ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 6 (469)

УДК 517.929

В.В. ВЛАСОВ

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В предлагаемой статье изучаются некоторые свойства системы экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, к числу которых относятся минимальность, полнота и базисность Рисса системы экспоненциальных решений в шкале пространств Соболева. Попутно мы приводим утверждения о разрешимости указанных дифференциально-разностных уравнений в пространстве Соболева, а также неулучшаемые оценки их решений.

Результаты данной статьи являются естественным развитием и обобщением результатов работ [1]–[7] и существенно опираются на них.

1. Определения и обозначения. Формулировки результатов

Рассмотрим начальную задачу для дифференциально-разностного уравнения вида

$$\sum_{j=0}^{n}\left(B_j u(t-h_j)+D_j\frac{du}{dt}(t-h_j)\right)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+=(0,+\infty), \tag{1}$$

$$u(t)=y(t),\ \ t\in[-h,0),\ \ u(+0)=y(-0)=\varphi_0. \tag{2}$$

Здесь B_j, D_j $(j=0,1,\dots,n)$ — матрицы размера $m\times m$ с постоянными комплексными элементами, числа h_j таковы, что $0=h_0<h_1<\dots<h_n=h$.

Обозначим через $\mathcal{L}(\lambda)$ матрицу-функцию

$$\mathcal{L}(\lambda)=\sum_{j=0}^{n}(B_j+\lambda D_j)\exp(-\lambda h_j),$$

через $l(\lambda)=\det\mathcal{L}(\lambda)$ — характеристический квазимногочлен [8] уравнения (1), через λ_q — нули функции $l(\lambda)$, упорядоченные в порядке возрастания модулей с учетом кратности, через Λ — множество всех нулей функции $l(\lambda)$, через ν_q — кратности λ_q.

Собственные векторы, входящие в каноническую систему [9] собственных и присоединенных (корневых) векторов матрицы-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающие числу λ_q, обозначим через $x_{q,j,0}$, их присоединенные порядка s — через $x_{q,j,s}$ (индекс j показывает, каким по счету является вектор $x_{q,j,0}$ в специально выбранном базисе подпространства решений уравнения $\mathcal{L}(\lambda_q)x=0$).

Введем систему экспоненциальных решений уравнения (1)

$$y_{q,j,s}(t)=\exp(\lambda_q t)\left(\frac{t^s}{s!}x_{q,j,0}+\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}x_{q,j,1}+\dots+x_{q,j,s}\right). \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 99-01-01079, № 00-15-9610.

Обозначим через $W^p_{2,\gamma}((a,b),\mathbb{C}^m)$ $(-\infty < a < b \le +\infty)$, $p = 1,2,\dots$, весовые пространства Соболева вектор-функций со значениями в $\mathbb{C}^m$, снабженные нормами

$$\|v\|_{W^p_{2,\gamma}(a,b)} \equiv \left(\int_a^b \exp(-2\gamma t)\left(\sum_{j=0}^{p}\|v^{(j)}(t)\|^2_{\mathbb{C}^m}\right)dt\right)^{1/2}, \quad \gamma \ge 0.$$

Здесь и в дальнейшем $W^p_{2,0} \equiv W^p_2$, $v^{(j)}(t) = \frac{d^j}{dt^j}v(t)$; $p, j = 1,2,\dots$

Определение 1. Вектор-функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $W^2_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}_+$, назовем решением задачи (1), (2), если $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условию (2).

Приведем результат о разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $W^2_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$.

Лемма 1. *Пусть* $\det D_0 \ne 0$, *а начальная функция* $y(s)$ *принадлежит пространству* $W^2_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ *и удовлетворяет условию согласования*

$$\sum_{j=0}^{n}(B_j y(-h_j) + D_j y^{(1)}(-h_j)) = 0. \tag{4}$$

Тогда найдется такое $\gamma_0 \ge 0$, *что для любого* $\gamma \ge \gamma_0$ *задача* (1), (2) *однозначно разрешима в пространстве* $W^2_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$, *при этом справедливо неравенство*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(-h,+\infty)} \le d_0\|y\|_{W^2_2(-h,0)} \tag{5}$$

с постоянной d_0, *не зависящей от функции* $y(t)$.

