Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №6, с. 25–34 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0058*

Б.Г. ВАКУЛОВ, Е.С. КОЧУРОВ, Н.Г. САМКО

ОЦЕНКИ ТИПА ЗИГМУНДА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА

Аннотация. В работе рассматриваются пространства обобщенной переменной гёльдеровости функций, заданных на отрезке действительной оси, локальный обобщенный модуль непрерывности которых имеет мажоранту, которая может изменяться от точки к точке. Доказываются теоремы о действии операторов дробного интегрирования переменного порядка из пространств обобщенной переменной гельдеровости в пространства с “лучшей” мажорантой и операторов дробного дифференцирования из таких же пространств в пространства с “худшей” мажорантой.

Ключевые слова: операторы дробного интегрирования, операторы дробного дифференцирования, обобщенный модуль непрерывности, обобщенные пространства Гёльдера.

УДК: 517.518

Abstract. We consider non-standard generalized Hölder spaces of functions defined on a segment of the real axis, whose local continuity modulus has a majorant varying from point to point. We establish some properties of fractional integration operators of variable order acting from variable generalized Hölder spaces to those with a “better” majorant, as well as properties of fractional differentiation operators of variable order acting from the same spaces to those with a “worse” majorant.

Keywords: fractional integration operators, fractional differentiation operators, generalized continuity modulus, generalized Hölder spaces.

1. Введение

В последнее время возрос интерес к изучению пространств переменного порядка, когда параметры, определяющие пространство, обычно постоянные, могут изменяться от точки к точке. Типичным примером такого пространства является обобщенное пространство Лебега с переменным показателем, определяемое модуляром $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}dx$.

Другим примером является обобщенное пространство Гёльдера $H^{\lambda(\cdot)}$ переменного порядка, определяемого условием $\omega(f,t,x) \le ct^{\lambda(x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$, где локальный модуль непрерывности $\omega(f,t,x)$ функции f равен $\sup\limits_{|h|<t} |f(x+h) - f(x)|$ или его минимальной мажоранте, обладающей свойствами модуля непрерывности. Известны и более общие пространства, а именно, обобщенные пространства Гёльдера с переменной характеристикой $\omega(t,x)$, зависящей от x:

Поступила 30.12.2009

$\omega(f,t,x) \le c\omega(t,x)$, где $\omega(t,x)$ — функция типа модуля непрерывности ([1], с. 50) по переменной t (для каждого $x \in [a,b]$). В частности, при $\omega(t,x) = t^{\lambda(x)}$ получаем пространство $H^{\lambda(\cdot)}$.

Мы рассматриваем оператор дробного интегрирования

$$I_{a+}^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{1}{\Gamma[\alpha(x)]} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha(x)}}$$

и оператор дробного дифференцирования

$$D_{a+}^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{f(x)}{\Gamma[1-\alpha(x)](x-a)^{\alpha(x)}} + \frac{\alpha(x)}{\Gamma[1-\alpha(x)]} \int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha(x)}} dt \tag{1.1}$$

на обобщенных пространствах Гёльдера $H^{\omega(\cdot)}([a,b])$ с характеристикой $\omega = \omega(t,x)$, $0 < t < b-a$, зависящей от точки $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$. Основная цель — исследовать зависимость отображений, осуществляемых операторами $I_{a+}^{\alpha(\cdot)}$ и $D_{a+}^{\alpha(\cdot)}$, от локальных значений $\alpha(x)$ и $\omega(t,x)$. Функции $\omega(t,x)$ принадлежат классу Зигмунда–Бари–Стечкина по t равномерно по x. Центральным результатом является получение теорем о действии операторов дробного интегрирования и дифференцирования, определенных на том или ином пространстве Гёльдера в пространство подобной природы. Для этого используем метод оценок типа Зигмунда, которые носят локальный характер и зависят от точек $x \in [a,b]$.

Дробные интегралы и дробные производные постоянного порядка $\alpha(x) = \alpha = \text{const}$ в пространствах переменной гёльдеровости рассматривались ранее в работах Н.К. Карапетянца и А.И. Гинзбург [2], [3]. Там же был получен изоморфизм этих пространств, осуществляемый дробным интегралом.

Дробные интегралы переменного порядка в пространствах переменной гёльдеровости рассматривались в работах Б. Росса и С.Г. Самко [4], С.Г. Самко [5].

