ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 4 (539)

УДК 517.95

К.Б. САБИТОВ, А.Х. СУЛЕЙМАНОВА

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{yy} - b^2 u = 0, \tag{1}$$

где $0 < m < 2$, $b = \mathrm{const} \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, α, β – заданные положительные числа.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{6}$$

где f и g — заданные достаточно гладкие функции, причем $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$.

В ([1], с. 303) впервые было показано, что некоторые задачи трансзвуковой газовой динамики сводятся к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа. Некорректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева $u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot u_{yy} = 0$ была показана в [2]. После этой работы возникла проблема поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. В дальнейшем задача Дирихле для уравнений смешанного типа изучалась многими авторами [3]–[11]. Более полную библиографию работ, посвященных данной тематике, можно найти в монографии [11]. В этих работах единственность решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа доказана на основании принципа экстремума или метода интегральных тождеств, а существование — методом интегральных уравнений или разделения переменных.

Задача Трикоми и другие аналогичные задачи для уравнений смешанного типа второго рода изучены в работах [12]–[15]. В ([11], с. 33) рассмотрена задача Дирихле для уравнения

$$L(u) \equiv u_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot [|y|^m u_{yy} + a|y|^{m-1} u_y + b|y|^{m-2} u] = 0, \quad 0 < m < 2,$$

со следующими условиями сопряжения:

$$\lim_{y \to +0} y^{-p_2} u = \lim_{y \to -0} (-y)^{-p_2} u,$$

$$\lim_{y \to +0} [y^{1-p_1} u_y - p_2 y^{-p_1} u] = \lim_{y \to -0} [(-y)^{1-p_1} u_y + p_2 (-y)^{-p_1} u],$$

где

$$2p_1 = 1 - a + \sqrt{(a-1)^2 - 4b}, \quad 2p_2 = 1 - a - \sqrt{(a-1)^2 - 4b},$$

a, b — постоянные, подчиненные условиям

1) $4b < (a-1)^2 < 4b + (2-m)^2$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, конкурс “Агидель”, грант № 05-01-97913.

2) $b = 0$ при $a < 1$, $1 < a < 3 - m$ и при $a = 1$, $m < 1$,

3) $b \leq 0$ при $a \geq 3 - m$.

В данной работе при $0 < m < 1$ установлены критерий единственности и существование решения задачи (2)–(6). Если $1 \leq m < 2$, то производная $u_y(x, y)$ решения уравнения (1), вообще говоря, при $y \to 0$ обращается в бесконечность. В этом случае показано, что задача (2)–(6) переопределена, т. е. для выделения единственного решения аналога этой задачи достаточно задать лишь одно граничное условие на верхнем (5) или нижнем (6) основании прямоугольника D. Если искать решение уравнения (1) в классе функций $C(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$ и ввести для производной $u_y(x, y)$ следующие условия сопряжения:

$$\lim_{y\to+0} y^{m-1} u_y(x,y) = \lim_{y\to-0} (-y)^{m-1} u_y(x,y) \qquad \text{при } 1 < m < 2,$$
$$\lim_{y\to+0} (\ln y)^{-1} u_y(x,y) = \lim_{y\to-0} (\ln(-y))^{-1} u_y(x,y) \quad \text{при } m = 1,$$

то задача (3)–(6) в указанных выше условиях становится недоопределенной, т. е. необходимо задать еще одно граничное условие, например, $u_y(x, -\alpha) = g_1(x)$ или $u_y(x, \beta) = f_1(x)$.

2. Поиск частных решений уравнения (1). Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области D, будем искать в виде произведения $u(x, y) = X(x)Y(y)$, удовлетворяющего нулевым граничным условиям (4). Подставляя данное произведение в уравнение (1), получим

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{7}$$
$$X(0) = X(1) = 0, \tag{8}$$
$$Y''(y) - (\mu + b^2)\operatorname{sgn} y \cdot |y|^{-m} Y(y) = 0, \quad -\alpha < y < \beta, \tag{9}$$

где μ — постоянная разделения.

