ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 512.541

С.Я. ГРИНШПОН

О РАВЕНСТВЕ НУЛЮ ГРУППЫ ГОМОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

В работе решается вопрос об условиях, при которых группа гомоморфизмов абелевых групп $\mathrm{Hom}(A,C)$ равна нулю, если C — периодическая группа или однородная сепарабельная группа без кручения (в частности, группа без кручения ранга 1). Для периодической группы C ответ на поставленный вопрос полностью получен. В случае групп без кручения C получен полный ответ для групп A, у которых тип каждого ненулевого элемента их факторгрупп по периодической части не меньше типа группы C (в частности, для однородных абелевых групп без кручения A, тип которых совпадает с типом группы C). Из полученных в данной работе результатов следует описание коузких абелевых групп, полученное в [1].

Рассмотрим вначале общую ситуацию. Пусть C — произвольная абелева группа. Обозначим через $\mathfrak{A}_C$ класс всех абелевых групп A со свойством $\mathrm{Hom}(A,C)=0$.

Предложение 1. *Класс* $\mathfrak{A}_C$ *замкнут относительно*: а) *факторгрупп*; б) *расширений*; в) *прямых сумм*; г) *прямых произведений с неизмеримым множеством компонент, если* C — *узкая группа*; д) *прямых пределов*; е) *тензорных произведений на произвольную абелеву группу.*

Доказательство. а) Пусть $A\in\mathfrak{A}_C$ и B — подгруппа группы A. Имеем $\mathrm{Hom}(A,C)=0$. Если предположить, что существует $\varphi\in\mathrm{Hom}(A/B,C)$, $\varphi\neq 0$, то, рассматривая гомоморфизм $\varphi\eta$, где η — канонический эпиморфизм A на A/B, получим, что $\varphi\eta\in\mathrm{Hom}(A,C)$ и $\varphi\eta\neq 0$. Противоречие.

б) Предположим, что в точной последовательности $0\to B\to A\to D\to 0$ группы B и D взяты из класса $\mathfrak{A}_C$. Пусть $f:A\to C$ — гомоморфизм. Отождествим группу D с группой A/B. Построим гомоморфизм $\psi: A/B\to C$ следующим образом: $\psi(a+B)=f(a)$. Условие $\mathrm{Hom}(B,C)=0$ гарантирует корректность построенного отображения. Имеем $\varphi\eta=f$ (η — канонический эпиморфизм A на A/B). Так как $A/B\in\mathfrak{A}_C$, то $\psi=0$ и поэтому $f=0$. Значит, $A\in\mathfrak{A}_C$.

в) Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство групп из класса $\mathfrak{A}_C$. Тогда $\mathrm{Hom}\,(\bigoplus\limits_{i\in I}A_i,C)\cong\prod\limits_{i\in I}\mathrm{Hom}(A_i,C)=0$. Следовательно, $\bigoplus\limits_{i\in I}A_i\in\mathfrak{A}_C$.

г) Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство групп из класса $\mathfrak{A}_C$, где I — множество неизмеримой мощности, а C — узкая группа. Тогда, учитывая следствие 7 из [2], имеем $\mathrm{Hom}\left(\prod\limits_{i\in I}A_i,C\right)\cong\bigoplus\limits_{i\in I}\mathrm{Hom}(A_i,C)=0$. Значит, $\prod\limits_{i\in I}A_i\in\mathfrak{A}_C$.

д) Пусть $\{A_i\ (i\in I);\ \pi_i^j\}$ — прямой спектр абелевых групп и гомоморфизмов ([3], с. 68), где $A_i\in\mathfrak{A}_C$. Если B — подгруппа, порожденная всеми элементами вида $a_i-\pi_i^j a_i$ $(i\leq j)$, то $\varinjlim_I A_i=\bigoplus\limits_{i\in I}A_i/B$ и в силу в) и а) $\varinjlim_I A_i\in\mathfrak{A}_C$.

е) Пусть $A\in\mathfrak{A}_C$ и B — произвольная абелева группа. Имеем $\mathrm{Hom}(B\otimes A,C)\cong\mathrm{Hom}(B,\mathrm{Hom}(A,C))=\mathrm{Hom}(B,0)=0$. $\square$

Следствие 1. Пусть A и C — абелевы группы, B — подгруппа группы A такая, что $\mathrm{Hom}(B,C)=0$. $\mathrm{Hom}(A,C)=0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}(A/B,C)=0$.