Многомерные потенциалы и гиперсингулярные интегралы в пространствах переменной и обобщенной переменной гёльдеровости рассматривались в работах Б.Г. Вакулова [6]–[10], Н.Г. Самко, С.Г. Самко и Б.Г. Вакулова [11].

Наиболее общие результаты о действии операторов типа потенциала и сответствующих гиперсингулярных операторов в рамках обобщенных пространств с переменными характеристиками были получены в работе Н.Г. Самко, С.Г. Самко и Б.Г. Вакулова [11] для пространств функций, определенных на однородных пространствах.

В данной работе объекты (операторы дробного интегрирования и дифференцирования) имеют в сравнении с операторами типа потенциала и гиперсингулярными интегралами одностороннюю природу (переменный предел интегрирования), что приводит к некоторой специфике исследования и получаемых результатов.

2. Вспомогательные утверждения

Всюду ниже предполагается, что $\omega(t,x)$ — функция типа модуля непрерывности по переменной t для каждого $x \in [a,b]$. Тогда, как известно,

$$\frac{\omega(t,x)}{t} \le 2\frac{\omega(h,x)}{h}, \quad t > h. \tag{2.1}$$

Предполагаем также, что $\omega(t,x)$ равномерно по x не зануляется вне начала координат:

$$\inf_{\substack{x\in[a,b],\\ t\in(\delta,b-a)}} \omega(t,x) > 0 \quad \text{при} \quad \delta > 0. \tag{2.2}$$

Определение 2.1. Через $H^{\omega(\cdot)}([a,b])$ обозначим пространство функций $f \in C([a,b])$ таких, что $\omega(f,t,x) \le c\,\omega(t,x)$ для всех $x \in [a,b]$, где $c > 0$ не зависит от x и t. Это пространство банахово относительно нормы

$$\|f\|_{H^{\omega(\cdot)}([a,b])} = \|f\|_{C([a,b])} + \sup_{\substack{x\in[a,b]\\ t>0}} \frac{\omega(f,t,x)}{\omega(t,x)}.$$

Через $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$ обозначим подпространство функций из $H^{\omega(\cdot)}([a,b])$, обращающихся в нуль в точке a.

Лемма 2.1. *Пусть $\omega(x,t)$ — функция типа модуля непрерывности по переменной t для каждого $x \in [a,b]$ и $\omega_0 := \inf\limits_{x\in[a,b]} \omega(b-a,x) > 0$. Оператор умножения на функцию $g \in \mathrm{Lip}([a,b])$ ограничен в $H^{\omega(\cdot)}([a,b])$ и $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что существует постоянная $c > 0$ такая, что $h \le c\,\omega(h,x)$. Это вытекает из (2.1) при выборе $t = b-a$, так что $c = \frac{2(b-a)}{\omega_0}$. □

Определение 2.2 (см., например, [12])**.** Полагаем, что $\omega(t,x)$ принадлежит по переменной t обобщенному классу Зигмунда–Бари–Стечкина $\Phi^{\delta(\cdot)}_{\beta(\cdot)}$, где $0 \le \delta(x) < \beta(x), x \in [a,b]$, если

(1) $\omega(t,x)$ по t непрерывна и почти возрастает на $[0,b-a]$ равномерно по $x \in [a,b]$, $\lim\limits_{t\to+0} \omega(t,x) = 0$ для каждого $x \in [a,b]$,

(2) $\int\limits_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^{\delta(x)} \frac{\omega(t,x)}{t} dt \le c\omega(h,x)$,

(3) $\int\limits_h^{b-a} \left(\frac{h}{t}\right)^{\beta(x)} \frac{\omega(t,x)}{t} dt \le c\omega(h,x)$,

где $0 < h < b-a$, постоянная c не зависит от h и $x \in [a,b]$. Через $\Phi^{\delta(\cdot)}$ обозначим соответствующий класс, для которого выполняются только условия 1 и 2, а через $\Phi_{\beta(\cdot)}$ — класс с условиями 1 и 3, так что $\Phi^{\delta(\cdot)}_{\beta(\cdot)} = \Phi^{\delta(\cdot)} \bigcap \Phi_{\beta(\cdot)}$.

Подобные классы Φ^δ_β в случае функций $\omega = \omega(t)$ и показателей β, δ, не зависящих от параметра x, были представлены в статье Н.К. Бари и С.Б. Стечкина [13] с $\delta = 0$, $\beta = 1,2,3,\ldots$. Классы Φ^δ_β с постоянными $0 \le \delta < \beta$ были рассмотрены в [14], а их подробное исследование можно найти в [12].

