ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 5 (492)

УДК 517.518

Б.В. СИМОНОВ

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ С (K,S)-МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

1. *Введение.* Известна

Теорема Харди–Литтлвуда ([1], с. 657). *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $a_n \geq a_{n+1}$ для всех n, где $\{a_n\}$ — коэффициенты рядов $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, а $f(x)$ и $g(x)$ — суммы этих рядов. Тогда для $p \in (1,\infty)$ справедливы неравенства*

$$C_1\biggl(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p (n+1)^{p-2}\biggr)^{\frac{1}{p}} \leq \|f(x)\|_p \leq C_2\biggl(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p (n+1)^{p-2}\biggr)^{\frac{1}{p}},$$

$$C_3\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\biggr)^{\frac{1}{p}} \leq \|g(x)\|_p \leq C_4\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\biggr)^{\frac{1}{p}},$$

где положительные постоянные $C_1,\dots,C_4$ не зависят от $\{a_n\}$.

Заметим, что все эти (и нижеследующие) неравенства понимаются таким образом: из конечности правой части следует конечность их левой части.

Приведем утверждение, дополняющее теорему Харди-Литтлвуда.

Теорема ([2]). а) *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0$ для всех n. Тогда для $p \in (0,\infty)$*

$$C_1\biggl(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})^p (n+1)^{2p-2}\biggr)^{\frac{1}{p}} \leq \|f(x)\|_p \leq C_2\biggl(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})^p (n+1)^{2p-2}\biggr)^{\frac{1}{p}}.$$

б) *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $a_n \geq a_{n+1}$ для всех n. Тогда для $p \in (0,\infty)$*

$$C_3\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\biggr)^{\frac{1}{p}} \leq \|g(x)\|_p \leq C_4\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\biggr)^{\frac{1}{p}},$$

где положительные постоянные $C_1,\dots,C_4$ не зависят от $\{a_n\}$.

Нетрудно заметить, что при выполнениии условия а) теоремы справедливы неравенства $C_1(a_n - a_{n+2})^p \leq (a_n - a_{n+1})^p \leq C_2(a_n - a_{n+2})^p$, где положительные постоянные C_1, C_2 не зависят от n и $\{a_n\}$. На основании этого п. а) теоремы из [2] может быть записан в эквивалентной форме

$$C_3\biggl(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+2})^p (n+1)^{2p-2}\biggr)^{\frac{1}{p}} \leq \|f(x)\|_p \leq C_4\biggl(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+2})^p (n+1)^{2p-2}\biggr)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00042.

Результаты приведенных выше теорем обобщает

Утверждение 1. *Теорема Харди–Литтлвуда и п.* б) *теоремы из* [2] *имеют место и для тригонометрических рядов, коэффициенты которых удовлетворяют свойствам* $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} \geq a_{2n+3}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; *п.* а) *теоремы из* [2] *имеет место и для тригонометрических рядов, коэффициенты которых удовлетворяют свойствам* $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, $a_0 = \frac{a_1 - a_2}{2}$, $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} - 2a_{2n+1} + a_{2n+3} \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$

Заметим, что условие монотонности и выпуклости для этих коэффициентов не выполнено, за исключением случая, когда $a_n \equiv 0$.

Введем основные определения и обозначения для формулировки результатов данной работы. Пусть Φ — совокупность измеримых, неотрицательных, суммируемых на $(-\pi, \pi)$ функций. Пространством с весом $L((-\pi, \pi); p; \varphi)$, где $p > 0$, $\varphi \in \Phi$, назовем множество измеримых, 2π-периодических функций $f(x)$, для каждой из которых конечна квазинорма

$$\|f(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)|f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Будем рассматривать ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{2}$$

и

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \tag{3}$$

Для целых $k \geq 0$ обозначим

$$\Delta_k a_m = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i a_{m+i} \qquad (\Delta_0 a_m = a_m),$$

$$\{\Delta\}_k a_m = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a_{m+i} \qquad (\{\Delta\}_0 a_m = a_m).$$

Пусть $\varphi \in \Phi$, $\varphi_c(x) = \varphi(x) + \varphi(-x)$. Скажем, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет

условию A_1, если для любого $\delta \in (0, \pi)$

$$\int_0^{\delta} \varphi_c(x) dx \leq C_1 \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \varphi_c(x) dx,$$

где положительная постоянная C_1 не зависит от δ;

условию A_2, если для любого $\delta \in (0, \pi)$ и любого $b \geq \frac{\pi}{2\delta}$

$$\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \varphi_c(x) \sin^2 bx \, dx \geq C_2 \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \varphi_c(x) dx,$$

где положительная постоянная C_2 не зависит от b и δ;

условию A_3, если $\varphi(-x) = \varphi(x - \pi)$, $\varphi(x) = \varphi(\pi - x)$ для почти всех $x \in (0, \pi)$;

условию $A(p)$ (при заданном p), если для любого $\delta \in (0, \pi)$

$$\int_{\frac{\delta}{4}}^{\pi} \varphi_c(x) x^{-p} dx \leq C_3 \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \varphi_c(x) x^{-p} dx,$$

где положительная постоянная C_3 не зависит от δ.

Приведем пример функции $\varphi(x)$, для которой условие A_2 заведомо выполнено. Для этого введем дополнительно два определения.