Как известно, решение спектральной задачи (7), (8) имеет вид

$$X_k(x) = \sin\sqrt{\mu_k}x, \quad \mu_k = (\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

В уравнении (9) (где $\mu = \mu_k$) при $y > 0$ произведем замену

$$Y(y) = W(p_k y^q)\sqrt{y}, \tag{11}$$

где $q = (2 - m)/2$, $p_k^2 = (b^2 + \mu_k)/q^2$. Тогда получим модифицированное уравнение Бесселя ([7], 7.2)

$$W''(z) + \frac{1}{z}W'(z) - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)W(z) = 0, \tag{12}$$

где $z = p_k y^q$, $\nu = 1/2q = \frac{1}{2-m}$. Общее решение уравнения (12) определяется по формуле

$$W(z) = C_1 I_{\frac{1}{2q}}(z) + C_2 K_{\frac{1}{2q}}(z), \quad z > 0, \tag{13}$$

где $I_{\frac{1}{2q}}(z)$ и $K_{\frac{1}{2q}}(z)$ — соответственно модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода, C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда на основании (11) и (13) общее решение уравнения (9) при $y > 0$ определяется по формуле

$$Y_k^+(y) = a_k\sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + b_k\sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q), \tag{14}$$

где a_k, b_k — произвольные постоянные.

Аналогично в уравнении (9) при $y < 0$ произведем замену

$$Y(y) = \sqrt{-y} Z(p_k(-y)^q) = \sqrt{-y} Z(z) \tag{15}$$

и получим обычное уравнение Бесселя

$$Z''(z) + \frac{1}{z}Z'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)Z(z) = 0,$$

где $\nu = 1/2q$. Общее решение этого уравнения определяется по формуле

$$Z(z) = C_1 J_{\frac{1}{2q}}(z) + C_2 Y_{\frac{1}{2q}}(z), \quad z > 0, \tag{16}$$

где $J_{\frac{1}{2q}}(z)$, $Y_{\frac{1}{2q}}(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно. В силу (15) и (16) общее решение уравнения (9) при $y < 0$ определяется по формуле

$$Y_k^-(y) = c_k\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + d_k\sqrt{-y}Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), \tag{17}$$

где c_k, d_k — произвольные постоянные.

Таким образом, в прямоугольной области D построены решения $Y_k(y)$, определенные по формулам (14) и (17).

В дальнейшем рассмотрим случаи, когда $0 < m < 1$ и $1 \le m < 2$.

3. Единственность решения задачи (2)–(6) при $0 < m < 1$. Подберем в (14) и (17) постоянные a_k, b_k, c_k и d_k так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$Y_k(+0) = Y_k(-0), \quad Y_k'(+0) = Y_k'(-0). \tag{18}$$

Первое из равенств (18) выполнено, если $d_k = -\pi b_k/2$, a_k и c_k любые, а второе равенство — при $d_k = -\pi b_k/2$, $c_k = \pi \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{4q})/2 - a_k$.

Тогда функция (17) примет вид

$$Y_k^-(y) = -a_k\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + \frac{\pi b_k}{2}\sqrt{-y}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), \quad y < 0, \tag{19}$$

где

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2q}}(J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)).$$

Отметим, что вторые производные функций $Y_k^+(y)$, $Y_k^-(y)$ обращаются в бесконечность при $y \to 0$, т. к. справедливы оценки

$$Y_k''^+(y) = O(y^{-m}), \quad Y_k''^-(y) = O((-y)^{-m}) \ \text{ при } \ y \to 0.$$

Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (2)–(6). Рассмотрим функции

$$u_k(y) = 2\int_0^1 u(x,y)\sin\pi kx\,dx, \quad k = 1,2,\dots \tag{20}$$

Предположим, что частная производная $u_x(x,y)$ решения $u(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y)\sin\pi kx = \lim_{x\to1-0} u_x(x,y)\sin\pi kx = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta. \tag{21}$$

На основании (20) введем функции

$$u_{k,\varepsilon}(y) = 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,y)\sin\pi kx\,dx, \tag{22}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Дифференцируя равенство (22) по y дважды при $y > 0$ и $y < 0$ и учитывая уравнение (1), получаем

$$u_{k,\varepsilon}''(y) = 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy}(x,y)\sin\pi kx\,dx = \operatorname{sgn} y\cdot|y|^{-m}2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon}(b^2u - u_{xx})\sin\pi kx\,dx =$$
$$= \operatorname{sgn} y\cdot|y|^{-m}\left[b^2u_{k,\varepsilon}(y) - 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}\sin\pi kx\,dx\right].$$