Всюду в дальнейшем предполагаем, что зависящие от x параметры β и δ, определяющие класс $\Phi^{\delta(\cdot)}_{\beta(\cdot)}$, удовлетворяют условиям

$$\beta, \delta \in C([a,b]) \quad \text{и} \quad \min_{x\in[a,b]} [\beta(x) - \delta(x)] > 0. \tag{2.3}$$

Заметим, что последнее условие гарантирует непустоту класса $\Phi^{\delta(\cdot)}_{\beta(\cdot)}$.

В данной работе будем использовать известные в теории пространств Орлича индексы Матушевской–Орлича ([15] и [16]) для функций $\omega(t,x)$ по переменной $t \in [0,b-a]$:

$$m(\omega,x) = \sup_{t>1} \frac{\ln\left[\varliminf\limits_{h\to0} \frac{\omega(th,x)}{\omega(h,x)}\right]}{\ln t} = \lim_{t\to0} \frac{\ln\left[\varliminf\limits_{h\to0} \frac{\omega(th,x)}{\omega(h,x)}\right]}{\ln t}, \tag{2.4}$$

$$M(\omega,x) = \inf_{t>1} \frac{\ln\left[\varlimsup\limits_{h\to0} \frac{\omega(th,x)}{\omega(h,x)}\right]}{\ln t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln\left[\varlimsup\limits_{h\to0} \frac{\omega(th,x)}{\omega(h,x)}\right]}{\ln t}, \tag{2.5}$$

зависящие от параметра $x \in [a,b]$. Известно, что $m(\omega,x) \leq M(\omega,x)$. Свойства этих индексов в связи с приложениями к обобщенным пространствам Гёльдера в случае $\omega = \omega(t)$ были изучены в работах [12], [17]–[22], где, в частности, было показано, что принадлежность функции $\omega(t)$ классу Зигмунда–Бари–Стечкина Φ_β^δ с постоянными β и δ может быть охарактеризована в терминах индексных чисел $m(\omega), M(\omega)$. Классы $\Phi_{\beta(\cdot)}^{\delta(\cdot)}$, определяемые условиями, зависящими от параметра x, и индексные числа, зависящие от параметра x, были исследованы в работах [23] и [24] (в этих работах рассматривалась общая постановка, когда параметр x — точка произвольного множества). Для переменных $\beta(x)$ и $\delta(x)$ имеет место

Теорема 2.1 ([11], следствие 2.11)**.** *Пусть выполнены условия* (2.3)*. Тогда*

$$\omega(x,t) \in \Phi^{\delta(\cdot)} \Longleftrightarrow \operatorname*{ess\,inf}_{x\in[a,b]}[m(\omega,x)-\delta(x)] > 0,$$
$$\omega(x,t) \in \Phi_{\beta(\cdot)} \Longleftrightarrow \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]}[M(\omega,x)-\beta(x)] < 0.$$

Понадобится также очевидная

Лемма 2.2. *Пусть* $\sup\limits_{x\in[a,b]} \alpha(x) < 1$ *и функция* $\omega(t,x)$ *неотрицательна. Если* $\omega(t,x)$ *почти возрастает по* t *равномерно по* x*, то*

$$h^{\alpha(x)}\omega(h,x) \leq ch \int_h^{b-a} \frac{\omega(t,x)dt}{t^{2-\alpha(x)}}, \quad 0 < h < \frac{b-a}{2}, \tag{2.6}$$

а если $\frac{\omega(t,x)}{t}$ *почти убывает по* t *равномерно по* x*, то*

$$h^{-\alpha(x)}\omega(h,x) \leq c \int_0^h \frac{\omega(t,x)dt}{t^{1+\alpha(x)}}, \quad 0 < h < b-a, \tag{2.7}$$

для всех $x \in [a,b]$*, где* c *не зависит от* h *и* x*.*

Воспользуемся ниже числовым неравенством ([11], (2.24))

$$|x^\mu - y^\mu| \leq |\mu|\,|x-y| \cdot [\min\{x,y\}]^{\mu-1}, \quad x>0, \quad y>0, \quad \mu \leq 1. \tag{2.8}$$

Далее все получаемые константы будем обозначать одним и тем же символом c.

3. Основные результаты

В теоремах 3.1 и 3.2 даем оценки типа Зигмунда для разностей функций, являющихся дробными производными или дробными интегралами соответственно.