Обозначим через $W^2_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m)$ подпространство функций $\{y(t)\}$ пространства $W^2_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$, удовлетворяющих условиям согласования (4).

Сформулируем результаты о свойствах системы экспоненциальных решений уравнения (1).

Предложение 1. *Пусть* $\det D_0 \ne 0$. *Тогда экспоненциальные решения* (3) *уравнения* (1) *образуют минимальную систему в пространстве* $W^2_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Лемма 2. *Пусть* $\det D_0 \ne 0$, $\det D_n \ne 0$. *Тогда найдутся такие постоянные* α_1 *и* α_2, *что множество* Λ *лежит в полосе* $\{\lambda : \alpha_1 < \operatorname{Re}\lambda < \alpha_2\}$, *а система экспоненциальных решений* $\{y_{q,j,s}(t)\}$ *полна в пространстве* $W^2_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Обозначим

$$G(\Lambda,\rho) \equiv \mathbb{C} \setminus \Big(\bigcup_{\lambda_q\in\Lambda} B(\lambda_q,\rho)\Big),$$

где $B(\lambda_q,\rho)$ — круг радиуса ρ с центром в точке λ_q.

Лемма 3. *Если* $\det D_0 \ne 0$, $\det D_n \ne 0$, *то найдется система замкнутых контуров*

$$\begin{aligned}\Gamma_n = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \alpha_2,\ c_n \le \operatorname{Im}\lambda \le c_{n+1}\} \cup \\ \cup\{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \le \operatorname{Re}\lambda \le \alpha_2,\ \operatorname{Im}\lambda = c_{n+1}\} \cup \\ \cup\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = \alpha_1,\ c_n \le \operatorname{Im}\lambda \le c_{n+1}\} \cup \\ \cup\{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \le \operatorname{Re}\lambda \le \alpha_2,\ \operatorname{Im}\lambda = c_n\},\end{aligned}$$

целиком принадлежащих области $G(\Lambda,\rho)$ *при некотором достаточно малом* $\rho > 0$. *При этом выполняются следующие условия*:

(i) *последовательность вещественных чисел* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *такова, что* $0 < \delta \le c_{n+1} - c_n \le \Delta < +\infty$, *где* δ *и* Δ — *некоторые положительные постоянные*;

(ii) *количество* $N(\Gamma_n)$ *нулей функции* $l(\lambda)$ (*с учетом кратности*), *лежащих в областях, границами которых являются контуры* Γ_n, *равномерно ограничено по* n, *т. е.*

$$\max_n N(\Gamma_n) \le M.$$

Обозначим через $\mathcal{W}_n$ подпространства пространства $W^2_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m)$, являющиеся линейной оболочкой всех экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$ вида (3), отвечающих числам λ_q, лежащим в областях, границами которых являются контуры Γ_n, а через V_{λ_q} — подпространства пространства $W^2_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m)$, являющиеся линейной оболочкой всех экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$, отвечающих числу λ_q.

Приведем формулировки основных результатов работы.

Теорема 1. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$. *Тогда семейство подпространств* $\{\mathcal{W}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W^2_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Теорема 2. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$, *множество* Λ *отделимо, т. е.* $\inf\limits_{\lambda_p\neq\lambda_q}|\lambda_p-\lambda_q|>0$. *Тогда семейство подпространств* $\{V_{\lambda_q}\}_{\lambda_q\in\Lambda}$ *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W^2_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, а вектор-функция* $y(t)$ *принадлежит пространству* $W^2_{2,v}((-h,0),\mathbb{C}^m)$. *Тогда для любого решения* $u(t)\in W^2_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$, $\gamma\geq\gamma_0$, *задачи* (1), (2) *выполнена оценка*

$$\|u(t+\cdot)\|_{W_2^2(-h,0)} \equiv \left(\int_{-h}^{0}\left(\sum_{j=0}^{2}\|u^{(j)}(t+s)\|^2_{\mathbb{C}^m}\right)ds\right)^{1/2} \leq$$
$$\leq d\exp(\varkappa t)(t+1)^{N-1}\|y\|_{W_2^2(-h,0)},\quad t\geq 0, \tag{6}$$

где $\varkappa=\sup\limits_{\lambda_q\in\Lambda}\operatorname{Re}\lambda_q$, $N=\max\limits_{\lambda_q\in\Lambda}\nu_q$, *а постоянная* d *не зависит от вектор-функции* $y(t)$.