Интегрируя по частям в последнем интеграле два раза и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условий (21) и (4), получим равенство

$$u_k''(y) - \operatorname{sgn} y \cdot |y|^{-m}(b^2 + (\pi k)^2)u_k(y) = 0,$$

которое совпадает с (9) при $\mu = \mu_k$. Тогда $u_k(y) \equiv Y_k(y)$ на промежутке $[-\alpha, \beta]$, т.е. функции $u_k(y)$ определяются по формулам (14), (19).

Для нахождения постоянных a_k и b_k воспользуемся граничными условиями (5) и (6) и формулой (20):

$$u_k(\beta) = 2\int_0^1 u(x,\beta)\sin\pi kx\,dx = 2\int_0^1 f(x)\sin\pi kx\,dx = f_k, \tag{23}$$

$$u_k(-\alpha) = 2\int_0^1 u(x,-\alpha)\sin\pi kx\,dx = 2\int_0^1 g(x)\sin\pi kx\,dx = g_k. \tag{24}$$

Теперь на основании (19), (23) и (24) для нахождения a_k и b_k получим систему

$$\begin{cases} a_k I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) + b_k K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) = f_k\beta^{-\frac{1}{2}}, \\ -a_k J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) + \dfrac{1}{2}\pi b_k \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) = g_k\alpha^{-\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{25}$$

Если определитель системы (25)

$$\Delta_k(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) + \frac{\pi}{2}\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) \neq 0, \tag{26}$$

то данная система имеет единственное решение

$$a_k = -\frac{f_k\pi\sqrt{\alpha}\,\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) - 2g_k\sqrt{\beta}K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}{2\Delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, \tag{27}$$

$$b_k = \frac{f_k\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q) + g_k\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}{\Delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}. \tag{28}$$

Тогда

$$u_k(y) = \begin{cases} \dfrac{f_k\sqrt{\alpha y}\;\Delta_k(\alpha,y) + g_k\sqrt{\beta y}\;A_k(y,\beta)}{\Delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y > 0; \\ \dfrac{f_k\sqrt{-\alpha y}\;B_k(\alpha,-y) + g_k\sqrt{-\beta y}\;\Delta_k(-y,\beta)}{\Delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y < 0, \end{cases} \tag{29}$$

где

$$\Delta_k(\alpha,y) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + \frac{\pi}{2}\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q),$$

$$A_k(y,\beta) = I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) - I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q),$$

$$B_k(\alpha,-y) = \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) - \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q),$$

$$\Delta_k(-y,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) - \frac{\pi}{2}Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q).$$

Пусть теперь $f(x) \equiv 0$ и $g(x) \equiv 0$. Тогда из равенств (23), (24), (29) и (20) следует

$$\int_0^1 u(x,y)\sin\pi kx\,dx = 0.$$

Отсюда $u(x,y) \equiv 0$ для всех $x \in [0,1]$ и $y \in [-\alpha,\beta]$ в силу полноты системы синусов $\{\sin\pi kx\}$, $k = 1,2,\ldots$, в пространстве $L_2[0,1]$.

Итак, справедлива

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи (2)–(6), удовлетворяющее условиям (21), то оно единственно только тогда, когда $\Delta_k(\alpha,\beta) \neq 0$ при всех $k \in N$.*

Действительно, если выполнено условие (26) и существует решение задачи (2)–(6), удовлетворяющее условиям (21), то оно единственно.

