'_2,t'_2} = \frac{1}{2k-2}$, где $(i_s,j_s,t_s),(i'_s,j'_s,t'_s) \in K(I_s,J_s,T_s,y^s)$, $(i_s,j_s,t_s) \neq (i'_s,j'_s,t'_s)$, $s = 1,2$. Тогда на основании леммы 2 матрица $x = \|x_{ijt}\|_n$ с элементами $x_{ijt} = y^s_{ijt}$ $\forall (i,j,t) \in (I_s \times J_s \times T_s) \setminus \{(i_s,j_s,t_s),(i'_s,j'_s,t'_s)\}$, $s = 1,2$, $x_{ijt} = \frac{1}{2k-2}$ $\forall (i,j,t) \in \{(i_1,j_2,t_1),(i_2,j_1,t_2),(i'_2,j'_1,t'_1),(i'_1,j'_2,t'_2)\}$, $x_{ijt} = \frac{1}{(2k-2)(2k-3)}$ $\forall (i,j,t) \in \{(i_1,j_1,t_1),(i'_1,j'_1,t'_1)\}$, $x_{ijt} = 0$ для остальных $(i,j,t) \in N_n^3$ является м. н. в. многогранника $M(3,n)$. Так как $n = 2k$, то $\frac{1}{(2k-2)(2k-3)} = \frac{1}{n^2-5n+6}$, что и доказывает теорему 2 для случая $n = 2k$.

Пусть теперь $n = 2k+1$, $k \geq 3$. По теореме 1 у многогранника $M(I_1,J_1,T_1)$ найдется $(3k-2)$-нецелочисленная вершина y^1 с компонентами $y^1_{i_1,j_1,t_1} = y^1_{i'_1,j'_1,t'_1} = \frac{1}{2k-2}$, а у многогранника $M(I_2,J_2,T_2)$ (ввиду $|I_2| = |J_2| = |T_2| = k+1$) — $(3k+1)$-нецелочисленная вершина y^2 такая, что $y^2_{i_2,j_2,t_2} = y^2_{i'_2,j'_2,t'_2} = \frac{1}{2k-1}$. Здесь $(i_s,j_s,t_s),(i'_s,j'_s,t'_s) \in K(I_s,J_s,T_s,y^s)$, $(i_s,j_s,t_s) \neq (i'_s,j'_s,t'_s)$, $s = 1,2$. Поэтому на основании леммы 2 у многогранника $M(3,n)$ существует м. н. в. x, содержащая компоненты $x_{i_1,j_1,t_1} = x_{i'_1,j'_1,t'_1} = \frac{1}{n^2-5n+6}$. $\square$

Теорема 3. *У многогранника $M(3,n)$, $n \geq 7$, существует м. н. в., содержащая компоненту, равную* $\frac{n^2-7n+10}{n^2-7n+12}$.

Доказательство. Пусть $n \geq 7$. Положим $I_1 = J_1 = T_1 = N_{n-1}$, $I_2 = J_2 = T_2 = \{n\}$. На основании теоремы 2 у многогранника $M(I_1, J_1, T_1)$ существует $(3|I_1|-2)$-нецелочисленная вершина y^1, содержащая две компоненты, равные $\frac{1}{n^2-7n+12}$. Поэтому с учетом того, что многогранник $M(I_2, J_2, T_2)$ вырождается в точку $y^2_{nnn} = 1$, в силу леммы 2 и замечания 2 найдется м. н. в. x многогранника $M(3,n)$, содержащая компоненту, равную $\frac{n^2-7n+10}{n^2-7n+12}$. $\square$

С помощью теоремы 1, леммы 2 и замечания 2 аналогично доказываются следующие три теоремы, описывающие новые типы и структуры м. н. в. многогранника $M(3,n)$.

Теорема 4. *Для любого числа $r \in \{0,1,2,\ldots,n-3\}$, $n \geq 4$, матрица $x^r = \|x^r_{ijt}\|_n$ с ненулевыми элементами*

$$x^r_{1n1} = x^r_{n21} = \frac{1}{n+r-1}, \quad x^r_{kk1} = \frac{1}{n+r-1}, \quad k = 3,\ldots,n-2 \quad (n \geq 5),$$
$$x^r_{n-1,n-1,1} = \frac{r+1}{n+r-1}, \quad x^r_{k-1,k,k} = \frac{n+r-2}{n+r-1}, \quad k = 2,\ldots,n-2,$$
$$x^r_{n-2,n-1,n-1} = \frac{n-2}{n+r-1}, \quad x^r_{n-2,1,k} = \frac{1}{n+r-1}, \quad k = 2,\ldots,r+1 \quad (r \geq 1),$$
$$x^r_{n-1,1,k} = \frac{1}{n+r-1}, \quad k = r+2,\ldots,n-2 \quad (n \geq r+4),$$
$$x^r_{n-1,1,n-1} = \frac{r+1}{n+r-1}, \quad x^r_{n1n} = x^r_{2nn} = \frac{1}{n+r-1}, \quad x^r_{nnn} = \frac{n+r-3}{n+r-1}$$

является м. н. в. многогранника $M(3,n)$.