Доказательство. Необходимость вытекает из п. а) предложения 1, а достаточность — из п. б) этого предложения. $\square$

Если A — абелева группа, то через $T(A)$ обозначим периодическую часть группы A, а через $T_p(A)$ (p — простое число) p-компоненту этой периодической части. Если A — периодическая группа, то ее p-компоненту будем обозначать также через A_p. Пусть $P(A)$ — множество всех тех простых чисел, для которых $T_p(A) \neq 0$. Рассмотрим группы гомоморфизмов абелевых групп в периодические группы.

Теорема 1. *Пусть A и C — абелевы группы, причем C — периодическая группа.* $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) *если C — нередуцированная группа, то A — периодическая группа*;
2) *для всякого $p \in P(A) \cap P(C)$ $T_p(A)$ — делимая, C_p — редуцированная группы*;
3) *для всякого $p \in P(C)$ факторгруппа $A/T(A)$ p-делима.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$, где C — периодическая группа. Предположим, что C — нередуцированная группа, и пусть группа A содержит элементы бесконечного порядка. Если V — делимая часть группы C и $a \in A$, $o(a) = \infty$, то $\mathrm{Hom}(\langle a \rangle, V) \neq 0$. В силу инъективности группы V любой гомоморфизм подгруппы $\langle a \rangle$ группы A в группу V можно продолжить до гомоморфизма A в V. Следовательно, $\mathrm{Hom}(A, V) \neq 0$, и поэтому $\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0$. Противоречие. Значит, условие 1) выполняется.

Пусть $q \in P(A) \cap P(C)$. Если C_q — нередуцированная группа, то, рассматривая в группе A_q произвольную ненулевую циклическую подгруппу $\langle a \rangle$, получим $\mathrm{Hom}(\langle a \rangle, V_q) \neq 0$, где V_q — делимая часть группы C_q. Отсюда имеем $\mathrm{Hom}(A, V_q) \neq 0$, и, значит, $\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0$. Итак, C_q — редуцированная группа. Предположим, что $T_q(A)$ имеет ненулевую редуцированную часть. Имеем $T_q(A) = R_1 \oplus V_1$, где R_1, V_1 — редуцированная и делимая части группы $T_q(A)$ соответственно. Группы R_1 и C_q обладают циклическими прямыми слагаемыми B_1 и B_2 соответственно, порядки которых суть степени простого числа q. Так как B_1 — сервантная циклическая q-подгруппа группы A, то B_1 — прямое слагаемое группы A. Имеем

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(A, C_q) = \\ &\quad = \mathrm{Hom}(B_1 \oplus B_1',\ B_2 \oplus B_2') \cong \mathrm{Hom}(B_1, B_2) \oplus \mathrm{Hom}(B_1, B_2') \oplus \mathrm{Hom}(B_1', B_2) \oplus \mathrm{Hom}(B_1', B_2') \neq 0\end{aligned}$$

т. к. $\mathrm{Hom}(B_1, B_2) \neq 0$. Отсюда $\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0$. Значит, $T_q(A)$ — делимая группа, и условие 2) выполняется.

Итак, мы показали, что если $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$, то условия 1) и 2) выполняются. При этом имеем $\mathrm{Hom}(T(A), C) = 0$. Действительно, $\mathrm{Hom}(T(A), C) \cong \prod\limits_p \mathrm{Hom}(T_p(A), C_p) = 0$, т. к. группа гомоморфизмов делимой группы $T_p(A)$ в редуцированную группу C_p равна нулю. Тогда, применяя следствие 1, получим $\mathrm{Hom}(A/T(A), C) = 0$. Предположим, что для некоторого $q \in P(C)$ факторгруппа $A/T(A)$ не является q-делимой. Пусть $\overline{a} \in A/T(A)$, $\overline{a}$ имеет нулевую q-высоту, и пусть c — произвольный ненулевой элемент группы C_q. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : \langle \overline{a} \rangle_* \to \langle c \rangle$ такой, что $\varphi \overline{a} = c$. Так как $\langle c \rangle$ — алгебраически компактная группа, то φ продолжается до гомоморфизма $\overline{\varphi} : A/T(A) \to \langle c \rangle$. $\overline{\varphi} \neq 0$, и поэтому $\mathrm{Hom}(A/T(A), \langle c \rangle) \neq 0$, а значит, и $\mathrm{Hom}(A/T(A), C) \neq 0$. Итак, условие 3) выполняется.