Пусть при некоторых α, β и $k = l$ нарушено условие (26), т. е. $\Delta_l(\alpha,\beta) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(6) (где $f(x) = g(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_l(x,y) = \begin{cases} \Delta_l(\alpha,y)\sqrt{y}\sin\pi l x, & y > 0; \\ \Delta_l(-y,\beta)\sqrt{-y}\sin\pi l x, & y < 0. \end{cases}$$

Выражение $\Delta_k(\alpha,\beta)$ представим в виде

$$\Delta_k(\alpha,\beta) = I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\delta_k(\alpha,\beta),$$

где

$$\delta_k(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\frac{K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)} + \frac{\pi}{2}\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q).$$

Отметим, что существуют α и постоянная $C_0 > 0$ такие, что при всех $\beta > 0$ и больших k справедлива оценка

$$\inf_k |\sqrt{k}\delta_k(\alpha,\beta)| \geq C_0 > 0. \tag{30}$$

4. Существование решения задачи (2)–(6) при $0 < m < 1$. При выполнении условий (26) и (30) на основании частных решений (10) и (29) решение задачи (2)–(6) можно представить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y)\sin\pi k x. \tag{31}$$

Поскольку система синусов $\{\sin\pi k x\}$ образует базис Рисса, то ряд (31) при каждом y из $[-\alpha,\beta]$ сходится в $L_2[0,1]$. Теперь покажем, что при определенных условиях относительно функций $f(x)$, $g(x)$ ряд (31) и ряды, полученные из него путем почленного дифференцирования по x и y, равномерно сходятся на замкнутой области $\overline{D}$, и что возможно почленное дифференцирование два раза по x и y в замкнутой области $D_\varepsilon = \overline{D} \cap \{|y| \geq \varepsilon > 0\}$, где ε — заданное достаточно малое число.

Нетрудно заметить, что из построения решений (14) и (19) с коэффициентами (27) и (28), т. е. решения (29), следует $u_k(y) \in C^1[-\alpha,\beta] \cap C^2[-\alpha,0) \cap C^2(0,\beta]$ при любом $k \in N$.

Рассмотрим следующие отношения:

$$P_k(y) = \frac{\sqrt{y}\Delta_k(\alpha,y)}{\Delta_k(\alpha,\beta)}, \qquad Q_k(y) = \frac{\sqrt{y}A_k(y,\beta)}{\Delta_k(\alpha,\beta)},$$

$$M_k(y) = \frac{\sqrt{-y}B_k(\alpha,-y)}{\Delta_k(\alpha,\beta)}, \quad N_k(y) = \frac{\sqrt{-y}\Delta_k(-y,\beta)}{\Delta_k(\alpha,\beta)}.$$

Лемма 1. *Для достаточно больших k справедливы оценки*

$$|P_k(y)| \leq C_1, \quad |P'_k(y)| \leq C_1 k;$$

$$|Q_k(y)| \leq C_2 k^{-\lambda}, \quad |Q'_k(y)| \leq C_2 k^{1+\lambda}, \quad \lambda = 1/2q - 1/2;$$

$$|M_k(y)| \leq C_3 k^{1+\lambda} e^{-kd}, \quad |M'_k(y)| \leq C_3 k^{1+\lambda} e^{-kd};$$

$$|N_k(y)| \leq C_4, \quad |N'_k(y)| \leq C_4 k^{1+\lambda},$$

C_i — здесь и далее положительные постоянные, $d = \pi\beta^q/q$.

Доказательство. Из асимптотических поведений функций $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ в нуле и на бесконечности ([16], с. 265) имеем следующие оценки при $k\to\infty$:

$$|\sqrt{y}\Delta_k(\alpha,y)|\le C_5\frac{e^{kd}}{k},\qquad |\sqrt{y}A_k(y,\beta)|\le C_6\frac{e^{kd}}{k^{\lambda+1}},$$
$$|\sqrt{-y}B_k(\alpha,-y)|\le C_7k^\lambda,\quad |\sqrt{-y}\Delta_k(-y,\beta)|\le C_8\frac{e^{kd}}{k},$$
$$|\sqrt{y}\Delta'_k(\alpha,y)|\le C_9e^{kd},\qquad |\sqrt{y}A'_k(y,\beta)|\le C_{10}k^\lambda e^{kd},$$
$$|\sqrt{-y}B'_k(\alpha,-y)|\le C_{11}k^\lambda,\quad |\sqrt{-y}\Delta'_k(-y,\beta)|\le C_{12}k^\lambda e^{kd}.$$

На основании полученных неравенств и оценки (30) вытекает справедливость леммы 1.