Следствие 3. Для любого числа $r \in \{0,1,\ldots,n-3\}$, $n \geq 4$, м. н. в. x^r, указанная в теореме 4, обладает свойствами:

1) $S(x^r) = \{\frac{1}{n+r-1}, \frac{r+1}{n+r-1}, \frac{n-2}{n+r-1}, \frac{n+r-3}{n+r-1}, \frac{n+r-2}{n+r-1}\}$;
2) $z(x^r,(i,j)) = z(x^r,(i,t)) = (n-1, \underbrace{2,2,\ldots,2}_{n-2}, 3)$, $z(x^r,(j,t)) = (\underbrace{2,2,\ldots,2}_{n-3}, r+2, n-r-1, 3)$;
3) среди ее одномерных сечений имеются четыре сечения, одно из которых содержит $n-2-r$, другое r, третье 2 и четвертое 2 дробных компонент, а остальные сечения содержат не более одной дробной компоненты.

Зафиксируем $r \in \{0,1,2,\ldots,n-3\}$. Пусть x^r — вершина, указанная в теореме 4. Через $\overline{\overline{x}}^r$ обозначим вершину, которая получается из вершины x^r путем перестановки местами ее двумерных сечений $n-2$ и $n-1$ ориентации (j,t). Из следствия 3 вытекает

Следствие 4. Для любого числа $r \in \{0,1,\ldots,[\frac{n-2}{2}]-1\}$, $n \geq 4$, пара м. н. в. $(x^r, \overline{\overline{x}}^{n-3-r})$ многогранника $M(3,n)$ принадлежит одному и тому же типу, но имеет разные структуры.

Теорема 5. *Для любого числа $r \in \{1,2,\ldots,n-3\}$, $n \geq 4$, матрица $x^r = \|x^r_{ijt}\|_n$ с ненулевыми элементами*

$$x^r_{kk1} = \frac{1}{n+r-1}, \quad k = 1,\ldots,n-2, \quad x^r_{n-1,n-1,1} = \frac{r}{n+r-1},$$
$$x^r_{n,n-1,1} = x^r_{n-2,1,2} = \frac{1}{n+r-1}, \quad x^r_{1n2} = \frac{n+r-2}{n+r-1},$$
$$x^r_{k-1,k,k} = \frac{n+r-2}{n+r-1}, \quad k = 3,\ldots,n-2 \quad (n \geq 5),$$
$$x^r_{n-2,n-1,n-1} = \frac{n-2}{n+r-1}, \quad x^r_{n-2,1,k} = \frac{1}{n+r-1}, \quad k = 3,\ldots,r+1,$$

$$x^r_{n-1,1,k} = \frac{1}{n+r-1}, \quad k = r+2, \dots, n-2,$$
$$x^r_{n-1,1,n-1} = \frac{r+1}{n+r-1}, \quad x^r_{n2n} = \frac{n+r-2}{n+r-1}, \quad x^r_{n-1,n,n} = \frac{1}{n+r-1}$$

является м. н. в. многогранника $M(3,n)$.

Следствие 5. Для любого числа $r \in \{1, 2, \dots, n-3\}$, $n \geq 4$, м.н.в. x^r, указанная в теореме 5, обладает свойствами:

1) $S(x^r) = \{\frac{1}{n+r-1}, \frac{r}{n+r-1}, \frac{r+1}{n+r-1}, \frac{n-2}{n+r-1}, \frac{n+r-2}{n+r-1}\}$;
2) $z(x^r,(i,j)) = (n, \underbrace{2,\dots,2}_{n-1})$, $z(x^r,(i,t)) = (n-1, \underbrace{2,\dots,2}_{n-3}, 3, 2)$,
   $z(x^r,(j,t)) = (\underbrace{2,\dots,2}_{n-3}, r+2, n-r, 2)$;
3) среди ее одномерных сечений имеются три сечения, одно из которых содержит r, другое $n-2-r$, третье 2 дробных компонент, а остальные сечения содержат не более одной дробной компоненты.

Из утверждений 1) следствий 3 и 5 при $r = 1$ вытекает возможность построения различных структур м.н.в. многогранника $M(3,n)$, $n \geq 4$, ненулевые компоненты которых определяются числами $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-1}{n}$.

