ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 8 (471)

УДК 517.982

Г.Я. АРЕШКИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Введение. Через H обозначается комплексное сепарабельное гильбертово пространство с не более чем счетным ортонормированным базисом $G = \{g_k^0\}_{\mathcal{K}}$. В основе этой работы лежит

Предложение 1. *Всякое преобразование $V \in \mathcal{L}(H)$ однозначно определяет последовательность $\{y_k\}_{\mathcal{K}}$ векторов из H такую, что*

$$Vx = \sum_{\mathcal{K}} (x, y_k) g_k^0 \quad \forall x \in H; \tag{1}$$

при этом $y_k = V^* g_k^0$.

Действительно, поскольку $Vx \in H$, имеем $Vx = \sum\limits_{\mathcal{K}} (Vx, g_k^0) g_k^0 = \sum\limits_{\mathcal{K}} (x, V^* g_k^0) g_k^0$, и достаточно положить $y_k = V^* g_k^0$. Единственность разложения (1) очевидна.

В конечномерном случае разложение (1) приведено в ([1], с. 72), в счетномерном случае там же приведена специальная форма разложения (1) для компактных операторов, связанная с особым выбором базиса G ([1], с. 202). В случае, когда $V : X \to H$, где X — банахово пространство, а $H = L^2$, разложение (1) приведено в ([2]; [3], теорема 3, с. 11); случай $X = H = L^2$ отмечался в ([3], теорема 4, с. 12). Очевидно, представление (1) является обобщением теоремы Рисса–Фишера о представлении линейных функционалов на случай линейных операторов. Более того, с одной стороны, вывод представления (1) не нуждается в применении теоремы Рисса–Фишера, с другой стороны, из (1) немедленно получается новый вывод теоремы Рисса–Фишера. Действительно, если $\Phi(x)$ — линейный непрерывный на H функционал, то $Vx = \Phi(x) g_1^0$ — одномерный непрерывный на H оператор; сравнивая его разложение (1) с $Vx = \Phi(x) g_1^0$, видим, что $\Phi(x) = (x, y_1)$. Единственность y_1 следует из единственности представления (1). Но это и есть теорема Рисса–Фишера. Заметим, что приведенное доказательство можно обобщить и на несепарабельный случай.

Поскольку векторы y_k, $k \in \mathcal{K}$, однозначно определяют V, они принимаются за координаты V. Пишем $V = (y_k)_{\mathcal{K}}$. Цель работы — получить некоторые новые свойства преобразований $V \in \mathcal{L}(H)$ с помощью их координат.

I. При каких условиях произвольно заданная последовательность $\{y_k\}_{\mathcal{K}} \subset H$ определяет $V \in \mathcal{L}(H)$, $V = (y_k)_{\mathcal{K}}$? Необходимое и достаточное условие для этого в случае $H = L^2$ приведено в ([2]; [3], теорема 4). В абстрактной формулировке оно имеет вид

$$\sum_{\mathcal{K}} |(x^0, y_k)|^2 < \infty \quad \forall x^0 \in H. \tag{2}$$

Здесь и далее через $x^0, g^0, \dots$ обозначаются орты в H. Таким образом, одна только сходимость рядов (2) гарантирует, что порождаемый оператор V ограничен.

II. Теорема 1. *Для того чтобы последовательность $\{y_k\}_{\mathcal{K}}$ определяла $V \in \mathcal{L}(H)$, $V = (y_k)_{\mathcal{K}}$, необходимо, а если $\{y_k\}_{\mathcal{K}}$ ортогонально, то и достаточно, чтобы*

$$\sup_{\mathcal{K}} \|y_k\| = M < \infty. \tag{3}$$

При этом $\|V\| \le M$, *и* $\|V\| = M$ *в случае ортогональности* $\{y_k\}_{\mathcal{K}}$.

Доказательство. Поскольку $y_k = V^* g_k^0$, имеем $\|y_k\| \le \|V^*\| = \|V\|$ и, значит, $M \le \|V\|$. Если последовательность $\{y_k\}_{\mathcal{K}}$ ортогональна и справедливо (3), то

$$\sum_{\mathcal{K}} |(x^0, y_k)|^2 \le \sum_{\mathcal{K}} \|y_k\|^2 |(x^0, y_k^0)|^2 \le M^2 \sum_{\mathcal{K}} |(x^0, y_k^0)|^2 \le M^2 < \infty \ \forall x^0 \in H,$$

условие (2) выполнено и, следовательно, существует $V \in \mathcal{L}(H)$, $V = (y_k)_{\mathcal{K}}$. Кроме того, из представления (1) получаем $\|V\|^2 = \sup\limits_{x^0 \in H} \sum\limits_{\mathcal{K}} |(x^0, y_k)|^2 \le M^2$. Вместе с неравенством $M \le \|V\|$ имеем $\|V\| = M$. $\square$