Следуя С.Н. Бернштейну ([3]), назовем конечную функцию $\alpha(x)$ почти возрастающей на (a,b), если существует такая постоянная $C>0$, что $\alpha(x_1) \leq C\alpha(x_2)$ при любых x_1 и x_2 с $a < x_1 < x_2 < b$.

Скажем, что конечная функция $\alpha(x)$ удовлетворяет Δ_2-условию на $(0,b)$, если существует такая постоянная $C > 0$, что $\alpha(x) \leq C\alpha(x/2)$ для любого $x \in (0,b)$.

Теперь рассмотрим конечную функцию $\varphi(x)$, являющуюся четной на $(-\pi,\pi)$, почти возрастающей на $(0,\pi)$ и удовлетворяющей Δ_2-условию на $(0,\pi)$. Для этой функции условие A_2 выполнено. Это легко получить, используя свойства функции $\varphi(x)$ и неравенство ([2])

$$\int_{a\pi}^{2a\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq C, \tag{4}$$

где положительная постоянная C не зависит от a $(a \geq \frac{1}{4})$.

Скажем, что последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_n\}$ (k,s)-монотонна, если $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_k(\{\Delta\}_s a_n) \geq 0$ для некоторых $k \geq 0$, $s \geq 0$ и всех n.

Нетрудно проверить, что если последовательность $\{a_n\}$ ($a_n \to 0$ при $n \to \infty$) невозрастающая, то она $(1,s)$-монотонна для любого $s = 0,1,\ldots$ Обратное не всегда верно. Например, рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ такую, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} \geq a_{2n+3}$ при $n = 0,1,\ldots$ Тогда эта последовательность не является невозрастающей, но является $(1,1)$-монотонной.

Ряд (2) или (3) называется рядом с (k,s)-монотонными коэффициентами, если последовательность $\{a_n\}$, составленная из коэффициентов этих рядов, является (k,s)-монотонной.

Через $[a]$ обозначим целую часть числа a. Пусть $f(x)$ — сумма ряда (2), $g(x)$ — сумма ряда (3).

В данной работе находятся условия, при которых суммы тригонометрических рядов (2) и (3) с (k,s)-монотонными коэффициентами принадлежат пространствам с весом, а также устанавливаются оценки квазинорм этих функций через коэффициенты рядов (2) и (3).

Далее приведем результаты, которые будут обоснованы в последующих пунктах данной статьи.

Утверждение 2. *Пусть $\varphi \in \Phi$ и удовлетворяет условию A_1, а последовательность $\{a_n\}$ является (k,s)-монотонной. Тогда при любом $p \in (0,\infty)$*

а) *если $s = 0$, $k \geq 2$, то*

$$\|f(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \leq C_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\Delta_1 a_{n-1})^p n^{2p} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx \right)^{\frac{1}{p}}; \tag{5}$$

если $s = 1$ или $s = 2$, $k \geq 2$, то

$$\|f(x)\|_{((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});p;\varphi)} \leq C_2 \Bigg(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_c(x)dx (\Delta_1(\{\Delta\}_s a_0))^p + \\ + \sum_{n=2s}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx\, n^{2p} (\Delta_1(\{\Delta\}_s a_{n-s}))^p \Bigg)^{\frac{1}{p}}; \tag{6}$$

б) *если $s = 0$, $k \geq 1$, то*

$$\|F(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \leq C_3 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi_c(x)dx |a_0|^p + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx\, n^p \cdot a_n^p \right)^{\frac{1}{p}}; \tag{7}$$

если $s = 1$ или $s = 2$, $k \geq 1$, то

$$\|F(x)\|_{((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});p;\varphi)} \leq C_4\bigg(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_c(x)dx(\{\Delta\}_s a_0 + |a_0|(s-1))^p +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx\, n^p(\{\Delta\}_s a_{n-1})^p\bigg)^{\frac{1}{p}}, \quad (8)$$

где $F(x) = f(x)$ или $F(x) = g(x)$, а положительные постоянные $C_1, \ldots, C_4$ не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

Отметим, что для справедливости неравенства (7) в случае, когда $F(x) = g(x)$, достаточно потребовать (k, s)-монотонность последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Утверждение 3. *Пусть $\varphi \in \Phi$, а последовательность $\{a_n\}$ является (k, s)-монотонной, $p \in (0, \infty)$.*

а) *Если $s = 0$, $k \geq 3$, то*

$$\|f(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \geq C_1\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} (\Delta_1 a_{n-1})^p n^{2p} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx\bigg)^{\frac{1}{p}}; \quad (9)$$

если $s = 1$ или $s = 2$, $k \geq 3$ (в случае $s = 2$ для ряда (2) считаем дополнительно, что $a_0 \geq 5a_1 + 3a_2 - 8a_3 - 2a_4 + 3a_5$), то

$$\|f(x)\|_{((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});p;\varphi)} \geq C_2\bigg(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_c(x)dx(\Delta_1(\{\Delta\}_s a_0))^p +$$

$$+\sum_{n=2s}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx\, n^{2p}(\Delta_1(\{\Delta\}_s a_{n-s}))^p\bigg)^{\frac{1}{p}}. \quad (10)$$

Кроме того, для функций $\varphi(x)$, дополнительно удовлетворяющих условию $A(p)$, при $s = 0$ и $k \geq 3$

$$\|f(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \geq C_3\bigg(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi_c(x)dx\, a_0^p + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx\, n^p \cdot a_n^p\bigg)^{\frac{1}{p}}; \quad (11)$$