Замечание. Известно ([10], с. 26–27), что для квазимногочленов величина $N=\max\limits_{\lambda_q\in\Lambda}\nu_q$ конечна, причем в [10] приведена ее оценка.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда найдется такое* $\gamma_0\geq 0$, *что для любого* $\gamma\geq\gamma_0$, *для любого* $\varepsilon>0$ *и для произвольного решения* $u(t)\in W^2_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$ *задачи* (1), (2) *можно указать такую линейную комбинацию экспоненциальных решений вида* (3), *что*

$$\left\|u(t)-\sum_{(\lambda_q)}\sum_{j=1}^{j_q}\sum_{s=0}^{\nu_{qj}}c_{q,j,s}y_{q,j,s}(t)\right\|_{W^2_{2,\gamma}(-h,+\infty)}\leq\varepsilon.$$

2. Доказательства основных утверждений

Для удобства читателей приведем формулировки некоторых результатов из [1]–[6], а затем поясним, каким образом они применяются для доказательства сформулированных в § 1 утверждений.

Начнем с результата о существовании и единственности сильных решений задачи (1), (2).

Определение 2. Вектор-функцию $u(t)\in W^1_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$ при некотором $\gamma\geq 0$ назовем сильным решением задачи (1), (2), если $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также условию (2).

Лемма 5 ([1]). *Пусть* $\det D_0\neq 0$. *Тогда найдется такое* $\gamma_0\geq 0$, *что при всех* $\gamma\geq\gamma_0$ *задача* (1), (2) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}((-h,+\infty),\mathbb{C}^m)$ *для любой вектор-функции* $y(t)\in W^1_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ *и для ее решения справедливо неравенство*

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(-h,+\infty)}\leq d_1\|y\|_{W^1_2(-h,0)}$$

с постоянной d_1, *не зависящей от функции* $y(t)$.

Принимая во внимание лемму 5 [1], введем аналогично [11] полугруппу U_t, $t \geq 0$, ограниченных операторов, действующих в пространстве $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$ согласно правилу

$$(U_t y)(s) = u(t+s), \quad s \in (-h,0), \ \ t \geq 0,$$

где $u(\cdot)$ — сильное решение задачи (1), (2), отвечающее начальной функции $y(t)$.

Лемма 6 ([6]). *Пусть* $\det D_0 \neq 0$. *Тогда семейство операторов* U_t, $t \geq 0$, *образует* C^0-*полугруппу в пространстве* $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$ *с генератором* $\mathbb{D}$, *имеющим область определения*

$$\mathrm{Dom}(\mathbb{D}) = \left\{ \varphi \in W_2^2((-h,0),\mathbb{C}^m), \ \sum_{j=0}^{n} (B_j \varphi(-h_j) + D_j \varphi^{(1)}(-h_j)) = 0 \right\}$$

и действующим по правилу $(\mathbb{D}\varphi)(s) = \varphi^{(1)}(s)$, $s \in (-h,0)$.

В дальнейшем существенную роль играет

Лемма 7. *Пусть* $\det D_0 \neq 0$. *Тогда резольвента* $R(\lambda,\mathbb{D})$ *оператора* $\mathbb{D}$ *в точках существования представима в виде*

$$(R(\lambda,\mathbb{D})f)(t) = ((\mathbb{D}-\lambda I)^{-1} f)(t) = -\exp(\lambda t)\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\Big[\sum_{j=0}^{n} \exp(-\lambda h_j) D_j f(0) -$$

$$-\sum_{j=0}^{n} \exp(-\lambda h_j) \int_{-h_j}^{0} (D_j f^{(1)}(\tau) + B_j f(\tau)) \exp(-\lambda\tau) d\tau\Big] +$$

$$+ \exp(\lambda t) \int_0^t \exp(-\lambda\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \in [-h,0], \quad (7)$$