III. Считаем H счетномерным.

Теорема 2 (признак равномерной сходимости). *Для того чтобы представление* (1) *преобразования* $V \in \mathcal{L}(H)$, $V = (y_k)_{\mathcal{K}}$, *сходилось к* V *равномерно, необходимо, а если* $\{y_k\}_1^\infty$ *ортогонально, то и достаточно выполнения условия*

$$\lim_k \|y_k\| = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть представление (1) сходится к V равномерно: $\|V - V_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, где $V_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} (x, y_k) g_k^0 \ \forall x \in H$. Если при этом условие (4) не выполняется, то найдется последовательность y_{k_m}, $m = 1, 2, \ldots$, такая, что $\|y_{k_m}\| \ge a > 0 \ \forall m$. Поскольку $\|V - V_n\|^2 = \sup\limits_{x^0 \in H} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |(x^0, y_k)|^2$, то для $x^0 = y_{k_m}^0$, где $k_m \ge n+1$, получили бы $\|V - V_n\|^2 \ge |(y_{k_m}^0, y_{k_m})|^2 = \|y_{k_m}\|^2 \ge a^2 \ \forall n$, что противоречит сделанному предположению.

Достаточность. Предположим, что последовательность $\{y_k\}_1^\infty$ ортогональна, и выполнено условие (4). Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует такое k_0, что $\|y_k\| < \varepsilon \ \forall k \ge k_0$. Поэтому при $n > k_0$ получим $\|V - V_n\|^2 = \sup\limits_{x^0 \in H} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|y_k\|^2 |(x^0, y_k^0)|^2 \le \varepsilon^2 \sup\limits_{x^0 \in H} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |(x^0, y_k^0)|^2 < \varepsilon^2$. Следовательно, $\|V - V_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Теорема 3 (признак компактности). *Пусть* $V \in \mathcal{L}(H)$, $V = (y_k)_1^\infty$, *последовательность* $\{y_k\}_1^\infty$ *ортогональна. Для того чтобы преобразование* V *было компактным, необходимо и достаточно выполнения условия* (4).

Доказательство. Необходимость. Пусть V компактно. Положим $y_k = \mu_k e_k^0$, $\mu_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots$ Требуется доказать, что $\lim\limits_k |\mu_k| = 0$. Обозначим через $\mathcal{K}'$ множество всех тех $k \in \mathcal{K}$, для которых $\mu_k \ne 0$. Тогда представление (1) примет вид

$$Vx = \sum_{\mathcal{K}'} \mu_k (x, e_k^0) g_k^0 \ \ \forall x \in H. \tag{5}$$

Если $\mathcal{K}'$ конечно, то $\lim\limits_{\mathcal{K}} |\mu_k| = 0$. Пусть $\mathcal{K}'$ бесконечно. Если $\lim\limits_{\mathcal{K}'} |\mu_k|$ не существует или $\lim\limits_{\mathcal{K}'} |\mu_k| = r > 0$, то существует подпоследовательность k_l, $l = 1, 2, \ldots$, такая, что $|\mu_{k_l}| \ge a > 0 \ \forall l$. Пусть

$$\overset{\sqcup}{H} = \overline{[\{e_{k_l}^0\}_{l=1}^\infty]}, \quad \overset{\sqcap}{H} = \overline{[\{g_{k_l}^0\}_{l=1}^\infty]}.$$

Тогда $\{e_{k_l}^0\}_1^\infty$ будет ортонормированным базисом в $\overset{\sqcup}{H}$, а $\{g_{k_l}^0\}_{l=1}^\infty$ — в $\overset{\sqcap}{H}$ ([4], теорема 1.5.17, с. 42). Обозначим через $\widetilde{V}$ сужение V на $\overset{\sqcup}{H}$: $\widetilde{V} h = \sum\limits_{\mathcal{K}'} \mu_k (h, e_k^0) g_k^0 \ \forall h \in \overset{\sqcup}{H}$. Поскольку $e_k^0 \perp h$ при $k \notin \mathcal{K}'$, получаем

$$\widetilde{V}h = \sum_{l=1}^{\infty} \mu_{k_l}(h, e_{k_l}^0) g_{k_l}^0 \quad \forall h \in \overset{\sqcup}{H}. \tag{6}$$