Всюду ниже предполагаем, что

$$\alpha \in \mathrm{Lip}([a,b]) \ \text{ и } \ 0 < \inf_{x\in[a,b]} \alpha(x) \leq \sup_{x\in[a,b]} \alpha(x) < 1. \tag{3.1}$$

В силу леммы 2.1 и условий (3.1) при рассмотрении оператора (1.1) оценку Зигмунда достаточно получить для множителя

$$g(x) := \frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha(x)}} \tag{3.2}$$

во внеинтегральном выражении (1.1) и для интеграла

$$\theta(x) := \int_a^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{1+\alpha(x)}}dt = \int_0^{x-a} \frac{f(x)-f(x-t)}{t^{1+\alpha(x)}}dt. \tag{3.3}$$

Используем обозначения

$$\omega_\alpha(t,x) := t^{\alpha(x)}\omega(t,x), \quad \omega_{-\alpha}(t,x) := t^{-\alpha(x)}\omega(t,x).$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.1). *Если* $f \in H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$, *то для функций* $g(x)$ *и* $\theta(x)$ *справедливы следующие оценки*:

$$\omega(g,h,x) \le c \int_0^h \frac{\omega(f,t,x)}{t^{1+\alpha(x)}}\, dt \tag{3.4}$$

и

$$\omega(\theta,h,x) \le c \int_0^h \left[\frac{\omega(f,t,x)}{t^{1+\alpha(x)}} + \frac{\omega(f,t,x+h)}{t^{1+\alpha(x+h)}}\right] dt, \tag{3.5}$$

где c *не зависит от* x, h *и* f.

Доказательство. В силу (2.2) оценку (3.5) достаточно доказать при малых h. Будем считать, что $0 < h < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$.

1°. *Оценка для внеинтегрального члена* $g(x)$. Имеем

$$|g(x+h) - g(x)| \le |f(x+h) - f(x)|(x+h-a)^{-\alpha(x+h)} + \\ + |f(x) - f(a)| \cdot |(x+h-a)^{-\alpha(x+h)} - (x-a)^{-\alpha(x)}| = J_1 + J_2.$$

В оценке

$$J_1 \le c\frac{\omega(f,h,x)}{(x+h-a)^{\alpha(x+h)}} \le c\frac{\omega(f,h,x)}{h^{\alpha(x)}}$$

воспользовались свойством $h^{-\alpha(x+h)} \le ch^{-\alpha(x)}$, вытекающим из того, что $\alpha \in \mathrm{Lip}([a,b])$. Оценим J_2:

$$J_2 \le c\omega(f,x-a,x)|(x+h-a)^{-\alpha(x+h)} - (x+h-a)^{-\alpha(x)}| + \\ + c\omega(f,x-a,x)|(x+h-a)^{-\alpha(x)} - (x-a)^{-\alpha(x)}| = K_1 + K_2.$$

Докажем, что для K_1 справедлива оценка

$$K_1 \le c\frac{\omega(f,h,x)}{h^{\alpha(x)}}. \tag{3.6}$$

Так как $K_1 = c\frac{\omega(f,x-a,x)}{(x+h-a)^{\alpha(x+h)}}\left|(x+h-a)^{\alpha(x+h)-\alpha(x)} - 1\right|$, то в силу неравенства (2.8) получаем

$$K_1 \le \frac{c\omega(f,x-a,x)|\alpha(x+h) - \alpha(x)|}{(x+h-a)^{\alpha(x+h)}\min\{x+h-a,1\}^{1-\alpha(x+h)+\alpha(x)}}.$$

В случае $x+h-a \ge 1$ имеем

$$K_1 \le c\omega(f,x-a,x)\omega(\alpha,h,x) \le c\frac{\omega(f,h,x)\omega(\alpha,h,x)}{h^{1+\alpha(x)}}.$$

Если же $x+h-a < 1$, то

$$K_1 \le c\frac{\omega(f,x-a,x)\omega(\alpha,h,x)}{(x+h-a)^{\alpha(x)+1}}.$$

В случае $x-a \le h$ можем записать $\omega(f,x-a,x) \le \omega(f,h,x)$, а в случае $x-a > h$ воспользуемся тем, что для любого модуля непрерывности $\omega(f,t,x)$ функция $\frac{\omega(f,t,x)}{t}$ почти убывает по t равномерно по x (с коэффициентом 2). В обоих случаях получим оценку (3.6).