отображает пространство $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$ *на подпространство* $W_{2,U}^2((-h,0),\mathbb{C}^m)$, *причем для любого* $\lambda \in G(\Lambda,\rho)$ *справедливо неравенство*

$$\|R(\lambda,\mathbb{D})f\|_{W_2^2(-h,0)} \leq c\|f\|_{W_2^1(-h,0)} \quad (8)$$

с постоянной c, *не зависящей от* $f(t) \in W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Доказательство. Представление (7) устанавливается непосредственной проверкой. При этом любой вектор-функции $f(t) \in W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$ соответствует вектор-функция $u(t) = (R(\lambda,\mathbb{D})f)(t) \in W_2^2((-h,0),\mathbb{C}^m)$. В самом деле, первое слагаемое в (7), очевидно, принадлежит пространству $W_2^2((-h,0),\mathbb{C}^m)$, второе слагаемое также будет элементом $W_2^2((-h,0),\mathbb{C}^m)$, поскольку является первообразной функции, принадлежащей пространству $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Оценка (8) вытекает из теоремы о следах ([12], с. 31) и неравенства Коши–Буняковского.

Проверкой устанавливается, что вектор-функция $u(t) = (R(\lambda,\mathbb{D})f)(t)$ удовлетворяет условиям (4).

Для доказательства того, что оператор $R(\lambda,\mathbb{D})$, $\lambda \in G(\Lambda,\rho)$, является сюрьективным, подействуем на произвольную вектор-функцию $u(t) \in W_{2,U}^2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ оператором $(\mathbb{D}-\lambda I)$. Вектор-функция $f_1(t) = ((\mathbb{D}-\lambda I)u)(t)$ принадлежит пространству $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$. В свою очередь, вектор-функция $u_1(t) = (R(\lambda,\mathbb{D})f_1)(t)$ по доказанному является элементом пространства $W_{2,U}^2((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Очевидно, вектор-функция $w(t) = u_1(t) - u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$w^{(1)}(t) - \lambda w(t) = 0 \quad (9)$$

и условиям согласования (4). Из уравнения (9) находим

$$w(t) = \exp(\lambda t)c, \quad (10)$$

где произвольный вектор $c \in \mathbb{C}^m$. При подстановке решения (10) в условия (4) приходим к тому, что $\mathcal{L}(\lambda)c = 0$. Вследствие того, что $\lambda \in G(\Lambda,\rho)$, $\lambda \neq \lambda_q$, получаем $c = 0$ и, следовательно, $u(t) = u_1(t)$. $\square$

В дальнейшем будем использовать легко проверяемое

Предложение 2. *Пусть H_1 и H_2 — сепарабельные гильбертовы пространства, $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ — базис Рисса пространства H_1, $\mathcal{B}$ — ограниченный и ограниченно обратимый оператор, отображающий пространство H_1 на пространство H_2.*

Тогда система векторов $\{\mathcal{B}y_j\}_{j=1}^{\infty}$ образует базис Рисса пространства H_2.

Доказательство. Достаточно установить, что найдется ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ пространства H_2 и такой ограниченный и ограниченно обратимый оператор S, действующий в пространстве H_2, что $\mathcal{B}y_j = S\varphi_j$.

В силу того, что система векторов $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ образует базис Рисса пространства H_1, найдутся ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ пространства H_1 и такой ограниченный и ограниченно обратимый оператор T, действующий в пространстве H_1, что $y_j = Te_j$, $j = 1, 2, \dots$

Рассмотрим ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ пространства H_2 и оператор Q, действующий по правилу $Qe_j = \varphi_j$, $j = 1, 2, \dots$, при этом $\|\varphi_j\|_2 = \|Qe_j\|_2 = \|e_j\|_1 = 1$. Здесь через $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ обозначены нормы в пространствах H_1 и H_2 соответственно.