Зафиксируем $r \in \{1, 2, \dots, n-3\}$, $n \geq 5$. Пусть x^r — вершина, указанная в теореме 5. Через $\widetilde{x}^r$ обозначим вершину, которая получается из вершины x^r путем перестановки местами ее двумерных сечений $n-2$ и $n-1$ ориентации (j,t). Из следствия 5 вытекает

Следствие 6. Для любого числа $r \in \{1, 2, \dots, [\frac{n-3}{2}]\}$, $n \geq 5$, пара м.н.в. $(x^r, \widetilde{x}^{n-2-r})$ многогранника $M(3,n)$ принадлежит к одному и тому же типу, но имеет разные структуры.

Теорема 6. *Для любого числа* $r \in \{1, 2, \dots, n-3\}$, $n \geq 4$, *матрица* $x^r = \|x^r_{ijt}\|_n$ *с ненулевыми элементами*

$$x^r_{kk1} = \frac{1}{n+r-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-2, \quad x^r_{n-1,n,1} = \frac{r+1}{n+r-1},$$
$$x^r_{122} = \frac{r}{n+r-1}, \quad x^r_{n-2,1,2} = \frac{1}{n+r-1}, \quad x^r_{n22} = \frac{n-2}{n+r-1},$$
$$x^r_{k-1,k,k} = \frac{n+r-2}{n+r-1}, \quad k = 3, \dots, n-2 \quad (n \geq 5),$$
$$x^r_{n-2,n-1,n-1} = \frac{n-2}{n+r-1}, \quad x^r_{n-2,1,k} = \frac{1}{n+r-1}, \quad k = 3, \dots, r+1 \quad (r \geq 2),$$
$$x^r_{n-1,1,k} = \frac{1}{n+r-1}, \quad k = r+2, \dots, n-2,$$
$$x^r_{n-1,1,n-1} = x^r_{n,n-1,n} = \frac{r+1}{n+r-1}, \quad x^r_{1nn} = \frac{n-2}{n+r-1}$$

является м. н. в. многогранника $M(3,n)$.

Следствие 7. Для любого числа $r \in \{1, 2, \dots, n-3\}$, $n \geq 4$, м.н.в. x^r, указанная в теореме 6, обладает свойствами:

1) $S(x^r) = \{\frac{1}{n+r-1}, \frac{r}{n+r-1}, \frac{r+1}{n+r-1}, \frac{n-2}{n+r-1}, \frac{n+r-2}{n+r-1}\}$;
2) $z(x^r,(i,j)) = z(x^r,(i,t)) = (n-1, 3, \underbrace{2,\dots,2}_{n-2})$, $z(x^r,(j,t)) = (3, \underbrace{2,\dots,2}_{n-4}, r+2, n-r-1, 2)$;
3) среди ее одномерных сечений имеются три сечения, одно из которых содержит $n-2-r$, другое r, третье 2 дробных компонент, а остальные сечения содержат не более одной дробной компоненты.

Из следствий 3 и 7 вытекает

Следствие 8. Для любого числа $r \in \{1, 2, \ldots, n-3\}$, $n \geq 4$, тип м. н. в. x^r многогранника $M(3,n)$, задаваемый векторами $z(x^r,(i,j)) = z(x^r,(i,t)) = (n-1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n-2}, 3)$, $z(x^r,(j,t)) = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{n-3}, r+2, n-r-1, 3)$, определяется неоднозначно.

С использованием теорем 3 ([10]) и 1, а также леммы 2 и замечания 2 получены следующие две теоремы.

Теорема 7. *Матрица x^0 с ненулевыми элементами*

$$x^0_{111} = x^0_{n-3,n-3,n-3} = \frac{2}{3}, \quad x^0_{221} = x^0_{122} = \frac{1}{12},$$
$$x^0_{2,n-2,1} = x^0_{n-1,2,2} = x^0_{n-2,2,n-2} = x^0_{n-1,n-1,n-2} = x^0_{1,n-2,n-1} = \frac{1}{4},$$
$$x^0_{232} = x^0_{n-3,1,2} = x^0_{n-4,n-4,n-3} = \frac{1}{3},$$
$$x^0_{n,n,n-2} = x^0_{n-1,n,n} = x^0_{n,n-1,n} = \frac{1}{2}, \quad x^0_{n-2,n-1,n-1} = \frac{3}{4},$$
$$x^0_{k-1,k-1,k} = x^0_{kkk} = x^0_{k,k+1,k} = \frac{1}{3}, \quad k = 3, \ldots, n-4 \quad (n \geq 7),$$

является м. н. в. многогранника $M(3,n)$, $n \geq 6$.