Достаточность. Пусть выполняются условия 1)–3). В силу условия 2) $\mathrm{Hom}(T(A), C) = 0$. Покажем, что и $\mathrm{Hom}(A/T(A), C) = 0$; тогда по следствию 1 $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$. Если C — нередуцированная группа, то по условию 1) A — периодическая группа, и поэтому $\mathrm{Hom}(A/T(A), C) = \mathrm{Hom}(0, C) = 0$. Если же C — редуцированная группа, то каждая ее подгруппа C_p ($p \in P(C)$) является редуцированной. Предположим, что $\mathrm{Hom}(A/T(A), C_p) \neq 0$, и пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}(A/T(A), C_p)$, $\varphi \neq 0$. В силу условия 3) $A/T(A)$ — p-делимая группа, тогда и $\mathrm{Im}\,\varphi$

— p-делимая группа, и, значит, в C_p есть ненулевые делимые подгруппы, чего быть не может. Итак $\mathrm{Hom}(A/T(A), C_p) = 0$ для каждого $p \in P(C)$. Значит, $\mathrm{Hom}\Big(A/T(A), \prod\limits_{p\in P(C)} C_p\Big) \cong \prod\limits_{p\in P(C)} \mathrm{Hom}(A/T(A), C_p) = 0$. Так как $\bigoplus\limits_{p\in P(C)} C_p$ — подгруппа группы $\prod\limits_{p\in P(C)} C_p$, то $\mathrm{Hom}(A/T(A), C) = \mathrm{Hom}(A/T(A), \bigoplus\limits_{p\in P(C)} C_p) = 0$. $\square$

Следствие 2. Пусть A — абелева группа без кручения, C — периодическая абелева группа. $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ тогда и только тогда, когда C — редуцированная группа и для всякого $p \in P(C)$ группа A p-делима.

Следствие 3. Пусть A — смешанная абелева группа, C — периодическая абелева группа. $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) C — редуцированная группа;
2) для всякого $p \in P(A) \cap P(C)$ $T_p(A)$ — делимая группа;
3) для всякого $p \in P(C)$ факторгруппа $A/T(A)$ p-делима.

Учитывая изоморфизм $\mathrm{Hom}(A, C) \cong \prod\limits_p \mathrm{Hom}(A_p, T_p(C)$, где A — периодическая, а C — произвольная абелевы группы, получаем

Следствие 4. Пусть A и C — абелевы группы, причем A — периодическая группа. $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ тогда и только тогда, когда для всякого $p \in P(A) \cap P(C)$ A_p — делимая группа, $T_p(C)$ — редуцированная группа.

Рассмотрим теперь группы гомоморфизмов абелевых групп в абелевы группы без кручения ранга 1.

Теорема 2. *Пусть C — абелева группа без кручения ранга 1 типа t, A — абелева группа, тип каждого ненулевого элемента факторгруппы $A/T(A)$ которой не меньше t. $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ тогда и только тогда, когда группа $A/T(A)$ не содержит прямого слагаемого, изоморфного C.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ и предположим противное, что группа $A/T(A)$ содержит прямое слагаемое $A_1/T(A)$, изоморфное группе C. Имеем $A/T(A) = A_1/T(A) \oplus A_2/T(A)$. Тогда

$$\mathrm{Hom}(A/T(A), C) \cong \mathrm{Hom}(A_1/T(A) \oplus A_2/T(A), C) \cong \mathrm{Hom}(A_1/T(A), C) \oplus \mathrm{Hom}(A_2/T(A), C) \neq 0.$$

В силу следствия 1 $\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0$. Противоречие.