при $s = 1$ или $s = 2$ и $k \geq 3$

$$\|f(x)\|_{((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});p;\varphi)} \geq C_4\bigg(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_c(x)dx(\{\Delta\}_s a_0)^p + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx\, n^p(\{\Delta\}_s a_{n-1})^p\bigg)^{\frac{1}{p}}. \quad (12)$$

б) *Если $s = 0$, $k \geq 2$, то*

$$\|g(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \geq C_5\bigg(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi_c(x)dx\, a_0^p + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx\, n^p \cdot a_n^p\bigg)^{\frac{1}{p}}; \quad (13)$$

если $s = 1$ или $s = 2$, $k \geq 2$, то

$$\|g(x)\|_{((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});p;\varphi)} \geq C_6\bigg(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_c(x)dx(\{\Delta\}_s a_0)^p + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx\, n^p(\{\Delta\}_s a_{n-1})^p\bigg)^{\frac{1}{p}}; \quad (14)$$

где положительные постоянные $C_1, \ldots, C_6$ не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

Отметим, что для справедливости неравенства (13) достаточно потребовать (k, s)-монотонность последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $a_0 \geq 0$.

Утверждение 4. *Пусть $\varphi \in \Phi$ и удовлетворяет условию A_2, а последовательность $\{a_n\}$ является (k,s)-монотонной. Тогда при любом $p \in (0,\infty)$*

а) *если $s=0$, $k\geq 2$, то справедливо неравенство* (9), *при этом, если функция $\varphi(x)$ дополнительно удовлетворяет условию $A(p)$, то справедливо неравенство* (11);

если $s=1$, $k\geq 2$, $a_0 \geq a_2+a_1-a_3+4(a_2-a_4)$ для коэффициентов ряда (2), *то справедливо неравенство* (10), *кроме того, если функция $\varphi(x)$ дополнительно удовлетворяет условию $A(p)$, то справедливо неравенство* (12);

если $s=2$, $k\geq 2$, $a_0\geq 3a_2+2a_1-2a_3-2a_4$ для коэффициентов ряда (2), *то справедливо неравенство* (10), *при этом, если функция $\varphi(x)$ дополнительно удовлетворяет условию $A(p)$, то справедливо неравенство* (12);

б) *если $s=0$, $k\geq 1$, то*

$$\|g(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \geq C_1\bigg(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_c(x)dx(a_0^p+a_1^p)+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx\, n^p\cdot a_n^p\bigg)^{\frac{1}{p}};$$

если $s=0$, $k\geq 1$, $a_0\geq 0$ для коэффициентов ряда (2), *последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (k,s)-монотонна, а функция $\varphi(x)$ дополнительно удовлетворяет условию A_3 и четная, то справедливо неравенство* (13);

если $s=1$, $k\geq 1$, то справедливо неравенство (14);

если $s=2$, $k\geq 1$, $a_0\geq 4a_1+a_2$ для коэффициентов ряда (3), *то*

$$\|g(x)\|_{((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});p;\varphi)} \geq C_2\bigg(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(x)dx((\{\Delta\}_2 a_0)^p+(\{\Delta\}_2 a_1)^p+$$
$$+(\{\Delta\}_2 a_2)^p)+\sum_{n=4}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx\, n^p(\{\Delta\}_2 a_{n-1})^p\bigg)^{\frac{1}{p}},$$

где положительные постоянные C_1, C_2 не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

2. Пусть $B_0^1(x)=\frac{1}{2}$; $B_n^1(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cdots+\cos nx$ для $n\geq 1$; $B_n^k(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{n} B_\nu^{k-1}(x)$ для $k=2,3,\ldots$ и $n\geq 0$; $\overline{B}_n^1(x)=\sin x+\cdots+\sin nx$ для $n\geq 1$; $\overline{B}_n^k(x)=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\overline{B}_\nu^{k-1}(x)$ для $k=2,3,\ldots$ и $n\geq 1$.

Лемма 1 ([4]). *Пусть $a_n\geq 0$, $b_n\geq 0$, $n=1,2,\ldots$, $1\leq p<\infty$. Тогда*

а) *если $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} a_\nu = a_n\beta_n$, $n=1,2,\ldots$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\Big(\sum\limits_{\nu=1}^{k} b_\nu\Big)^p \leq p^p\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\beta_\nu b_\nu)^p$;*

б) *если $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_n\beta_n$, $n=1,2,\ldots$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\Big(\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} b_\nu\Big)^p \leq p^p\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\beta_\nu b_\nu)^p$.*

Лемма 2 ([5], с. 125). *Пусть $a_n\geq 0$, $0<\alpha\leq\beta<\infty$. Тогда*

$$\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\beta}\bigg)^{\frac{1}{\beta}} \leq \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}\bigg)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Лемма 3 ([5], с. 66). *Пусть $u_1\geq 0$, $u_2\geq 0$. Тогда для любого $\alpha>0$ $C_1(\alpha)(u_1^\alpha+u_2^\alpha)\leq (u_1+u_2)^\alpha\leq C_2(\alpha)(u_1^\alpha+u_2^\alpha)$.*

Лемма 4. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ является (k,s)-монотононной. Тогда*

а) *функция $f(x)$ может быть почти всюду представлена в виде*

$$f(x)=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_1 a_{n-1}\sin(2n-1)\frac{x}{2},$$

если $k=1$, $s=0$.

