ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 517.984

Н.Б. УСКОВА

К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ПИРСИ И ШИЛДСА

В работе К. Пирси и А. Шилдса [1] показано, что если A и B — комплексные матрицы размера $n \times n$, $A = A^*$ и выполнено условие

$$\|AB - BA\| \leq \frac{2\varepsilon^2}{n-1}, \tag{1}$$

то существуют матрицы A' и B' того же размера и такие, что $A'B' = B'A'$ и $\|A - A'\| \leq \varepsilon$, $\|B - B'\| \leq \varepsilon$. Аналогичной задаче для ограниченных операторов посвящена большая литература (см., напр., ссылки в работах [1], [4]). В статьях Г.В. Розенблюма [2], [3], С.Ю. Садова [4] ставился вопрос о том, насколько данный псевдодифференциальный оператор близок к нормальному, и о построении коммутирующих аппроксимант.

В данной заметке рассматриваются пары линейных операторов $A, B : D(A) \subset H \to H$, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$, причем оператор A является самосопряженным оператором со счетным спектром $\sigma(A)$, состоящим из собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и допускающим представление в виде

$$\sigma(A) = \bigcup_{j=1}^{N} \sigma_j, \tag{2}$$

где σ_j, $j = 1, 2, \dots, N \leq \infty$ — ограниченные взаимно непересекающиеся компакты.

Всюду считается выполненным

Предположение 1. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует разбиение* $\mathfrak{A}$ *спектра* $\sigma(A)$ *оператора* A *вида* (2) *такое, что выполняются следующие два условия:* 1) $\sup\limits_{1 \leq j \leq N} \operatorname{diam} \sigma_j \leq 2\varepsilon$, 2) $d(\varepsilon, \mathfrak{A}) = \inf\limits_{i \neq j} \operatorname{dist}(\sigma_i, \sigma_j) > 0$.

Разбиение $\mathfrak{A}$ из предположения 1 назовем допустимым. Отметим, что условиям предположения 1 удовлетворяют компактные операторы и операторы с дискретным спектром, для которых существует такое натуральное число n_0, что на каждом промежутке $[n, n+1]$ имеется не более n_0 собственных значений.

Введем в рассмотрение функцию $d(\varepsilon) = d(\varepsilon, A)$, $\varepsilon > 0$, полагая $d(\varepsilon) = \sup\limits_{\mathfrak{A}} d(\varepsilon, \mathfrak{A})$ по всевозможным допустимым разбиениям $\mathfrak{A}$.

Кроме предположения 1 считается также выполненным

Предположение 2. *Оператор* $B : D(A) \subset H \to H$ *подчинен оператору* A (*т. е. существует постоянная* $c > 0$ *такая, что* $\|Bx\| \leq c(\|x\| + \|Ax\|)$ $\forall x \in D(A)$) *и коммутатор* $C = [A, B] = AB - BA : D(A^2) \subset H \to H$ *допускает ограниченное расширение до некоторого оператора из банаховой алгебры* $\operatorname{End} H$ *ограниченных линейных операторов, действующих в* H.

Пространство операторов, подчиненных оператору A, обозначим $\mathcal{L}_A(H)$.

При некоторых дополнительных условиях на норму коммутатора $C = [A, B]$ в данной заметке получен аналог результата Пирси и Шилдса, более того, в полученном нами условии типа условия (1) используется введенная функция d. Если размерность $n = \dim H$ конечна, то число n не участвует в оценке нормы коммутатора (проблема ставилась в работе [1]). Основной результат (теорема) доказан с использованием операторного аналога оценки Бора-Фавара для интеграла от почти периодической функции (см. [5], [6]).