Оценим K_2. В случае $x - a \le h$ с учетом почти убывания функции $\frac{\omega(f,t,x)}{t}$ имеем

$$K_2 \le c\frac{\omega(f, x-a, x)}{(x-a)^{\alpha(x)}} \le c\int_0^{x-a} \frac{\omega(f,t,x)dt}{t^{1+\alpha(x)}} \le c\int_0^h \frac{\omega(f,t,x)dt}{t^{1+\alpha(x)}}.$$

Если же $x - a > h$, то, применяя неравенство (2.8), получим

$$K_2 \le c\frac{\omega(f, x-a, x)}{x-a} \cdot \frac{h}{(x-a)^{\alpha(x)}} \le c\frac{\omega(f,h,x)}{h^{\alpha(x)}} \le c\int_0^h \frac{\omega(f,t,x)dt}{t^{1+\alpha(x)}}.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$K_2 \le c\int_0^h \frac{\omega(f,t,x)}{t^{1+\alpha(x)}}\, dt. \tag{3.7}$$

В силу (3.6) и (3.7) получаем, что такая же оценка имеет место и для J_2. Собирая оценки для J_1 и J_2, приходим к (3.4).

2°. *Оценка для интегрального члена* $\theta(x)$. Запишем

$$|\theta(x+h) - \theta(x)| = \left| \int_{-h}^{x-a} \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{1+\alpha(x+h)}}dt - \int_0^{x-a} \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha(x)}}dt \right| \le |I_1| + |I_2| + |I_3|,$$

где

$$I_1 = \int_0^{x-a} [f(x) - f(x-t)] \cdot [(t+h)^{-1-\alpha(x+h)} - t^{-1-\alpha(x)}]dt,$$

$$I_2 = \int_{-h}^0 \frac{f(x+h) - f(x-t)}{(t+h)^{1+\alpha(x+h)}}dt, \quad I_3 = \int_0^{x-a} \frac{f(x+h) - f(x)}{(t+h)^{1+\alpha(x+h)}}dt.$$

Для I_1 получаем

$$|I_1| \le c\int_0^{x-a} \omega(f,t,x)|(t+h)^{-1-\alpha(x+h)} - t^{-1-\alpha(x)}|dt \ \le c\,(J_3 + J_4)\,,$$

где

$$J_3 = \int_0^{x-a} \omega(f,t,x)|(t+h)^{-1-\alpha(x)} - t^{-1-\alpha(x)}|dt,$$

$$J_4 = \int_0^{x-a} \omega(f,t,x)(t+h)^{-1-\alpha(x)}|(t+h)^{\alpha(x)-\alpha(x+h)} - 1|dt.$$

Для J_3 имеем

$$J_3 \le h^{-\alpha(x)} \int_0^{+\infty} \omega(f,th,x)[t^{-1-\alpha(x)} - (t+1)^{-1-\alpha(x)}]dt.$$

Здесь при $t < 1$ воспользуемся тем, что $t^{-1-\alpha(x)} - (t+1)^{-1-\alpha(x)} \le t^{-1-\alpha(x)}$, а при $t > 1$ — тем, что $\frac{\omega(f,t,x)}{t}$ почти убывает и $t^{-1-\alpha(x)} - (t+1)^{-1-\alpha(x)} \le ct^{-2-\alpha(x)}$. Поэтому

$$J_3 \le \int_0^h \frac{\omega(f,t,x)dt}{t^{1+\alpha(x)}} + 2\frac{\omega(f,h,x)}{h^{\alpha(x)}} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+\alpha(x)}} \le c\int_0^h \frac{\omega(f,t,x)dt}{t^{1+\alpha(x)}}, \tag{3.8}$$

где при последнем переходе воспользовались неравенством (2.6). Для оценки J_4 применим неравенство (2.8):

$$J_4 \le ch\int_0^{x-a} \frac{\omega(f,t,x)dt}{(t+h)^{2+\alpha(x)}} \le \frac{c}{h^{\alpha(x)}} \int_0^{\infty} \frac{\omega(f,th,x)}{(t+1)^{2+\alpha(x)}}$$

и далее оценка производится подобно действиям в (3.8): при $0 < t < 1$ пользуемся возрастанием функции $\omega(f,t,x)$ по t, а при $t > 1$ — почти убыванием функции $\frac{\omega(f,t,x)}{t}$, что дает

$$J_4 \leq c\frac{\omega(f,h,x)}{h^{\alpha(x)}}.$$

Тогда оценка

$$|I_2| \leq c\int\limits_0^h \frac{\omega(f,t,x+h)}{t^{1+\alpha(x+h)}}\,dt$$

очевидна, а для I_3 получаем

$$|I_3| \leq \omega(f,h,x)\int_0^{x-a}\frac{dt}{(t+h)^{1+\alpha(x+h)}} \leq c\frac{\omega(f,h,x)}{h^{\alpha(x)}}, \quad c = \int_0^\infty \frac{dt}{(t+1)^{1+\inf\limits_{x\in[a,b]}\alpha(x)}}.$$