если $k=1,\ s=1,$ *то*

$$f(x)=\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\{\Delta\}_1 a_{n-1}\cos(2n-1)\frac{x}{2};$$

если $k=1,\ s=2,$ *то*

$$f(x)=\frac{a_0-a_2}{2}\cdot\frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2}+\frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2}\Big(\frac{\{\Delta\}_2 a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{\Delta\}_2 a_{n-1}\cos nx\Big);$$

если $k=2,\ s=1,$ *то*

$$f(x)=\frac{a_0-a_2}{2}-\frac{\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_1)+4\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2)}{2(2\cos\frac{x}{2})^2}+2\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+$$
$$+\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}(2\cos\frac{x}{2})^2}((\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_1)+\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2))\Big(\sin\frac{x}{2}+\sin 3\frac{x}{2}\Big)+$$
$$+\sum_{n=3}^{\infty}\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_{n-2})\sin(2n-1)\frac{x}{2}\Big);$$

если $k=2,\ s=2,$ *то*

$$f(x)=\frac{\Delta_2(\{\Delta\}_2 a_0)}{2}-\frac{a_1-a_3}{2(2\cos\frac{x}{2})^2}+\frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2}\Big(\frac{3a_1+4a_2-a_3-2a_4}{2}+$$
$$+(2a_1+3a_2-a_4)\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\{\Delta\}_2 a_{n-1}\cos nx\Big);$$

если $k=3,\ s=2,$ *то*

$$f(x)=\frac{\Delta_3(\{\Delta\}_2 a_0)}{2}-\frac{2a_1-3a_3+a_5}{2(2\cos\frac{x}{2})^2}+\frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2}\Big(\frac{6a_1+4a_2-7a_3-2a_4+3a_5}{2}+$$
$$+(3a_1+3a_2-2a_3-a_4+a_5)\cos x+\sum_{n=2}^{\infty}\{\Delta\}_2 a_{n-1}\cos nx\Big);$$

б) *функция* $g(x)$ *может быть почти всюду представлена в виде*

$$g(x)=\frac{a_0}{2}\Big(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big)+\frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^s}\sum_{n=1}^{\infty}\{\Delta\}_s a_{n-1}\sin(ns-2+s)\frac{x}{2},\tag{15}$$

если $k=1,\ s=1$ *или* $s=2.$

Доказательство проведем для п. б).

Случай $s=1$. Рассмотрим $S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\sin jx$. Тогда

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{n}a_j\sin 2j\frac{x}{2}\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{n}a_j\Big(\sin(2j-1)\frac{x}{2}+$$
$$+\sin(2j+1)\frac{x}{2}\Big)\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\Big(a_1\sin\frac{x}{2}+\sum_{j=2}^{n}(a_{j-1}+a_j)\sin(2j-1)\frac{x}{2}\Big)+$$
$$+\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}a_n\sin(2n+1)\frac{x}{2}=\frac{a_0}{2}\Big(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Big)+$$
$$+\frac{1}{\cos\frac{x}{2}}\sum_{j=1}^{n}(a_{j-1}+a_j)\sin(2j-1)\frac{x}{2}+\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}a_n\sin(2n+1)\frac{x}{2}.$$

При $n \to \infty$ получаем представление функции $g(x)$. Существование предела устанавливается так же, как в ([1], с. 100).

Случай $s = 2$. Используя представление $S_n(x)$, полученное выше, будем иметь

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}\left(a_1 \sin\frac{x}{2} + \sum_{j=2}^{n}(a_{j-1}+a_j)\sin(2j-1)\frac{x}{2}\right)\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} +$$

$$+\frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}a_n\sin(2n+1)\frac{x}{2} = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2}\Bigg((2a_1+a_2)\sin x +$$

$$+\sum_{j=2}^{n}\{\Delta\}_2 a_{j-1}\sin jx\Bigg) - (a_n + a_{n+1})\frac{\sin nx}{(2\cos\frac{x}{2})^2} + \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}a_n \sin(2n+1)\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{a_0}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2}\sum_{j=1}^{n}\{\Delta\}_2 a_{j-1}\sin jx + \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}}a_n\sin(2n+1)\frac{x}{2} -$$

$$-\frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2}(a_n + a_{n+1})\sin nx.$$

При $n \to \infty$ получим представление функции $g(x)$ в этом случае.

Аналогичным образом доказывается п. а). $\square$

Лемма 5. *Пусть $\varphi \in \Phi$ и удовлетворяет условию A_1, а последовательность $\{b_n\}$ является $(1,0)$-монотонной. Тогда для $p \in (0,\infty)$*

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin(2n-1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C_1\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p n^{2p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{16}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)\frac{x}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C_2\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p n^{p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{17}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C_3\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^p n^{p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{18}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\left|\frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C_4\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\varphi_c(x)dx\, b_0^p + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^p n^{p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{19}$$

$$\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x)\left|\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_1 b_n \frac{\sin nx}{\sin x}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C_5\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(x)dx\, b_1^p + \sum_{n=2}^{\infty} b_n^p n^{p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{20}$$

где положительные постоянные $C_1,\dots,C_5$ не зависят от $\{b_n\}$.