Лемма 2. *Справедливы следующие оценки при достаточно больших* k:

$$|P''_k(y)|\le C_{13}k^2,\quad |Q''_k(y)|\le C_{14}k^{2-\lambda},\quad \lambda=1/2q-1/2,\quad \varepsilon\le y\le\beta;$$
$$|M''_k(y)|\le C_{15}k^{3+\lambda}e^{-kd},\quad |N''_k(y)|\le C_{16}k^2,\quad -\alpha\le y\le-\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

Доказательство. Вычислим вторые производные функций $A_k(y,\beta)$, $\Delta_k(\alpha,y)$, $B_k(\alpha,-y)$, $\Delta_k(-y,\beta)$ и оценим их при $k\to\infty$

$$|\sqrt{y}\Delta''_k(\alpha,y)|\le C_{17}ke^{kd},\qquad |\sqrt{y}A''_k(y,\beta)|\le C_{18}k^{1-\lambda}e^{kd},$$
$$|\sqrt{-y}B''_k(\alpha,-y)|\le C_{19}k^{\lambda+2},\quad |\sqrt{-y}\Delta''_k(-y,\beta)|\le C_{20}ke^{kd}.$$

Из этих оценок вытекает лемма 2.

Из теории рядов Фурье известно, что если функции $f(x),g(x)\in C^2[0,1]$ на указанном сегменте имеют кусочно-непрерывные производные третьего порядка, $f(0)=f(1)=f''(0)=f''(1)=0$, $g(0)=g(1)=g''(0)=g''(1)=0$, то стандартным образом доказывается равномерная сходимость ряда (31) в $\overline{D}$ и возможность его почленного дифференцирования по переменным x и y два раза в D_ε ([17], гл. 11, § 3).

Пусть для некоторых α и $l=n_1,n_2,\dots,n_m$, где $1\le n_1<n_2<\dots<n_m$, $n_i,i=\overline{1,m}$, m — заданные натуральные числа, $\Delta_l(\alpha,\beta)=0$. Тогда для разрешимости системы (25) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f_l\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}(p_l\alpha^q)+g_l\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_l\beta^q)=0,\quad l=n_1,n_2,\dots,n_m. \tag{32}$$

Значит, решение задачи (2)–(6) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y)=\Bigg(\sum_{k=1}^{n_1-1}+\sum_{k=n_1+1}^{n_2-1}+\dots+\sum_{k=n_m+1}^{+\infty}\Bigg)u_k(y)\sin\pi kx+\sum_l u_l(x,y), \tag{33}$$

при этом в последней сумме l принимает значения $n_1,n_2,\dots,n_m$, а

$$u_l(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{f_l\sqrt{y}I_{\frac{1}{2q}}(p_ly^q)}{\sqrt{\beta}I_{\frac{1}{2q}}(p_l\beta^q)}+\dfrac{C_l\sqrt{y}\Delta_l(\alpha,y)}{J_{\frac{1}{2q}}(p_l\alpha^q)}\right)\sin\pi lx, & y>0;\\ \left(\dfrac{g_l\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p_l(-y)^q)}{\sqrt{\alpha}J_{\frac{1}{2q}}(p_l\alpha^q)}+\dfrac{C_l\sqrt{-y}\Delta_l(-y,\beta)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_l\beta^q)}\right)\sin\pi lx, & y<0,\end{cases}$$

где C_l — произвольные постоянные.

Теорема 2. *Пусть $f(x),g(x)\in C^2[0,1]$ и на сегменте $[0,1]$ имеют кусочно-непрерывные производные третьего порядка, $f(0)=f(1)=f''(0)=f''(1)=0$, $g(0)=g(1)=g''(0)=g''(1)=0$. Тогда задача (2)–(6) однозначно разрешима, если выполнены условия (26) и (30). Это решение определяется рядом (31).*

Если $\Delta_k(\alpha,\beta)=0$ при некоторых α и $k=n_1,n_2,\dots,n_m$, то задача (2)–(6) *при условии* (30) *однозначно разрешима только тогда, когда выполнены условия* (32), *и решение определяется в виде суммы* (33).