Достаточность. Обозначим группу $A/T(A)$ через $\overline{A}$. Пусть группа $\overline{A}$ не содержит прямого слагаемого, изоморфного C, и предположим, что $\mathrm{Hom}(A, C) \neq 0$. В силу следствия 1 $\mathrm{Hom}(\overline{A}, C) \neq 0$. Тогда существует $f \in \mathrm{Hom}(\overline{A}, C)$, $f \neq 0$. Найдется такой элемент $\overline{a} \in \overline{A}$, что $f(\overline{a}) \neq 0$. Так как при гомоморфизме типы элементов не уменьшаются, то, учитывая условие на типы элементов группы $\overline{A}$, получаем $t(\overline{a}) = t(f(\overline{a})) = t$. Характеристика элемента $f(\overline{a})$ в группе $\mathrm{Im}\, f$ не меньше характеристики элемента $\overline{a}$ и поэтому $t(\mathrm{Im}\, f) = t$. Итак, $\mathrm{Im}\, f \cong C$. Имеем $\overline{A}\,\mathrm{Ker}\, f \cong C$. $\mathrm{Ker}\, f$ — сервантная подгруппа группы $\overline{A}$, и все элементы множества $\overline{A} \setminus \mathrm{Ker}\, f$ имеют тип t. Тогда ([4], предложение 86.5, с. 136) $\mathrm{Ker}\, f$ — прямое слагаемое группы $\overline{A}$, дополнительное же прямое слагаемое изоморфно C. Получили противоречие. $\square$

Заметим, что в работе [1] абелевы группы A со свойством $\mathrm{Hom}(A, Z) = 0$ названы коузкими.

Напомним, что абелева группа A называется p-локальной (p — простое число), если $nA = A$ для всех целых чисел, взаимно простых с p.

Следствие 5. Пусть A — p-локальная абелева группа, C — редуцированная абелева группа без кручения ранга 1. $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$ тогда и только тогда, когда группа $A/T(A)$ не содержит прямого слагаемого, изоморфного C.

Доказательство. Тип группы $A/T(A)$ не меньше типа любой редуцированной абелевой группы без кручения ранга 1. Остается применить теорему 2. $\square$

Следствие 6. Пусть A — абелева группа, решетка вполне характеристических подгрупп которой является цепью, C — редуцированная абелева группа без кручения ранга 1. $\mathrm{Hom}(A,C)=0$ тогда и только тогда, когда группа $A/T(A)$ не содержит прямого слагаемого, изоморфного C.

Доказательство. Всякая абелева группа, решетка вполне характеристических подгрупп которой образует цепь, является p-локальной группой [5]. Теперь применим следствие 5. $\square$

Пусть t — некоторый тип (класс эквивалентных характеристик). Обозначим через $\mathfrak{M}_t$ класс всех таких абелевых групп, которые не содержат прямого слагаемого без кручения ранга 1 типа t, а через $\mathfrak{N}_t$ — класс всех таких абелевых групп без кручения, у которых тип каждого ненулевого элемента не меньше t.

Теорема 3. *Пусть A, A', A_i $(i\in I)$ — абелевы группы такие, что $A/T(A)$, $A'/T(A')$, $A_i/T(A_i)$ $(i\in I)$ принадлежат классу $\mathfrak{M}_t\cap\mathfrak{N}_t$.*

1. *Следующие группы принадлежат классу $\mathfrak{M}_t$:* а) *любая факторгруппа группы A (в частности, сама группа A)*; б) *расширение группы A с помощью A'*; в) *прямая сумма групп A_i $(i\in I)$*; г) *прямое произведение групп A_i $(i\in I)$, если множество I неизмеримо*; д) *предел прямого спектра, построенного на группах A_i $(i\in I)$*; е) *тензорное произведение $D\otimes A$, где D — произвольная абелева группа.*

2. *Каждая из групп, получающаяся в пп.* а)–е)*, обладает тем свойством, что ее группа гомоморфизмов в любую однородную сепарабельную группу без кручения типа t (в частности, в абелеву группу без кручения ранга 1 типа t) равна нулю.*

Доказательство. Пусть C — группа без кручения ранга 1 типа t. Так как $A/T(A)$, $A'/T(A')$, $A_i/T(A_i)$ $(i\in I)$ — группы из класса $\mathfrak{M}_t\cap\mathfrak{N}_t$, то по теореме 2 каждая из групп гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(A,C)$, $\mathrm{Hom}(A',C)$, $\mathrm{Hom}(A_i,C)$ равна нулю. Тогда по предложению 1 группа гомоморфизмов каждой из групп, получающихся в пп. а)–е), в группу C равна нулю. Значит, каждая из групп, получающаяся в пп. а)–е), принадлежит классу $\mathfrak{M}_t$.