Следовательно, $\widetilde{V} : \overset{\sqcup}{H} \to \overset{\sqcap}{H}$ и, разумеется, $\widetilde{V}$ компактно на $\overset{\sqcup}{H}$. Так как последовательность $\{e_{k_l}^0\}_{l=1}^{\infty}$ ограничена, то существует подпоследовательность $\{e_{k_{l_s}}^0\}_{s=1}^{\infty}$, на которой $\widetilde{V}$ сходится, т. е. $\lim\limits_{s} \widetilde{V} e_{k_{l_s}}^0 = \varphi \in \overset{\sqcap}{H}$. Следовательно, $\{\widetilde{V} e_{k_{l_s}}^0\}_{s=1}^{\infty}$ фундаментальна. Поэтому $\forall \eta$, $0 < \eta < \sqrt{2}a$, существует s_0 такое, что $\|\widetilde{V}(e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0)\|^2 < \eta^2$ $\forall s', s'' \geq s_0$, $s' \neq s''$. Поскольку $e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0 \in \overset{\sqcup}{H}$, то согласно (6) получаем $\widetilde{V}(e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} \mu_{k_l}(e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0, e_{k_l}^0) g_{k_l}^0$. Поскольку $\{g_{k_l}^0\}_{l=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\overset{\sqcap}{H}$, то

$$\|\widetilde{V}(e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0)\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} |\mu_{k_l}|^2 |(e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0, e_{k_l}^0)|^2 \geq a^2 \sum_{l=1}^{\infty} |(e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0, e_{k_l}^0)|^2. \tag{7}$$

Однако, поскольку $e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0 \in \overset{\sqcup}{H}$, имеем $e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0 = \sum\limits_{l=1}^{\infty} (e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0, e_{k_l}^0) e_{k_l}^0$ и, значит, $\|e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0\|^2 = \sum\limits_{l=1}^{\infty} |(e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0, e_{k_l}^0)|^2$. Отсюда и из неравенства (7) следует

$$\|\widetilde{V}(e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0)\|^2 \geq a^2 \|e_{k_{l_{s'}}}^0 - e_{k_{l_{s''}}}^0\|^2 = 2a^2 > \eta^2.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\lim\limits_{k} |\mu_k| = 0$.

Достаточность. Согласно теореме 2 $\|V - V_n\| \underset{n}{\to} 0$. Поскольку $V_n x = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k(x, e_k^0) g_k^0$, заключаем, что $R(V_n)$ конечномерно, а следовательно, V_n компактно ([4], лемма 7.2.3, с. 200). Поэтому в силу известного признака компактности ([4], теорема 7.2.2, с. 199) преобразование V компактно. $\square$

Из теорем 2 и 3 получаем

Следствие 1. Для того чтобы разложение $V = (y_k)_{\mathcal{K}}$, где $\{y_k\}_{\mathcal{K}}$ — ортогональная последовательность, сходилось к V равномерно, необходимо и достаточно, чтобы V было компактно.

IV. 1. Определим класс $\mathcal{L}_{\perp}(H)$, состоящий из всех тех операторов $V \in \mathcal{L}(H)$, которые в ортонормированном базисе $G = \{g_k^0\}_{\mathcal{K}}$ (своем для каждого V) имеют ортогональные координаты. Согласно предложению 1 в этом случае справедливо представление (1), в котором последовательность $y_k = V^* g_k^0$, $k \in \mathcal{K}$, ортогональна. Полагая $y_k = \overline{\mu}_k e_k^0$, где $\mu_k \in \mathbb{C}$, а $\{e_k^0\}_{\mathcal{K}}$ — ортогональная система векторов из H, и выделяя из $\mathcal{K}$ множество I всех тех индексов k, для которых $\mu_k \neq 0$, перепишем (1) в виде

$$Vx = \sum_{I} \mu_i(x, e_i^0) g_i^0 \quad \forall x \in H. \tag{8}$$

Поскольку координатами V являются векторы $y_i = \overline{\mu}_i e_i^0$, $i \in I$, и $y_j = 0$, $j \in \mathcal{K} \setminus I$, то согласно теореме 1 заключаем

$$\sup_{I} |\mu_i| = M < \infty, \quad \|V\| = M. \tag{9}$$

Разложение (8) понимается в смысле сильной сходимости. Согласно следствию 1 сходимость в (8) в счетномерном случае будет равномерной, только когда оператор V вполне непрерывен.

2. Введенный класс $\mathcal{L}_\perp(H)$ весьма обширен. Согласно ([1], теорема 1, с. 202) класс $\mathcal{L}_\perp(H)$ содержит все вполне непрерывные преобразования пространства H. При этом сходимость разложения (8) будет не только сильной, как это утверждается в [1], но и равномерной.