Используя равенство Парсеваля, убедимся в том, что оператор Q продолжается (с конечных линейных комбинаций базисных векторов e_j) на все пространство H_1, при этом Q отображает пространство H_1 на пространство H_2 и сохраняет нормы векторов

$$\|x\|_1 = \|Qx\|_2, \quad x \in H_1.$$

Следовательно, оператор Q имеет ограниченный обратный Q^{-1}, определенный на всем пространстве H_2, причем

$$\|Q^{-1}y\|_1 = \|y\|_2, \quad y \in H_2.$$

В соответствии с условиями предложения 2 и с построением оператор $S = \mathcal{B}TQ^{-1}$ действует ограниченным образом в пространстве H_2, при этом

$$S\varphi_j = \mathcal{B}(T(Q^{-1}\varphi_j)) = \mathcal{B}(Te_j) = \mathcal{B}y_j,$$

где $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства H_2.

В силу того, что операторы $\mathcal{B}$, T и Q имеют ограниченные обратные, оператор S также ограниченно обратим. $\square$

Следствие. Пусть H_1 и H_2 — сепарабельные гильбертовы пространства, $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ — базис Рисса из подпространств пространства H_1, $\mathcal{B}$ — ограниченный и ограниченно обратимый оператор, отображающий пространство H_1 на пространство H_2.

Тогда система подпространств $\{\mathcal{B}V_j\}_{j=1}^{\infty}$ образует базис Рисса из подпространств пространства H_2.

Поясним доказательства теорем 1–3 данной статьи.

Известна

Теорема 4 ([6], теорема 1). *Пусть $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$. Тогда система подпространств $\{\mathcal{W}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.*

Отметим, что подпространства $\mathcal{W}_n$ и V_{λ_q} являются инвариантными для оператора $R(\lambda,\mathbb{D})$ при $\lambda \in G(\Lambda,\rho)$.

Теорема 1 вытекает из следующих рассуждений. Учитывая теорему 4, рассматривая в качестве $\mathcal{B}$ оператор $R(\lambda,\mathbb{D})$, $\lambda \in G(\Lambda,\rho)$, и полагая $H_1 = W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$, $H_2 = W_{2,U}^2((-h,o),\mathbb{C}^m)$, на основании леммы 5 и следствия из предложения 2 получим, что система подпространств $\{\mathcal{W}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $W_{2,U}^2((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Для доказательства теоремы 2 используются лемма 5, следствие из предложения 2 и

Теорема 5 ([6], теорема 3). *Пусть* $\det D_0 \neq 0$, $\det D_n \neq 0$, $\inf\limits_{\lambda_p \neq \lambda_q} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$. *Тогда система подпространств* $\{V_{\lambda_q}\}_{\lambda_q \in \Lambda}$ *образует базис Рисса из подпространств пространства* $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$.

Результат о корректной разрешимости для более общих дифференциально-разностных уравнений вида (1) в гильбертовом пространстве установлен в ([13], теорема 1). Лемма 1 данной статьи является следствием указанного результата ([13], замечание 2).

Доказательство предложения 1 вытекает из предложения 1 в [6], а также из того, что ограниченный и ограниченно обратимый оператор $R(\lambda,\mathbb{D})$, $\lambda \in G(\Lambda,\rho)$, переводит минимальную систему $\{y_{q,j,s}(t)\}$ в минимальную систему $(R(\lambda,\mathbb{D})y_{q,j,s})(t)$, $\lambda \in G(\Lambda,\rho)$.

В свою очередь, в каждом из конечномерных подпространств V_{λ_q} элементы $y_{q,j,s}(t)$ и $(R(\lambda,\mathbb{D})y_{q,j,s})(t)$ связаны друг с другом невырожденным линейным преобразованием.

Первая часть леммы 2 о локализации множества Λ доказана в [1].

Утверждение о полноте системы экспоненциальных решений в пространстве $W_{2,v}^2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ вытекает из результата о полноте системы экспоненциальных решений в пространстве $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$, доказанного в ([1], теорема 2), а также из того, что ограниченный и ограниченно обратимый оператор $R(\lambda,\mathbb{D})$, $\lambda \in G(\Lambda,\rho)$, переводит подпространства V_{λ_q} на себя, и тем самым полную систему — в полную систему.

Доказательство леммы 3 приведено в ([6], лемма 4).

Доказательство теоремы 3 опирается на теорему 2, использует соответствующие соображения из теоремы 1 в [14] и проводится во многом аналогично теореме 1 в [5].