5. Случай $1\le m<2$. Решение уравнения (1) будем искать в классе функций (2). В этом случае производные функций $Y_k^+(y)$ и $Y_k^-(y)$ обращаются в ∞ со следующими порядками:

$$Y_k'^+(y)=O(y^{1-m}),\quad Y_k'^+(-y)=O((-y)^{1-m})\ \text{ при }\ y\to 0\ \text{ и }\ 1<m<2, \tag{34}$$

$$Y_k'^+(y)=O(\ln y),\quad Y_k'^-(y)=O(\ln(-y))\ \text{ при }\ y\to 0\ \text{ и }\ m=1. \tag{35}$$

Поскольку в силу (2) должны выполняться равенства (18), то потребуем, чтобы $b_k=0$ и $d_k=0$, $a_k=-c_k$. С учетом последних равенств решения (14), (17) примут вид

$$Y_k(y)=\begin{cases} Y_k^+(y)=a_k y^{\frac12} I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q), & y>0;\\ Y_k^-(y)=-a_k(-y)^{\frac12} J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), & y<0.\end{cases} \tag{36}$$

В этом случае задача (2)–(6) переопределена. Поэтому достаточно задать лишь одно граничное условие на верхнем или нижнем основании прямоугольника D. Пусть для определенности задано граничное условие (5). Тогда на основании (20), (23) и (36) найдем

$$a_k=\frac{f_k}{\beta^{\frac12} I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}. \tag{37}$$

Подставляя (37) в (36), получим

$$u_k(y)=\begin{cases} \dfrac{f_k}{\beta^{\frac12} I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)} I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) y^{\frac12}, & y>0;\\ -\dfrac{f_k}{\beta^{\frac12} I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)} J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)(-y)^{\frac12}, & y<0.\end{cases} \tag{38}$$

Пусть теперь $f(x)\equiv 0$. Тогда из равенств (23), (38) и (20) следует

$$\int_0^1 u(x,y)\sin\pi kx\,dx=0.$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\{\sin\pi kx\}$, $k=1,2,\dots$, в пространстве $L_2[0,1]$ следует $u(x,y)\equiv 0$ для всех $x\in[0,1]$ и $y\in[-\alpha,\beta]$. Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи* (2)–(5), *то оно единственно.*

На основании частных решений (10) и (38) решение задачи (2)–(5) можно представить в виде суммы ряда Фурье (31), где $u_k(y)$ определяется по формуле (38).

Для отношений

$$D_k(y)=\sqrt{\frac{y}{\beta}}\,\frac{I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)},\quad G_k(y)=\sqrt{\frac{-y}{\beta}}\,\frac{J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}$$

имеет место

Лемма 3. *Для достаточно больших k справедливы оценки*

$$|D_k(y)|\le C_{21},\quad |D_k'(y)|\le C_{21}k;$$

$$|G_k(y)|\le C_{22}e^{-kd},\quad |G_k'(y)|\le C_{22}k^{1+\lambda},\quad \lambda=1/2q-1/2;$$

$$|D_k''(y)|\le C_{23}k^2,\quad \lambda=1/2q-1/2,\quad \varepsilon\le y\le\beta;$$

$$|G_k''(y)|\le C_{24}k^{3+\lambda}e^{-kd},\quad -\alpha\le y\le-\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

Доказательство аналогично доказательству лемм 1, 2.

Теорема 4. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то задача* (2)–(5) *однозначно разрешима. Это решение определяется рядом* (31), *где коэффициенты $u_k(y)$ находятся по формулам* (38).

Теперь решение уравнения (1) будем искать в классе функций

$$C(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-). \tag{39}$$

Поскольку производные функций $Y_k^+(y)$ и $Y_k^-(y)$ при $y \to 0$ обращаются в ∞, то в силу оценки (34), (35) введем следующие условия сопряжения:

$$\lim_{y\to+0} y^{m-1} u_y(x,y) = \lim_{y\to-0} (-y)^{m-1} u_y(x,y) \quad \text{при} \quad 1 < m < 2, \tag{40}$$

$$\lim_{y\to+0} \frac{u_y(x,y)}{\ln y} = \lim_{y\to-0} \frac{u_y(x,y)}{\ln(-y)} \quad \text{при} \quad m = 1. \tag{41}$$