Далее, определим, что преобразование $V \in \mathcal{L}(H)$ имеет чисто точечный спектр ([5], с. 389), если существует полная в H система собственных векторов этого преобразования. Обозначим ее $\widehat{G} = \{\widehat{g}_k^0\}_\mathcal{K}$. Всякое такое преобразование в случае ортогональности системы $\widehat{G}$ принадлежит $\mathcal{L}_\perp(H)$. Действительно, обозначая через μ_k собственные значения, соответствующие векторам $\widehat{g}_k^0$, $k \in \mathcal{K}$, и выделяя все те из них μ_i, $i \in I$, которые отличны от нуля, можем представить V в виде

$$Vx = \sum_I \mu_i (x, g_i^0) g_i^0 \quad \forall x \in H. \tag{10}$$

Представление (10) является частным случаем представления (8), получающимся при $e_i = g_i$, $i \in I$.

Однако класс $\mathcal{L}_\perp(H)$ значительно шире этих двух классов. Действительно, согласно теореме 1 любые ортонормированные системы векторов $\{e_i^0\}_I$ и $\{g_i^0\}_I$ и любые комплексные числа μ_i, $i \in I$, удовлетворяющие условию (9), определяют $V \in \mathcal{L}_\perp(H)$ в соответствии с формулой (8), и любое $V \in \mathcal{L}_\perp(H)$ может быть получено таким путем.

3. Введем следующие подпространства:

$$\overline{[\{e_i^0\}_I]} = \breve{H}, \quad \overline{[\{g_i^0\}_I]} = \widehat{H}.$$

Тогда $\{e_i^0\}_I$ будет ортонормированным базисом в $\breve{H}$, а $\{g_i^0\}_I$ — в $\widehat{H}$. Обозначим сужение V на $\breve{H}$ через $\widetilde{V}$. Из (8) непосредственно следует

$$Vx = \widetilde{V}h = \sum_I \mu_i (h, e_i^0) g_i^0 \quad \forall x \in H, \quad x = h + \widehat{h}, \quad h \in \breve{H}, \quad \widehat{h} \in \breve{H}^\perp. \tag{11}$$

Лемма 1. $N(V) = \breve{H}^\perp$.

Доказательство. Если $x \in \breve{H}^\perp$, то в равенстве $x = h + \widehat{h}$ имеем $h = 0$. Но тогда из (8) при $x = \widehat{h}$ получаем $V\widehat{h} = 0$. Таким образом, $\forall \widehat{h} \in \breve{H}^\perp$ имеем $V\widehat{h} = 0$, т. е. $\breve{H}^\perp \subset N(V)$. Если $x = h \in \breve{H}$ и $Vx = 0$, то из (8) следует, что $(h, e_i^0) = 0$ $\forall i \in I$, и т. к. $\{e_i^0\}_I$ — базис в $\breve{H}$, то $h = 0$. Следовательно, если $h \in \breve{H}$ и $h \neq 0$, то $Vh \neq 0$. Таким образом, $N(V) = \breve{H}^\perp$. □

Следствие 2. $VH = \widetilde{V}\breve{H} \subset \widehat{H}$.

Теорема 4. *Справедливы равенства*

$$V^* x = \sum_I \overline{\mu}_i (x, g_i^0) e_i^0 = \sum_I \overline{\mu}_i (q, g_i^0) e_i^0, \quad \|V^*\| = \|V\| \quad \forall x \in H, \tag{12}$$

где $x = q + \widehat{q}$, $q \in \widehat{H}$, $\widehat{q} \in \widehat{H}^\perp$.

Доказательство. Поскольку $V \in \mathcal{L}(H)$, то согласно (5) V имеет в базисе G координаты $y_k = \overline{\mu}_k e_k^0$, $k \in I$ (и $y_k = 0$ при $k \in \mathcal{K} \setminus I$). Так как базис G ортогональный, то в силу теоремы 1 $\sup\limits_{\mathcal{K}} \|y_k\| = \sup\limits_I |\mu_i| = M < \infty$ и $\|V\| = M$. Дополним векторы e_i^0, $i \in I$, векторами $\widehat{e}_r^0$, $r \in R$, до полного ортонормированного базиса $\widehat{G}$ в H и положим $\widehat{g}_r = 0$, $r \in R$. Заметим, что векторы g_i^0, $i \in I$, и $\widehat{g}_r$, $r \in R$, ортогональны. Положим $\widehat{y}_i = \mu_i g_i$, $i \in I$, $\widehat{y}_r = 0$, $r \in R$. Тогда $\sup\limits_{i \in I,\ r \in R} \{\|\widehat{y}_i\|, \|\widehat{y}_r\|\} = \sup\limits_I |\mu_i| = M < \infty$. Следовательно, согласно теореме 1 векторы $\widehat{y}_i$, $i \in I$, и