Пусть теперь B — одна из групп, получающаяся в пп. а)–е), а C' — однородная сепарабельная группа типа t. Группа C' изоморфна некоторой сервантной подгруппе группы $\left(\prod\limits_i R_i\right)(t)$, где группы R_i имеют ранг 1 и тип t ([4], предложение 87.4, с. 142). Рассмотрим $\mathrm{Hom}\left(B,\prod\limits_i R_i\right)$. Имеем $\mathrm{Hom}\left(B,\prod\limits_i R_i\right)\cong\prod\limits_i \mathrm{Hom}(B,R_i)=0$, т. к. для всякой группы R_i $\mathrm{Hom}(B,R_i)=0$. Значит, $\mathrm{Hom}(B,C')=0$. $\square$

Обозначим через $\mathfrak{L}_t$ класс всех однородных абелевых групп без кручения типа t, которые не содержат прямых слагаемых ранга 1. Класс $\mathfrak{L}_t$ является подклассом класса $\mathfrak{M}_t\cap\mathfrak{N}_t$.

Из теоремы 3 вытекает такое следствие.

Следствие 7. 1. Следующие теоретико-групповые конструкции групп из $\mathfrak{L}_t$ не содержат прямых слагаемых ранга 1 типа t: а) факторгруппы; б) расширения; в) прямые суммы; г) прямые произведения с неизмеримым множеством компонент; д) прямые пределы; е) тензорные произведения на произвольную абелеву группу.

2. Каждая из групп, получающаяся в пп. а)–е) (в том числе и любая группа из $\mathfrak{L}_t$), обладает тем свойством, что ее группа гомоморфизмов в любую однородную сепарабельную группу типа t (в частности, в абелеву группу без кручения ранга 1 типа t) равна нулю.

Следствие 8. Пусть A и C — однородные абелевы группы без кручения одного и того же типа, причем C — сепарабельная группа. $\mathrm{Hom}(A,C)=0$ тогда и только тогда, когда A не содержит прямого слагаемого ранга 1.

Следствие 9. Группа гомоморфизмов любой алгебраически компактной группы также, как и любой копериодической группы, в любую редуцированную однородную сепарабельную группу без кручения (в частности, в любую редуцированную группу без кручения ранга 1) равна нулю.

Доказательство. Пусть A — алгебраически компактная группа. Не умаляя общности, можно считать, что A — редуцированная группа. Имеем $A = \prod\limits_p A_p$, где каждая группа A_p полна в своей p-адической топологии (произведение берется по различным простым числам p). $A_p/T(A_p)$ — алгебраически компактная группа ([3], с. 90), и т.к. не существует счетных редуцированных алгебраически компактных групп без кручения ([3], следствие 40.4, с. 199), то $A_p/T(A_p)$ не содержит редуцированного прямого слагаемого без кручения ранга 1. Тогда в силу теоремы 3 для любой редуцированной однородной сепарабельной группы без кручения C $\mathrm{Hom}(A, C) = 0$.

Каждая копериодическая группа есть эпиморфный образ алгебраически компактной группы, и поэтому, применяя предложение 1 (п. а)), получим, что группа гомоморфизмов любой копериодической группы в любую редуцированную однородную сепарабельную группу без кручения равна нулю. □

Литература

1. Dimitrič R. *On coslender groups* // Glasnik Matem. – 1986. – V. 21. – № 2. – P. 327–329.
2. Рычков С.В. *О прямых произведениях абелевых групп* // Матем. сб. – 1982. – Т. 117. – № 2. – С. 266–278.
3. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 1. – М.: Мир, 1974. – 335 с.
4. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы.* Т. 2. – М.: Мир, 1977. – 416 с.
5. Hausen J. *Abelian groups which are uniserial as modules over their endomorphism rings* // Lect. Notes Math. – 1983. – V. 1006. – P. 204-208.

Томский государственный университет

Поступили
первый вариант 02.02.1996
окончательный вариант 26.03.1997