Собирая оценки, с учетом (2.7) приходим к (3.5). □

Как и выше, в силу леммы 2.1 и условий (3.1) при рассмотрении оператора дробного интегрирования достаточно получить оценку Зигмунда для интеграла

$$\varphi(x) := \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha(x)}}. \tag{3.9}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (3.1). *Если* $f \in H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$, *то для интеграла* (3.9) *справедлива оценка типа Зигмунда*

$$\omega(\varphi,h,x) \leq ch\int_h^{b-a}\frac{\omega(f,t,x)dt}{t^{2-\alpha(x)}}, \quad h>0, \tag{3.10}$$

где c не зависит от x, h и f.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1. Имеем

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)| = \left|\int_{-h}^{x-a}\frac{f(x-t)dt}{(t+h)^{1-\alpha(x+h)}} - \int_0^{x-a}\frac{f(x-t)dt}{t^{1-\alpha(x)}}\right| \leq |A_1|+|A_2|+|A_3|,$$

где

$$A_1 = \int_0^{x-a}[f(x-t)-f(x)]\cdot[(t+h)^{\alpha(x+h)-1} - t^{\alpha(x)-1}]dt,$$

$$A_2 = \int_{-h}^0 \frac{f(x-t)-f(x)}{(t+h)^{1-\alpha(x+h)}}\,dt, \quad A_3 = f(x)\left[\frac{(x+h-a)^{\alpha(x+h)}}{\alpha(x+h)} - \frac{(x-a)^{\alpha(x)}}{\alpha(x)}\right].$$

Слагаемые A_1, A_2, A_3 оцениваются по схеме доказательства теоремы 3.1. Детали опускаем. □

Оценки (3.5) и (3.10) позволяют получить следующие теоремы о действии операторов дробного интегрирования и дифференцирования в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (3.1), *функция* $\frac{\omega(t,x)}{t^{\alpha(x)}}$ *является функцией типа модуля непрерывности по t для каждого $x \in [a,b]$, $\omega(t,x) \in \Phi^{\alpha(x)}$ и*

$$\omega(h,x+h) \leq c\omega(h,x), \quad h>0, \tag{3.11}$$

где c не зависит от x и h. Тогда оператор $D_{a+}^{\alpha(\cdot)}$ ограниченно действует из пространства $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$ в пространство $H_0^{\omega_{-\alpha(\cdot)}}([a,b])$.

Доказательство. Пусть $f \in H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$. В обозначениях (3.2) и (3.3) имеем

$$D_{a+}^{\alpha(\cdot)} f(x) = \frac{g(x)}{\Gamma[1-\alpha(x)]} + \frac{\alpha(x)}{\Gamma[1-\alpha(x)]}\theta(x).$$

В силу леммы 2.1 достаточно получить оценку для $g(x)$ и $\theta(x)$. Пусть $\psi(x) = g(x)$ или $\psi(x) = \theta(x)$. Из оценок Зигмунда (3.4) и (3.5) имеем

$$|\psi(x+h) - \psi(x)| \le c\left\{\int_0^h \frac{\omega(t,x)dt}{t^{1+\alpha(x)}} + \int_0^h \frac{\omega(t,x+h)dt}{t^{1+\alpha(x+h)}}\right\} \|f\|_{H^\omega}$$

и тогда

$$|\psi(x+h) - \psi(x)| \le c[h^{-\alpha(x)}\omega(h,x) + h^{-\alpha(x+h)}\omega(h,x+h)]\, \|f\|_{H^\omega}$$

по определению класса $\Phi^{\alpha(x)}$. Остается сослаться на неравенство (3.11). Нетрудно проверить также, что $\psi(a) = 0$ в силу неравенств

$$|g(x)| \le \frac{\omega(x-a,x)}{(x-a)^{\alpha(x)}} \|f\|_{H^\omega},$$

$$|\theta(x)| \le \int_0^{x-a} \frac{\omega(f,t,x)}{t^{1+\alpha(x)}}\, dt \le c\frac{\omega(x-a,x)}{(x-a)^{\alpha(x)}} \|f\|_{H^\omega}$$