$\widehat{y}_r$, $r \in R$, определяют в базисе $\widehat{G}$ некоторый непрерывный оператор, скажем, W, с координатами $\widehat{y}_i$, $i \in I$, и $\widehat{y}_r$, $r \in R$, причем $\|W\| = M$. Учитывая, что $\widehat{y}_r = 0$, $r \in R$, запишем согласно предложению 1

$$Wx = \sum_I \overline{\mu}_i (x, g_i^0) e_i^0 \quad \forall x \in H. \tag{13}$$

Применяя к оператору W лемму 1 и следствие 2, получим 1) $N(W) = \widehat{H}^{\perp}$; 2) $WH = \widetilde{W}\widehat{H} \subset \breve{H}$; 3) $\forall x \in H$, $x = q + \widehat{q}$, $q \in \widehat{H}$, $\widehat{q} \in \widehat{H}^{\perp}$:

$$Wx = Wq = \sum_I \overline{\mu}_i (q, g_i^0) e_i^0. \tag{14}$$

Теперь, каковы бы ни были x' и x'' из H, непосредственной проверкой легко убеждаемся, что $(Vx', x'') = (x', Wx'')$, откуда следует $W = V^*$, причем $\|V^*\| = M$. Подставляя V^* в (13) и (14) вместо W, получим (12). $\square$

Следствие 3. Если $e_i^0 = g_i^0$ и $\mu_i = \overline{\mu}_i$, $i \in I$, то $V = V^*$.

Лемма 2. $\overline{R(V)} = \widehat{H}$, $\overline{R(V^*)} = \breve{H}$.

Доказательство. Действительно, т. к. $N(V^*) = \widehat{H}^{\perp}$ и согласно ([4], теорема 6.5.10, с. 183) $\overline{R(V)} = N(V^*)^{\perp}$, то $\overline{R(V)} = \widehat{H}$. Аналогично $\overline{R(V^*)} = \breve{H}$.

4. Перейдем к вопросу об обратимости операторов $\widetilde{V}$ и $\widetilde{V}^*$.

Теорема 5. *Оператор $\widetilde{V}$ обратим на $R(\widetilde{V})$, и справедливо равенство*

$$\widetilde{V}^{-1} q = \sum_I \mu_i^{-1} (q, q_i^0) e_i^0 \quad \forall q \in R(\widetilde{V}). \tag{15}$$

Оператор $\widetilde{V}^{-1}$ непрерывно продолжаем на $\widehat{H}$ тогда и только тогда, когда

$$\inf |\mu_i| = m > 0. \tag{16}$$

В этом случае $\widetilde{V}^{-1}$ непрерывен на $R(\widetilde{V}) = \widehat{H}$.

Доказательство. При доказательстве леммы 1 было установлено, что из равенства $\widetilde{V}h = 0$, где $h \in \breve{H}$, следует $h = 0$. Следовательно, отображение $\widetilde{V} : \breve{H} \to R(\widetilde{V})$ взаимно однозначно, т. е. $\exists \widetilde{V}^{-1} : R(\widetilde{V}) \to \breve{H}$. Ряд (15) сходится, т. к.

$$q = \widetilde{V}h \Rightarrow \sum_I (q, g_i^0) g_i^0 = \sum_I \mu_i (h, e_i^0) g_i^0 \Rightarrow \mu_i^{-1}(q, g_i^0) = (h, e_i^0) \ \forall i \in I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sum_I |\mu_i^{-1}|^2 |(q, g_i^0)|^2 = \sum_I |(h, e_i^0)|^2 = \|h\|^2 < \infty.$$

В справедливости равенства (15) убеждаемся непосредственной проверкой равенств $\widetilde{V}\widetilde{V}^{-1} = I_{R(\widetilde{V})}$, $\widetilde{V}^{-1}V = I_{\breve{H}}$.

Дополним $\{e_i^0\}_I$ векторами $\{\widehat{e}_j^0\}_{\mathcal{J}}$ до ортонормированного базиса $\widehat{G}$ в H, положим $\widehat{g}_j = 0$, $j \in \mathcal{J}$. Согласно теореме 1, если выполнено условие (16) и только тогда, векторы $y_i = \overline{\mu_i^{-1}} g_i^0$, $\widehat{y}_j = 0$, $i \in I$, $j \in \mathcal{J}$, однозначно определяют в H непрерывный оператор, обозначим его $U : Ux = \sum_I \mu_i^{-1} (x, g_i^0) e_i^0$ $\forall x \in H$. Поскольку $Uq \in \breve{H}$ $\forall q \in \widehat{H}$, то $\widetilde{V}\breve{H} = R(\widetilde{V}) = \widehat{H}$. Обозначим сужение U на $\widehat{H}$ через $\widetilde{U}$. Тогда легко проверить, что $\widetilde{U}(\widetilde{V}h) = h$ $\forall h \in \breve{H}$, $\widetilde{V}(\widetilde{U}q) = q$ $\forall q \in \widehat{H}$. Следовательно, оператор $\widetilde{U} = \widetilde{V}^{-1}$ определен на $\widehat{H}$ и непрерывен. $\square$