Доказательство. Применяя преобразование Абеля (см., напр., аналогичные доказательства в [1], сс. 100, 651), получаем равенство

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Delta_1 b_n B_n(x), \tag{21}$$

где если

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin(2n-1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, \tag{22}$$

то $B_n(x) = \frac{\sin^2 n\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$, $\Delta_1 b_0 = 0$;

если $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)\frac{x}{2}$, то $B_n(x) = \frac{\sin^2 n\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $\Delta_1 b_0 = 0$;

если $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, то $B_n(x)=\overline{B}_n^1(x)$, $\Delta_1 b_0=0$, $B_0(x)=0$;

если $F(x)=\frac{b_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$, то $B_n(x)=B_n^1(x)$;

если $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_1 b_n \frac{\sin nx}{\sin x}$, то $B_n(x)=\frac{\sin nx}{\sin x}$, $\Delta_1 b_0=0$, $B_0(x)=0$.

Доказательство проведем лишь для случая (22). Рассмотрим

$$J=\|F(x)\|^p_{((-\pi,\pi);p;\varphi)}=\int_0^\pi \varphi_c(x)|F(x)|^p dx.$$

Применяя лемму 3, получаем

$$J\le C_1\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m+1}}}^{\frac{\pi}{2^m}}\varphi_c(x)\Bigg|\sum_{n=1}^{2^{m+1}-1}\Delta_1 b_n B_n(x)\Bigg|^p dx+ \\ +\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m+1}}}^{\frac{\pi}{2^m}}\varphi_c(x)\Bigg|\sum_{n=2^{m+1}}^{\infty}\Delta_1 b_n B_n(x)\Bigg|^p dx\Bigg)=C_1(J_1+J_2).$$

Так как $|B_n(x)|\le C_2 n^2$, где положительная постоянная C_2 не зависит от x и n, то

$$J_1\le C_3\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m+1}}}^{\frac{\pi}{2^m}}\varphi_c(x)dx\Bigg(\sum_{n=1}^{2^{m+1}-1}\Delta_1 b_n(n+1)^2\Bigg)^p.$$

Поскольку $\Delta_1 b_n=b_n-b_{n+1}$ и $b_n\ge 0$, то

$$\sum_{n=1}^{2^m-1}\Delta_1 b_n(n+1)^2=\sum_{n=2}^{2^m-1}b_n[(n+1)^2-n^2]+b_1\cdot 2^2-b_{2^m}\cdot 2^m\le 4\sum_{n=1}^{2^m-1}b_n\cdot n.$$

Применяя эту оценку и учитывая свойства $\{b_n\}$, имеем

$$J_1\le C_4\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m+1}}}^{\frac{\pi}{2^m}}\varphi_c(x)dx\Bigg(\sum_{s=1}^{m+1}\sum_{n=2^{s-1}}^{2^s-1}b_n\cdot n\Bigg)^p\le \\ \le C_5\Bigg(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\varphi_c(x)dx\,b_1^p+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(x)dx\,b_1^p+\sum_{m=2}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^m}}^{\frac{\pi}{2^{m-1}}}\varphi_c(x)dx\Bigg(\sum_{s=2}^{m}b_{2^{s-1}}2^{2s}\Bigg)^p\Bigg).$$

Используя лемму 1 при $p\in[1,\infty)$ и лемму 2 при $p\in(0,1)$, получаем

$$J_1\le C_6\Bigg(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\varphi_c(x)dx\,b_1^p+\sum_{s=2}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{s-1}}}^{\frac{\pi}{2^{s-2}}}\varphi_c(x)dx\,b_{2^{s-1}}^p 2^{sp}\Bigg)\le C_7\sum_{n=1}^{\infty}b_n n^{2p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx.$$

Оценим теперь J_2. Так как $|B_n(x)|\le C_8/x^2$, где положительная постоянная C_8 не зависит от x и n, то

$$J_2\le C_8\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{m+1}}}^{\frac{\pi}{2^m}}\varphi_c(x)dx 2^{2mp}\Bigg|\sum_{n=2^{m+1}}^{\infty}\Delta_1 b_m\Bigg|^p\le C_9\sum_{n=1}^{\infty}b_n n^{2p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx.$$

Объединяя оценки для J_1 и J_2, будем иметь неравенство (16). Аналогично доказываются неравенства (17)–(20). $\square$

Лемма 6. *Пусть $\varphi\in\Phi$, а последовательность $\{b_n\}$ является $(1,0)$-монотонной. Тогда для $p\in(0,\infty)$*

а) *если* $k=2$, *то*

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\left|\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{\sin(2n-1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_1\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^p n^{2p}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{23}$$

$$\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x)\left|\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n-1)x\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_2\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(x)dx\, b_1^p+S_2\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{24}$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\left|\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_3\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\varphi_c(x)dx\, b_1^p+S_2\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{25}$$

$$\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x)\left|\sum_{n=1}^{\infty}b_n\frac{\sin nx}{\sin x}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_4\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(x)dx\; b_1^p+S_2\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{26}$$

б) *если* $k=1$ *и, кроме того, функция* $\varphi(x)$ *дополнительно удовлетворяет условию* A_2, *то справедливы неравенства* (23), (24),

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\left|\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq C_5\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(x)dx(b_0^p+b_1^p)+S_2\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{27}$$

где $S_2=\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n^p n^p\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx$, *а положительные постоянные* $C_1,\dots,C_5$ *не зависят от* $\{b_n\}$.