Лемма 4 является непосредственным следствием полноты системы экспоненциальных решений в пространстве $W_{2,U}^2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ (лемма 2), а также оценки (5).

3. Некоторые замечания и комментарии

Результаты о базисности Рисса системы экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений в пространстве $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$ установлены в [2]–[4], [6]. Аналогичные результаты для скалярных уравнений n-го порядка доказаны в [5]. При ином понимании решений базисность системы экспоненциальных решений в пространстве $C^m \oplus L_2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ рассматривалась в [15]. Полнота системы экспоненциальных решений уравнений, близких (1), изучалась рядом авторов (см. [16], [17], а также указанную там библиографию).

Разрешимость и асимптотическое поведение решений дифференциально-разностных уравнений вида (1) явились предметом изучения многих авторов. Ограничимся здесь указанием монографий [8], [11], [18]. При этом заметим, что в большинстве известных нам работ разрешимость изучалась не в пространствах Соболева W_2^n, а в пространствах C^n либо L_p. Разрешимость задачи вида (1), (2) и ее обобщений в пространствах Соболева установлена в [1], [6], [7].

Оценки, сходные с (6), для которых величина $\varkappa$ заменяется на $\varkappa + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), давно и хорошо известны (напр., [8], [11]). В этой связи возникла задача о получении более точных оценок решений уравнений нейтрального типа, и, в частности, вопрос о том, можно ли уточнить ранее известные оценки и положить $\varepsilon = 0$. Утвердительный ответ на этот вопрос в случае пространства $W_2^1((-h,0),\mathbb{C}^m)$ был ранее получен в [2]–[4], [6], в случае пространства $W_2^2((-h,0),\mathbb{C}^m)$ его дает теорема 3.

В заключение отметим, что спектральный анализ оператора $\mathbb{D}$ может быть связан с изучением операторов со спектральным параметром в граничных условиях ([19]).

Литература

1. Власов В.В. *Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в гильбертовом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 22–35.

2. Власов В.В. *Некоторые свойства системы элементарных решений дифференциально-разностных уравнений* // УМН. – 1996. – Т. 51. – Вып. 1. – С. 143–144.
3. Власов В.В. *О некоторых спектральных вопросах, возникающих в теории дифференциально-разностных уравнений* // УМН. – 1998. – Т. 53. – Вып. 4. – С. 217–218.
4. Власов В.В. *Некоторые свойства сильных и экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Докл. РАН. – 1999. – Т. 364. – № 5. – С. 583–585.
5. Власов В.В. *Об одном классе дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 20–29.
6. Власов В.В. *Об оценках решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 14–22.
7. Власов В.В. *О разрешимости и оценках решений функционально–дифференциальных уравнений в пространствах Соболева* // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. – 1999. – Т. 227. – С. 109–121.
8. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.
9. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.
10. Зверкин А.М. *Разложение в ряд решений линейных дифференциально-разностных уравнений.* Ч. 1. *Квазиполиномы* // Тр. семин. по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. – М., 1965. – Т. 3. – С. 3–37.
11. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
12. Лионс Ж.Л., Madженес Э. *Неоднородные граничные задачи.* – М.: Мир, 1971. – 371 с.
13. Власов В.В., Сакбаев В.Ж. *О гладкости решений некоторых функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве* // Некотор. пробл. фундаментальной и прикл. матем. – М., 1999. – С. 41–63.
14. Милославский А.И. *Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений* // Сиб. матем. журн. – 1985. – Т. 26. – С. 118–132.
15. Lunel S.V., Yakubovich D.V. *A functional model approach to linear neutral functional differential equations* // Int. J. Equat. and Oper. Theory. – 1997. – V. 27. – P. 347–378.
16. Delfour M.C., Manitius A. *A structural operator F and its role in the theory of retarded systems.* P. II // J. Math. Anal. and Appl. – 1980. – V. 74. – P. 359–381.
17. Lunel S.V. *Series expansions and small solutions for Volterra equations of convolution type* // J. Different. Equat. – 1990. – V. 85. – № 1. – P. 17–53.
18. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
19. Шкаликов А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. – 1983. – Вып. 9. – С. 190–229.

Московский физико-технический институт

Поступила
11.05.2000