V. Применим полученные результаты к решению функциональных уравнений первого и второго рода.

1. Сначала рассмотрим уравнение

$$Vx = q, \tag{17}$$

где $q \in H$, $V \in \mathcal{L}_\perp(H)$ и, значит, V представлено разложением (8). Из теоремы 5 получаем

Следствие 4. Уравнение (17) разрешимо тогда и только тогда, когда $q \in R(\widetilde{V})$. Решение единственно тогда и только тогда, когда $\breve{H}^\perp = 0$. Общий вид решения уравнения (17) при $q \in R(\widetilde{V})$ дается равенством

$$x = \widehat{h} + \sum_I \mu_i^{-1}(q, g_i^0)e_i^0, \tag{18}$$

где $\widehat{h}$ — любой элемент из $\breve{H}^\perp$. Решение (18) непрерывно зависит от правой части q уравнения (17) тогда и только тогда, когда выполняется условие (16). При этом $R(\widetilde{V}) = \widehat{H}$.

Доказательство. Поскольку $H = \widehat{H} \oplus \widehat{H}^\perp$, то любое $q \in H$ представимо в виде $q = q' + \widehat{q}'$, где $q' \in \widehat{H}$, $\widehat{q}' \in \widehat{H}^\perp$. Поскольку $VH = \widetilde{V}\breve{H} = R(\widetilde{V}) \subset \widehat{H}$, если $\widehat{q}' \neq 0$, то уравнение $Vx = q' + \widehat{q}'$, очевидно, неразрешимо. Следовательно, для разрешимости этого уравнения необходимо, чтобы $\widehat{q}' = 0$ и $q = q'$. Далее, если $q' \in \breve{H} \setminus R(\widetilde{V})$, то уравнение (17), очевидно, снова неразрешимо. Поэтому лишь при $q \in R(\widetilde{V})$ уравнение (17) разрешимо. В этом случае справедливость формулы (18) устанавливается непосредственной проверкой. А именно,

$$Vx = V\left(\widehat{h} + \sum_I \mu_i^{-1}(q, g_i^0)e_i^0\right) = \widetilde{V}\left(\sum_I \mu_i^{-1}(q, g_i^0)e_i^0\right) = \widetilde{V}(\widetilde{V}^{-1}q) = q.$$

Заключение о непрерывной зависимости следует непосредственно из теоремы 5. □

2. Теперь можно установить необходимое и достаточное условие, налагаемое только на $q \in H$, при котором вектор q оказывается принадлежащим $R(\widetilde{V})$. Тогда по вектору q автоматически запишется общее решение уравнения (17).

Теорема 6. *Для того чтобы уравнение* (17) *было разрешимо при заданном $q \in H$, необходимо, чтобы q разлагалось в ряд по векторам $\{g_i^0\}_I$*

$$q = \sum_I (q, g_i^0)g_i^0, \tag{19}$$

и достаточно, чтобы при этом сходился ряд

$$\sum_I |\mu_i^{-1}|^2 |(q, g_i^0)|^2. \tag{20}$$

Тогда решение уравнения (17) *записывается в виде* (18).

Доказательство. Если уравнение (17) имеет решение (а им будет вектор (18)), то из (18) следует, что $Vx = q \in R(\widetilde{V})$. Отсюда согласно лемме 2 немедленно следует (19). Положим $q_i = (q, g_i^0)$, $i \in I$, и пусть $q \in \widehat{H}$ таково, что $\sum\limits_I |\mu_i^{-1}|^2 |q_i|^2 < \infty$. Тогда последовательность чисел $\{\mu_i^{-1}q_i\}$ однозначно определит в $\breve{H}$ вектор $h = \sum\limits_I \mu_i^{-1} q_i e_i^0$. Проверка того, что $x = \widehat{h} + h$ есть общее решение уравнения (17), производится легко. □

Замечание 1. Теорема 6 имеет значение для получения решений уравнения $Vx = q$, где $V \in \mathcal{L}_\perp(H)$. Предположим, что известно разложение V по формуле (8), и, в частности, известны числа μ_i, $i \in I$. Тогда

1) если для некоторого $k \in \mathcal{K} \setminus I$ (см. п. IV.1) $q_k = (q, g_k^0) \neq 0$, то $q \notin \widehat{H}$, и поэтому уравнение (17) неразрешимо;

2) если $\forall k \in \mathcal{K} \setminus I$ $q_k = 0$, то $q \in \widehat{H}$; разлагаем q по базису $\{g_i^0\}_I$: $q = \sum\limits_I (q, g_i^0) g_i^0$;

3) проверяем сходимость числового ряда (20); если ряд сходится, то решение (18) записывается автоматически; если же ряд (20) расходится, то решения не существует.