и того факта, что $\frac{\omega(h,x)}{h^{\alpha(x)}}$ является функцией типа модуля непрерывности. □

Замечание 3.1. Теорема 3.3 была доказана при дополнительном условии (3.11), которое позволяет говорить о действии оператора дробного дифференцирования из пространства с характеристикой $\omega(t,x)$ в пространство с естественным образом записываемой характеристикой $\frac{\omega(t,x)}{t^{\alpha(x)}}$. Можно опустить условие (3.11), но тогда нужно будет говорить о действии в пространство с модифицированной характеристикой $\widetilde{\omega}_{-\alpha}(t,x) = \sup\limits_{y:|y-x|<t} \omega_{-\alpha}(t,y)$, как это сделано в [11] в случае пространственных гиперсингулярных интегралов (неодносторонней природы). Заметим, что характеристики $\widetilde{\omega}_{-\alpha}(t,x)$ и $\omega_{-\alpha}(t,x)$ эквивалентны при условии (3.11): $\omega_{-\alpha}(t,x) \le \widetilde{\omega}_{-\alpha}(t,x) \le 2c\,\omega_{-\alpha}(t,x)$, где c — постоянная из (3.11).

Как для теоремы 3.3 (при помощи оценок теоремы 3.1), доказывается

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* (3.1), *функция* $\omega(t,x)$ *является функцией типа модуля непрерывности по* t *для каждого* $x \in [a,b]$ *и* $\omega(t,x) \in \Phi_{1-\alpha(x)}$. *Тогда оператор* $I_{a+}^{\alpha(\cdot)}$ *ограниченно действует из пространства* $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$ *в* $H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}([a,b])$.

Переформулируем теперь теоремы 3.3 и 3.4 в терминах локальных индексов $m(\omega,x)$ и $M(\omega,x)$, введенных в (2.4), (2.5). Для этого достаточно воспользоваться теоремой 2.1, дающей характеризацию классов Зигмунда–Бари–Стечкина в терминах неравенств для этих индексов.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия* (3.1), *функция* $\frac{\omega(t,x)}{t^{\alpha(x)}}$ *является функцией типа модуля непрерывности по* t *для каждого* $x \in [a,b]$ *и выполнено условие* (3.11). *Если локальный индекс* $m(\omega,x)$ *функции* $\omega(t,x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in[a,b]} [m(\omega,x) - \alpha(x)] > 0,$$

то оператор $D_{a+}^{\alpha(\cdot)}$ *ограничен из* $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$ *в* $H_0^{\omega_{-\alpha}(\cdot)}([a,b])$.

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия* (3.1), *функция* $\omega(t,x)$ *является функцией типа модуля непрерывности по* t *для каждого* $x \in [a,b]$ *и локальный индекс* $M(\omega,x)$ *функции* $\omega(t,x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]}[M(\omega,x)+\alpha(x)] < 1.$$

Тогда оператор $I^{\alpha(\cdot)}_{a+}$ *ограниченно действует из* $H_0^{\omega(\cdot)}([a,b])$ *в* $H_0^{\omega_\alpha(\cdot)}([a,b])$.

Литература

[1] Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. *Введение в теорию нелинейных сингулярных уравнений* (Наука, М., 1980).

[2] Гинзбург А.И., Карапетянц Н.К. *Дробное интегродифференцирование в гёльдеровских классах переменного порядка*, Докл. РАН **339** (4), 439–441 (1994).

[3] Karapetyants N.K., Ginzburg A.I. *Fractional integrodifferentiation in Hölder classes of arbitrary order*, Georg. Math. J. **2** (2), 141–150 (1995).

[4] Ross B., Samko S.G. *Fractional integration operator of variable order in the Hölder spaces* $H^{\lambda(x)}$, Intern. J. Math. Math. Sci. **18** (4), 777–788 (1995).

[5] Samko S.G. *Differentiation and integration of variable order and the spaces* $L^{p(x)}$, Contemporary Math. **212**, 203–219 (1998).

[6] Вакулов Б.Г. *Сферические потенцалы в весовых пространствах Гёльдера переменного порядка*, Докл. РАН **400** (1), 7–10 (2005).

[7] Вакулов Б.Г. *Сферические операторы типа потенциала в весовых пространствах Гёльдера переменного порядка*, Владикавказский матем. журн. **7** (2), 26–40 (2005).