Доказательство. а) Докажем неравенство (23). Используя представление (21), будем иметь

$$J=\|F(x)\|^p_{((-\pi,\pi);p;\varphi)}\geq C_1\sum_{v=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{v+1}}^{\frac{\pi}{v}}\varphi_c(x)\left|\sum_{n=v+1}^{\infty}\Delta_2 b_{n+1}B_n^3(x)\right|^p dx.$$

Как показано в [6], для $x\in[0,\pi]$ и $n\geq\nu-1$ $B_n^3(x)\geq C_2\frac{n+1}{x^2}$. Поэтому

$$J\geq C_3\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{\nu+1}}^{\frac{\pi}{\nu}}\varphi_c(x)dx\nu^{2p}\left(\sum_{n=\nu-1}^{\infty}\Delta_2 b_{n+1}(n+1)\right)^p.$$

Но $\sum\limits_{n=\nu}^{\infty}\Delta_2 b_n n=\Delta_1 b_\nu\cdot\nu+b_{\nu+1}=b_\nu+(\nu-1)\Delta_1 b_\nu\geq b_\nu$. Используя эту оценку, получим $J\geq C_3\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}b_\nu^p\nu^{2p}\int_{\frac{\pi}{\nu+1}}^{\frac{\pi}{\nu}}\varphi_c(x)dx$. Неравенство (23) доказано. Аналогично доказываются неравенства (24)–(26). Пункт а) доказан.

б) Докажем неравенство (24) (случай $k=1$). Используя представление (21), будем иметь

$$\|F(x)\|^p_{((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});p;\varphi)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2^{\nu+1}}}^{\frac{\pi}{2^\nu}}\varphi_c(x)\left|\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_1 b_n\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\right|^p dx=\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu,$$

где $A_\nu=\int_{\frac{\pi}{2^{\nu+1}}}^{\frac{\pi}{2^\nu}}\varphi_c(x)|F(x)|^p dx$. Покажем, что

$$A_\nu\geq C_4\cdot 2^{\nu p}b^p_{2^\nu-1}\int_{\frac{\pi}{2^{\nu+1}}}^{\frac{\pi}{2^\nu}}\varphi_c(x)dx, \tag{28}$$

где положительная постоянная C_4 не зависит от ν и $\{b_\nu\}$.

Обозначим $J_\nu=[\frac{\pi}{2^{\nu+1}},\frac{\pi}{2^\nu}]$. Пусть $J'_\nu=\{x\in J_\nu:\varphi_c(x)\neq 0\}$. Если $\mu J'_\nu=0$, то неравенство(28) доказано. Пусть $\mu J'_\nu>0$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{2^\nu-1} kb_k > 2\cdot 2^{2\nu}b_{2^\nu-1}$. Для любого $x\in J_\nu$ имеем

$$F(x)\geq \frac{4}{\pi^2}x\Big(\sum_{n=1}^{2^\nu-1} b_n n^2-\sum_{n=2}^{2^\nu} b_n(n-1)^2\Big)\geq$$
$$\geq \frac{4}{\pi^2}x\Big(\sum_{n=1}^{2^\nu-1} b_n\cdot n-\frac{1}{2}(2\cdot 2^{2\nu}b_{2^\nu})\Big)\geq \frac{2}{\pi^2}\frac{\pi}{2^{\nu+1}}\sum_{n=1}^{2^\nu-1} b_n\cdot n\geq C_5\cdot 2^\nu b_{2^\nu-1}.$$

Тогда $A_\nu\geq C_6 2^{\nu p}b_{2^\nu-1}^p\int_{\frac{\pi}{2^{\nu+1}}}^{\frac{\pi}{2^\nu}}\varphi_c(x)dx$, где положительная постоянная C_6 не зависит от ν и $\{b_\nu\}$.

2. Пусть $2\cdot 2^{2\nu}b_{2^\nu-1}\leq \sum\limits_{k=1}^{2^\nu-1} kb_k$. Для любого $x\in J_\nu$ имеем

$$F(x)=\sum_{n=1}^{2^\nu-1}\Delta_1 b_n\frac{\sin^2 nx}{\sin x}+\sum_{n=2^\nu}^{\infty}\Delta_1 b_n\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\leq \frac{\pi}{2}x\sum_{n=1}^{2^\nu-1}\Delta_1 b_n\cdot n^2+\frac{\pi}{2x}\sum_{n=2^\nu}^{\infty}\Delta_1 b_n\leq C_7 2^\nu b_{2^\nu-1}.$$

В то же время, используя условие A_2, получаем

$$\int_{J'_\nu}\varphi_c(x)F(x)dx=\int_{J_\nu}\varphi_c(x)F(x)dx\geq \sum_{k=2^\nu-1}^{\infty}\Delta_1 b_k\int_{J_\nu}\frac{\sin^2 kx}{\sin x}\varphi_c(x)dx\geq$$
$$\geq \sum_{k=2^\nu-1}^{\infty}\Delta_1 b_k\frac{2^{\nu+1}}{\pi}\int_{J_\nu}\sin^2 kx\varphi_c(x)dx\geq C_8 2^\nu b_{2^\nu-1}\int_{J'_\nu}\varphi_c(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int_{J'_\nu}\varphi_c(x)F(x)dx\geq C_8 2^\nu b_{2^\nu-1}\int_{J'_\nu}\varphi_c(x)dx,\tag{29}$$

где положительная постоянная C_8 не зависит от ν, $\{b_\nu\}$ и множества J'_ν.