Учитывая условие (40), подберем в (14), (17) постоянные a_k, b_k, c_k и d_k так, чтобы выполнялись равенства

$$Y_k(+0) = Y_k(-0), \qquad \lim_{y\to+0} y^{m-1} Y_k'^+(y) = \lim_{y\to-0} (-y)^{m-1} Y_k'^-(y).$$

Они будут выполнены, если $b_k{=}-\frac{\pi}{2}d_k$, a_k и c_k — любые постоянные. Тогда заменяя в (17) d_k через b_k, получим

$$Y_k^-(y) = c_k\sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) - \frac{\pi b_k}{2}\sqrt{-y}\, Y_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q), \quad y < 0. \tag{42}$$

Учитывая условие (41), подберем в (14), (17) постоянные a_k, b_k, c_k и d_k так, чтобы выполнялись равенства

$$Y_k(+0) = Y_k(-0), \qquad \lim_{y\to+0} \frac{Y_k'^+(y)}{\ln y} = \lim_{y\to-0} \frac{Y_k'^-(y)}{\ln(-y)}.$$

Они выполнены, если $b_k{=}-\frac{\pi}{2}d_k$, a_k и c_k — любые постоянные.

Тогда решения (14), (17) примут вид

$$Y_k(y) = \begin{cases} Y_k^+(y) = a_k\sqrt{y} I_1(p_k y^{\frac{1}{2}}) + b_k\sqrt{y} K_1(p_k y^{\frac{1}{2}}), & y > 0; \\ Y_k^-(y) = c_k\sqrt{-y} J_1(p_k(-y)^{\frac{1}{2}}) - \frac{\pi b_k}{2}\sqrt{-y}\, Y_1(p_k(-y)^{\frac{1}{2}}), & y < 0. \end{cases} \tag{43}$$

Из построенных решений (14), (42) и (43) следует, что при $1 \le m < 2$ задача (3)–(6) в классе (39)–(41) имеет бесконечное множество решений, т. е. поставленная задача недоопределена. Для выделения единственного решения такой задачи необходимо задать еще одно граничное условие, например, $u_y(x,-\alpha) = g_1(x)$ или $u_y(x,\beta) = f_1(x)$, $0 \le x \le 1$.

Литература

1. Франкль Ф.И. *Избранные труды по газовой динамике.* – М.: Наука, 1973. – 711 с.
2. Бицадзе А.Б. *Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа* // ДАН СССР. – 1953. – Т. 122. – № 2. – С. 167–170.
3. Шабат Б.В. *Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа* // ДАН СССР. – 1957. – Т. 112. – № 3. – С. 386–389.
4. Вахания Н.Н. *Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа* // Тр. АН ГрузССР. – 1963. – Т. 3. – С. 69–80.
5. Cannon J.R. *Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinius coefficient* // Ann. math. pura ed appl. – 1963. – V. 62. – P. 371–377.
6. Нахушев А.М. *Критерий единственности задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в цилиндрической области* // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6. – № 1. – С. 190–191.

7. Хачев М.М. *Задача Дирихле для уравнения Трикоми в прямоугольнике* // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 1. – С. 151–160.
8. Хачев М.М. *О задаче Дирихле для одного уравнения смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12. – № 1. – С. 137–143.
9. Солдатов А.П. *Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.* I. *Теоремы единственности* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 332. – № 6. – С. 696–698.
10. Солдатов А.П. *Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе.* II. *Теоремы существования* // Докл. РАН. – 1993. – Т. 333. – № 1. – С. 16–18.
11. Хачев М.М. *Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа.* – Нальчик. Изд. "Эльбрус", 1998. – 168 с.
12. Кароль М.В. *Краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа* // ДАН СССР. – 1955. – Т. 101. – № 5. – С. 793–796.
13. Кароль М.В. *К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа* // Матем. сб. – 1956. – Т. 38. – № 5. – С. 261–283.
14. Крикунов Ю.М. *Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа.* – Казань: Казанский университет, 1986. – 148 с.
15. Хайруллин Р.С. *К задаче Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода* // Сиб. матем. жур. – 1994. – Т. 35. – № 4. – С. 927–936.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Т. 2. – М.: Наука, 1965. – 295 с.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1966. – 724 с.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия

Стерлитамакский филиал Академии наук республики Башкортостан

Поступила
15.11.2005