[8] Вакулов Б.Г. *Операторы сферической свертки со степенно-логарифмическим ядром в пространствах обобщенной переменной гёльдеровости*, Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки, № 1, 7–10 (2006).

[9] Вакулов Б.Г. *Операторы сферической свертки в пространствах переменной гёльдеровости*, Матем. заметки **80** (5), 683–695 (2006).

[10] Vakulov B.G. *Spherical potentials of complex order in the variable Hölder spaces*, Integral Trans. Spec. Funct. **16** (5–6), 489–497 (2005).

[11] Вакулов Б.Г., Самко Н.Г., Самко С.Г. *Операторы типа потенциала и гиперсингулярные интегралы в пространствах Гёльдера переменного порядка на однородных пространствах*, Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Актуальные пробл. матем. гидродинамики. Спецвыпуск, 40–45 (2009).

[12] Karapetyants N.K., Samko N.G. *Weighted theorems on fractional integrals in the generalized Hölder spaces* $H_0^w(\varrho)$ *via the indices* m_w *and* M_w, Fract. Calc. Appl. Anal. **7** (4), 437–458 (2004).

[13] Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Моск. матем. о-ва **5**, 483–522 (1956).

[14] Samko S.G., Murdaev Kh.M. *Weighted Zygmund estimates for fractional differentiation and integration, and their applications*, Proc. of the Steklov Institute of Math., № 3, 233–235 (1989).

[15] Maligranda L. *Orlicz spaces and interpolation* (Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Campinas SP Brazil, 1989).

[16] Matuszewska W., Orlicz W. *On some classes of functions with regard to their orders of growth*, Studia Math., № 26, 11–24 (1965).

[17] Samko N.G. *Singular integral operators in weighted spaces with generalized Hölder condition*, Proc. A. Razmadze Math. Inst., Tbilisi **120**, 107–134 (1999).

[18] Samko N.G. *Criterion of Fredholmness of singular operators with piece-wise continuous coefficients in the generalized Hölder spaces with weight*, Proc. of IWOTA 2000, Setembro 12–15, Faro, Portugal, pp. 363–376. Birkhauser, "Operator Theory: Advances and Applications", v. 142, 2002.

[19] Samko N.G. *On compactness of integral operators with a generalized weak singularity in weighted spaces of continuous functions with a given continuity modulus*, Proc. A. Razmadze Math. Inst., Tbilisi **136**, 91–113 (2004).

[20] Samko N.G. *On non-equilibrated almost monotonic functions of the Zygmund–Bari–Stechkin class*, Real Anal. Exch. **30** (2), 727 (2005).

[21] Samko N.G. *Singular integral operators in weighted spaces of continuous functions with an oscillating continuity modulus and oscillating weights*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhauser, Proc. of IWOTA, Newcastle, July 2004 **171**, 323–347 (2006).
[22] Samko N.G. *Singular integral operators in weighted spaces of continuous functions with non-equilibrated continuity modulus*, Mathem. Nachrichten, Weinheim **279** (12), 1359 –1375 (2006).
[23] Samko N.G. *Parameter depending Bari–Stechkin classes and local dimensions of measure metric spaces*, Proc. A. Razmadze Math. Inst., Tbilisi **145**, 122–129 (2007).
[24] Samko N.G. *Parameter depending almost monotonic functions and their applications to dimensions in metric measure spaces*, J. Function Spaces Appl. **7** (1), 61–89 (2009).

Б.Г. Вакулов

доцент, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений,
Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, д. 8-А, г. Ростов-на-Дону, 344090,

e-mail: vakulov@math.rsu.ru

Е.С. Кочуров

аспирант, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений,
Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, д. 8-А, г. Ростов-на-Дону, 344090,

e-mail: ekochurov@yandex.ru

Н.Г. Самко

научный исследователь, Центр функционального анализа и приложений,
Университет Алгарве, Фаро, 8005-139, Португалия,

e-mail: nsamko@gmail.com

B.G. Vakulov

Associate Professor, Chair of Differential and Integral Equations,
Southern Federal University,
8-A Milchakov str., Rostov-on-Don, 344090 Russia,

e-mail: vakulov@math.rsu.ru

E.S. Kochurov

Postgraduate, Chair of Differential and Integral Equations,
Southern Federal University,
8-A Milchakov str., Rostov-on-Don, 344090 Russia,

e-mail: ekochurov@yandex.ru

N.G. Samko

Researcher, Center of Functional Analysis and Applications,
University of Algarve, Faro, 8005-139 Portugal,

e-mail: nsamko@gmail.com