Пусть $I_\nu=\{x\in J'_\nu: F(x)\geq \frac{1}{2\pi}C_8 2^\nu b_{2^\nu-1}\}$. Покажем, что

$$\int_{I_\nu}\varphi_c(x)dx\geq \frac{C_8}{C_7}\frac{1}{4}\int_{J'_\nu}\varphi_c(x)dx.\tag{30}$$

Докажем методом от противного. Предположим, что левая часть неравенства (30) меньше правой. Тогда

$$\int_{J'_\nu}\varphi_c(x)F(x)dx=\int_{I_\nu}\varphi_c(x)F(x)dx+\int_{J'_\nu\setminus I_\nu}\varphi_c(x)F(x)dx\leq$$
$$\leq C_7 2^\nu b_{2^\nu-1}\int_{I_\nu}\varphi_c(x)dx+\frac{1}{2\pi}C_8 b_{2^\nu-1}\int_{J'_\nu}\varphi_c(x)dx<\frac{1}{2}C_8 2^\nu b_{2^\nu-1}\int_{J'_\nu}\varphi_c(x)dx,$$

что противоречит неравенству (29). Следовательно, верно неравенство (30). Но тогда

$$A_\nu\geq \int_{I_\nu}\varphi_c(x)|F(x)|^p dx\geq C_9 2^{\nu p}b_{2^\nu-1}^p\int_{J_\nu}\varphi_c(x)dx.$$

Таким образом,

$$\|F(x)\|^p_{((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});p;\varphi)}\geq C_{10}\sum_{\nu=1}^{\infty}2^{\nu p}b_{2^\nu-1}^p\int_{\frac{\pi}{2^{\nu+1}}}^{\frac{\pi}{2^\nu}}\varphi_c(x)dx\geq C_{11}\sum_{n=2}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}}\varphi_c(x)dx\, n^p b_{n-1}^p.$$

Нетрудно проверить, что

$$\|F(x)\|^p_{((-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2});p;\varphi)}\geq C_{12}2^p b_1^p\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\varphi_c(x)dx.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (24). Аналогичным образом проверяются остальные неравенства. Заметим только, что при доказательстве неравенства (27) используется представление (15) функции $g(x)$ из леммы 4. $\square$

Лемма 7. *Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\Delta_k a_n \geq 0$ для некоторого $k \geq 1$ и любого n. Тогда для любого $l = 0, 1, \ldots, k-1$ и любого n $\Delta_l a_n \geq 0$.*

Доказательство следует из свойств последовательности $\{a_n\}$ и определения $\Delta_k a_n$. $\square$

3. Доказательство утверждения 2 состоит в последовательном применении лемм 7, 4 и 5. Покажем это на примере п. а), случая $k \geq 2$, $s = 0$.

Применяя лемму 7 и представление функции $f(x)$ для случая $k = 1$, $s = 0$ из леммы 4, будем иметь

$$f(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} - a_n) \sin{(2n-1)\frac{x}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin{(2n-1)\frac{x}{2}}}{\sin\frac{x}{2}}, \tag{31}$$

где последовательность $\{b_n\}$ будет $(1,0)$-монотонной. Тогда, применяя неравенство (16) из леммы 5, получаем справедливость неравенства (5). Аналогично доказываются неравенства (6)–(8). $\square$

4. Доказательство утверждения 3 состоит в последовательном применении лемм 7, 4, 6, 1 и 2. Покажем это на примере п. а), случая $k \geq 3$, $s = 0$. Применяя представление функции $f(x)$ из леммы 4, случай $k = 1$, $s = 0$, имеем (31), где последовательность $\{b_n\}$ будет $(2,0)$-монотонной. Применяя неравенство (23), получаем справедливость (9). Пусть функция $\varphi(x)$ дополнительно удовлетворяет условию $A(p)$. Используя лемму 1 при $p \in [1, \infty)$ и лемму 2 при $p \in (0,1)$, имеем

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \varphi_c(x)dx\, a_0^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^p \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx \leq \\ &\leq C_1 \sum_{m=0}^{\infty} a^p_{[2^{m-1}]} 2^{(m-1)p} \int_{\frac{\pi}{2^{m+1}}}^{\frac{\pi}{2^m}} \varphi_c(x)dx \leq \\ &\leq C_2 \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m+1}}}^{\frac{\pi}{2^m}} \varphi_c(x) x^{-p} dx \Big(\sum_{n=m}^{\infty} (a_{[2^{n-1}]} - a_{2^n}) \Big)^p \leq \\ &\leq C_3 \sum_{m=0}^{\infty} (a_{[2^{m-1}]} - a_{2^m})^p \int_{\frac{\pi}{2^m}}^{\frac{\pi}{2^{m-1}}} \varphi_c(x) x^{-p} dx \leq \\ &\leq C_4 \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta_1 a_{n-1})^p n^{2p} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx \leq C_5 \|f(x)\|^p_{((-\pi,\pi);p;\varphi)}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (11) доказано. Аналогично доказываются неравенства (10), (12)–(14). $\square$

5. Доказательство утверждения 4 основано на леммах 7, 4, 3 и 6. Покажем это на примере п. а), случая $k \geq 2$, $s = 1$. Применяя лемму 7 и представление функции $f(x)$ для случая $k = 2$, $s = 1$ из леммы 4, будем иметь