Теорема 8. *Матрица x^1 с ненулевыми элементами*

$$x^1_{111} = \frac{1}{6}, \ x^1_{221} = x^1_{122} = x^1_{n-3,1,2} = x^1_{n-4,n-4,n-3} = \frac{1}{3},$$
$$x^1_{nn1} = x^1_{1,1,n-2} = x^1_{n-1,n,n} = x^1_{n,n-2,n} = \frac{1}{2}, \quad x^1_{232} = \frac{1}{12},$$
$$x^1_{2,n-1,2} = x^1_{n-2,n-2,n-2} = x^1_{n-1,n-3,n-1} = x^1_{n-1,n-2,n-1} = \frac{1}{4},$$
$$x^1_{n-3,n-3,n-3} = \frac{2}{3}, \quad x^1_{n-2,n-1,n-1} = \frac{3}{4},$$
$$x^1_{k-1,k-1,k} = x^1_{kkk} = x^1_{k,k+1,k} = \frac{1}{3}, \quad k = 3, \ldots, n-4 \quad (n \geq 7),$$

является м. н. в. многогранника $M(3,n)$, $n \geq 6$.

Из теорем 7 и 8 вытекает

Следствие 9. Вершины x^0 и x^1 многогранника $M(3,n)$, $n \geq 6$, обладают свойствами:

1) $S(x^0) = \{\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\}$, $S(x^1) = \{\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\}$;
2) количество дробных компонент, содержащихся в их двумерных сечениях, задается векторами $z(x^0,(i,j)) = z(x^1,(i,j)) = (3, 4, 2, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n-5}, 2, 2)$, $z(x^0,(i,t)) = (2, 5, 2, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n-5}, 2, 2)$, $z(x^1,(i,t)) = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{n-2}, 2, 2)$, $z(x^0,(j,t)) = z(x^1,(j,t)) = (3, 4, 2, 2, \underbrace{3, \ldots, 3}_{n-5}, 2)$;
3) среди их одномерных сечений имеются $2n-9$ сечений, каждое из которых содержит две дробные компоненты, а остальные сечения содержат не более одной дробной компоненты.

Литература

1. Balas E., Saltzman M.J. *Fasets of the three-index assignment polytope* // Discrete Appl. Math. – 1989. – V. 23. – № 3. – P. 201–229.
2. Pierskalla W.P. *The multidimensional assignment problem* // Oper.Res. – 1968. – V.16. – P. 422–431.
3. Poore A.B. *Multidimensional assignment formulation of data association problems arising from multitarget and multisensor tracking* // Comput. Optimiz. and Applic. – 1994. – V. 3. – P. 27–54.
4. Arbib C., Pacciarelli D., Smriglio S. *A three-dimensional matching model for perishable production scheduling* // Discrete Appl. Math. – 1999. – № 92. – P. 1–15.
5. Euler R. *Odd cycles and a class of facets of the axial* 3*-index assignment polytope* // Zastosowania Matematyki. – 1987. – V.19. – № 3–4. – P. 375–386.
6. Gwan G., Qi L. *On facets of the three-index assignment polytope* // Australasian J. Combinatorics. – 1992. – V. 6. – P. 67–87.
7. Qi L., Balas E., Gwan G. *A new facet class and a polyhedral method for the three-index assignment problem* // In: D. Du and J. Sun (Eds) Advances in Optimization and Approximation. – Kluwer Academic. – 1994. – P. 256–274.
8. Кравцов М.К., Лукшин Е.В. *О нецелочисленных вершинах многогранника многоиндексной аксиальной задачи выбора* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 65–70.
9. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О числе r-нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи выбора* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 12. – С. 89–92.
10. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О типах $(3n-2)$-нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи выбора* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 12. – С. 84–90.
11. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О нецелочисленных вершинах многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Дискретн. матем. – 2001. – Т. 13. – Вып. 2. – С. 120–143.
12. Кравцов М.К., Кравцов В.М., Лукшин Е.В. *О числе нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. – 2000. – № 4. – С. 59–65.
13. Кравцов В.М. Оценки снизу числа нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях//Вестник БГУ. Сер.1.–2002.–N3.–С.87–90.
14. Кравцов В.М. *О новых типах максимально нецелочисленных вершин многогранника трехиндексной аксиальной задачи о назначениях* // Вестник БГУ. Сер.1. – 2003. – № 3. – С. 80–85.
15. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация.* – М.: Наука, 1981. – 342 с.
16. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач* // Дискретн. матем. – 1991. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 3–24.
17. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. *Линейное программирование. Теория и конечные методы.* – М.: Физико-математическая литература, 1963. – 776 с.

Белорусский государственный университет

Поступила 05.05.2004