Заметим, что согласно ([1], теорема 1, с. 202) в случае, когда V компактно, разложение (8), а значит, и числа μ_i известны. Заметим далее, что вместо п. 1) можно прямо перейти к п. 2) с проверкой того, что $\|q\|^2 = \sum\limits_I |q_i|^2$. Если это равенство не выполняется, то решение уравнения (17) не существует. Поскольку в случае компактного V имеем $\mu_k > 0$ и $\mu_k \to 0$, то условие (16) не выполняется, поэтому решение (17) разрывно.

Если (см. п. IV.1) $y_k \neq 0$ $\forall k \in \mathcal{K}$, то $I = \mathcal{K}$, $G = \{g_i^0\}_I$, $\widehat{H}^\perp = 0$ и $q \in \widehat{H} = H$. Остается разложить q по базису G: $q = \sum\limits_I (q, g_i^0) g_i^0$ и затем исследовать сходимость ряда (20).

Заметим, наконец, что, используя оценку остатка ряда (20), можно находить приближенное решение $x \cong \widehat{h} + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i^{-1}(q, g_i^0) e_i^0$.

3. Перейдем теперь к вопросу о разрешимости уравнений второго рода

$$\lambda x - Vx = q, \tag{21}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, $x, q \in H$, $V \in \mathcal{L}_\perp(H)$. Пусть $x = h + \widehat{h}$, где $h \in \breve{H}$, $\widehat{h} \in \breve{H}^\perp$. Рассмотрим оператор $\lambda I - V = W$. Имеем $W \in \mathcal{L}(H)$. Обозначим сужение W на $\breve{H}$ через $\widetilde{W}$. Таким образом, $\widetilde{W} : \breve{H} \to R(\widetilde{W})$. $\widetilde{W}$ непрерывен на $\breve{H}$.

Лемма 3. *Уравнение* (21) *эквивалентно уравнению*

$$\lambda \widehat{h} + \widetilde{W} h = q. \tag{22}$$

Доказательство. Подставляя $x = h + \widehat{h}$ в (21), имеем $\lambda \widehat{h} + \lambda h - Vx = q$. Учитывая $V\widehat{h} = 0$, получаем $Vx = Vh$. Так как $\lambda h - Vh = Wh$, то имеем $\lambda \widehat{h} + Wh = q$. Однако $Wh = \widetilde{W} h$ $\forall h \in \breve{H}$, и поэтому $\lambda \widehat{h} + \widetilde{W} h = q$. Таким образом, из (21) следует (22). Рассуждая в обратном порядке, из (22) получим (21). $\square$

Лемма 4. *Если λ не является собственным значением оператора V, то оператор $\widetilde{W}$ обратим на $R(\widetilde{W})$.*

Доказательство. Пусть $h \in \breve{H}$ и $\widetilde{W} h = 0$. Тогда $\lambda h - Vh = 0$. Поскольку по условию λ не является собственным значением оператора V, то отсюда следует $h = 0$.

Таким образом, оператор $\widetilde{W}$ отображает $\breve{H}$ на $R(\widetilde{W})$ взаимно однозначно, и $\widetilde{W}^{-1} : R(\widetilde{W}) \to \breve{H}$ существует. $\square$

Лемма 5. *Для того чтобы вектор $q \in H$ принадлежал $R(\widetilde{W})$, необходимо, чтобы он был представим в виде*

$$q = \sum_I \gamma_i (\lambda I - V) e_i^0 = \sum_I \gamma_i \theta_i, \tag{23}$$

где $\gamma_i \in \mathbb{C}$, $\theta_i = \lambda e_i^0 - \mu_i g_i^0$, $i \in I$.