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{a_0 - a_2}{2} - \frac{\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_1) + 4\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2)}{2} \frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2} + \\ + 2\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2) \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sin{(2n-1)\frac{x}{2}}}{2\sin\frac{x}{2}}, \end{aligned}$$

где $b_1 = b_2 = \Delta_1(\{\Delta\}_1 a_1) + \Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2)$, $b_n = \Delta_1(\{\Delta\}_1 a_{n-2})$, $n = 3, 4, \dots$, последовательность $\{b_n\}$ является $(1,0)$-монотонной. При $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ и условии $a_0 \geq a_2 + a_1 - a_3 + 4(a_2 - a_4)$, получаем

$$\frac{a_0 - a_2}{2} - \frac{\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_1) + 4\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2)}{2} \frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2} + \frac{\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2)}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \geq$$
$$\geq \frac{a_0 - a_2}{2} - \frac{\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_1) + 4\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2)}{4} + \frac{\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2)}{12} \geq$$
$$\geq \frac{2(a_0 - a_2) - (\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_1) + 4\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_2))}{4} \geq \frac{\Delta_1(\{\Delta\}_1 a_0)}{4}.$$

Учитывая последнюю оценку и применяя леммы 3 и 6, окончательно получим (10). Неравенство (12) в случае, когда функция $\varphi(x)$ дополнительно удовлетворяет условию $A(p)$, доказывается так же, как проводилось доказательство утверждения 3 в этом случае. Аналогично доказываются остальные неравенства пп. а) и б). $\square$

Замечание 1. Утверждения 2, 3, 4 сформулированы для $s = 0, 1, 2$. Аналогично рассуждая, можно получить подобные утверждения и для случая, когда последовательность $\{a_n\}$ будет (k,s)-монотонной при $s > 2$.

Замечание 2. Пусть $\varphi(x) \equiv 1$, а в (3) $a_0 = 0$. Тогда эта функция удовлетворяет условиям, наложенным на функцию $\varphi(x)$ в утверждении 2. Из (4) следует, что $\varphi(x) \equiv 1$ удовлетворяет условию A_2 в утверждении 4. В силу этого утверждения 2 и 4 являются обобщениями теоремы из работы [2].

Замечание 3. При более жестких ограничениях на функцию $\varphi(x)$ результаты утверждения 2 можно перенести с интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ на $(-\pi, \pi)$.

Так, например, пусть φ из Φ, четна и удовлетворяет условиям A_1, A_2, A_3; последовательность $\{a_n\}$ является (k,s)-монотонной.

Представим функции $f(x)$ и $g(x)$ в виде

$$f(x+\pi) = f(x) - 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\cos(2k-1)x,$$
$$g(x+\pi) = g(x) - 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\sin(2k-1)x.$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)|f(x)|^p dx \leq C_1\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)|f(x)|^p dx +$$
$$+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)|\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\cos(2k-1)x|^p dx\Big),$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)|g(x)|^p dx \leq C_2\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)|g(x)|^p dx +$$
$$+ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}\sin(2k-1)x\Big|^p dx\Big).$$

Пусть последовательность $\{a_n\}$ $(1,1)$-монотонна. Тогда для $p \in (0,\infty)$ из утверждений 2 и 4 имеем

$$\|g(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \leq C_3\Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_c(x)dx(\{\Delta\}_1 a_0)^p + \sum_{n=2}^{\infty}(\{\Delta\}_1 a_{n-1})^p n^p \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x)dx\Big)^{\frac{1}{p}} = C_3 \cdot B,$$
$$\|g(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \geq C_4 \cdot B, \quad \|f(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \leq C_5 \cdot B.$$

Пусть $f(x) = \frac{a_1-a_3}{4} + \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, где $\Delta_2(\{\Delta\}_2 a_n) \geq 0$, $n = 0, 1, \ldots$ Тогда, применяя утверждения 2, 4 и используя представление

$$f(x) = \frac{a_1 - a_3}{4} - \frac{a_1 - a_3}{2} \frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2} + \frac{1}{(2\cos\frac{x}{2})^2}\left(\frac{2a_0 + 3a_1 - a_3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{\Delta\}_2 a_{n-1} \cos nx\right),$$

имеем

$$\|f(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \leq C_5 \Bigg(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_c(x) dx ((\Delta_1(\{\Delta\}_2 a_0))^p + (\Delta_1(\{\Delta\}_2 a_1))^p) +$$

$$+ \sum_{n=4}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} \varphi_c(x) dx\, n^{2p} (\Delta_1(\{\Delta\}_2 a_{n-2}))^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} = C_5 \cdot B_1,$$

$$\|f(x)\|_{((-\pi,\pi);p;\varphi)} \geq C_6 \cdot B_1.$$

7. Доказательство утверждения 1 следует из (1), утверждений 2, 4 и замечания 3, если взять функцию $\varphi(x) \equiv 1$ (она удовлетворяет всем требуемым условиям). $\square$

Литература

1. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. *О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1995. – № 3. – С. 22–32.
3. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1956. – Т. 5. – С. 483–522.
4. Потапов М.К., Бериша М. *Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного* // Publ. Inst. math. – 1979. – Т. 26. – P. 215–228.
5. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1977. – 455 с.
6. Вуколова Т.М. *О рядах по синусам и косинусам с кратно монотонными коэффициентами* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1990. – № 5. – С. 38–42.

Волгоградский государственный технический университет

Поступили
первый вариант 29.05.2001
окончательный вариант 19.08.2002