Доказательство. Из $q \in R(\widetilde{W})$ следует, что существует вектор $h \in \breve{H}$ такой, что $\widetilde{W}h = q$. Но $\widetilde{W}h = (\widetilde{\lambda I - V})h = (\lambda I - V)h = \lambda \sum_I (h, e_i^0)e_i^0 - \sum_I \mu_i(h, e_i^0)g_i^0 = \sum_I (h, e_i^0)[\lambda e_i^0 - \mu_i g_i^0]$. Заметим теперь, что из (11) следует $\mu_i g_i^0 = Ve_i^0$, $i \in I$. Поэтому $q = \widetilde{W}h = \sum_I (h, e_i^0)[\lambda I - V]e_i^0$. Полагая здесь $(h, e_i^0) = \gamma_i$, получим (23). □

Лемма 6. *Пусть q представлен формулой (23). Для того чтобы $q \in R(\widetilde{W})$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sum_I |\gamma_i|^2 < \infty. \tag{24}$$

Доказательство. Из доказательства леммы 5 видно, что если $q \in R(\widetilde{W})$, то $\gamma_i = (h, e_i^0)$ для некоторого $h \in \breve{H}$, а поэтому $\sum_I |\gamma_i|^2 < \infty$. Наоборот, если справедливо (24), то числа γ_i однозначно определяют в $\breve{H}$ вектор $h = \sum_I \gamma_i e_i^0$. Тогда, учитывая формулу (11), получим

$$\widetilde{W}h = (\lambda I - V)h = \lambda \sum_I \gamma_i e_i^0 - \sum_I \mu_i \gamma_i g_i^0 = \sum_I \gamma_i[\lambda e_i^0 - \mu_i g_i^0] = \sum_I \gamma_i(\lambda I - V)e_i^0 = q.$$

Следовательно, $q \in R(\widetilde{W})$ и $\widetilde{W}^{-1}q = \sum_I \gamma_i e_i^0$. □

Следствие 5. Уравнение $\widetilde{W}h = q$, $h \in \breve{H}$, разрешимо и его решение единственно, только если вектор q представим в виде (23) с условием (24). Решение имеет вид

$$h = \sum_I \gamma_i e_i^0 = \widetilde{W}^{-1}q.$$

Теорема 7. *Уравнение (21) разрешимо и имеет единственное решение тогда и только тогда, когда его правая часть q представима в виде*

$$q = q' + \widehat{q}, \tag{25}$$

где

$$q' = \sum_I \gamma_i(\lambda I - V)e_i^0, \quad \sum_I |\gamma_i|^2 < \infty, \tag{26}$$

$$\widehat{q} \in \breve{H}^{\perp} \setminus R(\widetilde{W}). \tag{27}$$

При соблюдении условий (26) и (27) решение уравнения (21) имеет вид

$$x = \widehat{q}/\lambda + \sum_I \gamma_i e_i^0. \tag{28}$$

Доказательство. Если $\widehat{q} \in R(\widetilde{W})$ и поскольку из (26) следует $q' \in R(\widetilde{W})$, то $q' + \widehat{q} \in R(\widetilde{W})$, т. е. $q \in R(\widetilde{W})$, и поэтому представлять q в виде (25) нет необходимости. Следовательно, $\widehat{q} \notin R(\widetilde{W})$. Если уравнение (22) разрешимо, то существует вектор $x = h + \widehat{h}$, $h \in \breve{H}$, $\widehat{h} \in \breve{H}^{\perp}$, удовлетворяющий уравнению (22). Полагая в (22) $\lambda\widehat{h} = \widehat{q}$, $\widetilde{W}h = q'$, получим разложение $q = q' + \widehat{q}$, причем будут выполняться и соотношения (26) и (27). Необходимость представления (25) с условиями (26) и (27) доказана.

Докажем теперь, что наличие разложения (25) с условиями (26) и (27) достаточно для существования решения уравнения (22). Действительно, в этом случае уравнение (22) принимает вид

$$\lambda\widehat{h} + \widetilde{W}h = \widehat{q} + q',$$

откуда находим $\widehat{h} = \widehat{q}/\lambda$, $h = \widetilde{W}^{-1}q'$, а само решение уравнения (22) имеет вид (28). □

Литература

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
2. Арешкин Г.Я. *Теорема о представлении линейных непрерывных операторов и некоторые ее следствия* // Теоретич. и методологич. пробл. подготовки учителя в системе непрер. образования. Межвуз. сб. научн. тр., посвящ. 200-летию РГПУ им. А.И.Герцена. – Мурманск, 1997. – С. 133–139.
3. Арешкин Г.Я. *Применение интегралов от скалярной функции по векторной мере к некоторым вопросам функционального анализа и теории линейных интегральных уравнений* // Исследов. по линейным операторам и теории функций. 26. Зап. научн. семин. ПОМИ. – С.-Петербург, 1998. – Т. 255. – С. 5–16.
4. Хатсон В., Пим Дж. *Приложения функционального анализа и теории операторов.* – М.: Мир, 1983. – 432 с.
5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* – М.: Ин. лит., 1954. – 499 с.

Военный инженерно-технический
университет (*Санкт-Петербург*)

Поступила
09.06.1998