Теорема. *Пусть операторы $A, B : D(A) \subset H \to H$ удовлетворяют предположениям 1 и 2 и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство*

$$\|AB - BA\| \leq \frac{2d(\varepsilon)}{\pi}\varepsilon. \tag{3}$$

Тогда существует самосопряженный оператор $A' : D(A) \subset H \to H$ и линейный оператор $B' : D(A) \subset H \to H$, для которых операторы $A - A'$, $B - B'$ допускают ограниченное расширение до операторов из $\operatorname{End} H$ и

$$\|A - A'\| \leq \varepsilon, \quad \|B - B'\| \leq \varepsilon.$$

Доказательство. По числу $\delta > 0$ выберем такое допустимое разбиение $\mathfrak{A}$ вида (2), чтобы $d(\varepsilon, \mathfrak{A}) \geq d(\varepsilon) - \delta$. Символом P_k обозначим проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_k, т.е. $P_k = P(\sigma_k, A)$. Введем в рассмотрение трансформатор $\mathfrak{J} : \mathcal{L}_A(H) \to \mathcal{L}_A(H)$, определенный формулой $\mathfrak{J}X = \sum\limits_{j \geq 1} P_j X P_j$, $X \in \mathcal{L}_A(H)$ (оператор блочной диагонализации) и трансформатор $\Gamma : \operatorname{End} H \to \operatorname{End} H$, где ΓY определяется для любого $Y \in \operatorname{End} H$ как решение операторного уравнения $A\Gamma Y - \Gamma Y A = Y - \mathfrak{J}Y$, удовлетворяющее условию $\mathfrak{J}(\Gamma Y) = 0$ (см. [5], [6]). В условиях счетности множества $\sigma(A)$ собственные нормированные векторы $e_1, e_2, \ldots$ оператора A ($Ae_k = \lambda_k e_k$, $k \geq 1$) образуют ортонормированый базис, и далее будем предполагать, что матрицы операторов заданы в этом базисе. Легко проверить, что оператор ΓY, $Y \in \operatorname{End} H$, имеет матрицу вида

$$((\Gamma Y_{ij})) = \begin{cases} \dfrac{(Y - \mathfrak{J}Y)_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} & \text{при } (Y - \mathfrak{J}Y)_{ij} \neq 0; \\ 0 & \text{при } (Y - \mathfrak{J}Y)_{ij} = 0. \end{cases}$$

Известна оценка на норму трансформатора Γ ([6], теорема 1.3)

$$\|\Gamma\| \leq \frac{\pi}{2d(\varepsilon, \mathfrak{A})}. \tag{4}$$

Перейдем теперь непосредственно к построению коммутирующих аппроксимант, причем алгоритм построения заимствован нами из [1]. Оператор A' будет являться функцией от оператора A и на образе $\operatorname{Im} P_j$ проектора P_j задается формулой $A' = \frac{a_j + b_j}{2} P_j$ $\forall j$, где $[a_j, b_j]$ — наименьший отрезок, содержащий множество σ_j. Ясно, что $\|A - A'\| \leq \varepsilon$.

Пусть $B' = \mathfrak{J}B$. Легко проверить равенство $A'B' = B'A'$. Докажем, что $B - B' \in \operatorname{End} H$ и $\|B - B'\| \leq \varepsilon$. Рассмотрим оператор $C = [A, B] \in \operatorname{End} H$. Заметим, что матрица (C_{ij}) оператора C состоит из элементов $c_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) b_{ij}$. Следовательно,

$$((B - \mathfrak{J}B)_{ij}) = \begin{cases} \dfrac{c_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j} & \text{при } (B - \mathfrak{J}B)_{ij} \neq 0; \\ 0 & \text{при } (B - \mathfrak{J}B)_{ij} = 0, \end{cases}$$

или, другими словами, $B - \mathfrak{J}B = \Gamma C$. Таким образом, используя оценки (3), (4), имеем

$$\|B - B'\| \leq \|\Gamma\| \, \|C\| \leq \frac{\pi}{2d(\varepsilon, \mathfrak{A})} \frac{2d(\varepsilon)}{\pi} \varepsilon \leq \varepsilon \frac{d(\varepsilon)}{d(\varepsilon) - \delta}.$$

Так как последняя оценка верна при любом δ, то окончательно получаем неравенство

$$\|B - B'\| \leq \varepsilon. \quad \square$$

Следствие. Пусть $\widetilde{P}_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n$, $H_n = \operatorname{Im}\widetilde{P}_n$ и $d(\varepsilon, \mathfrak{A}) = \inf \operatorname*{dist}_{i,j \le n,\, i \ne j}(\sigma_i, \sigma_j)$, $d(\varepsilon) = \sup\limits_{\mathfrak{A}} d(\varepsilon, \mathfrak{A})$. Если для оператора B выполняется неравенство

$$\|(AB - BA) \mid H_n\| \le \frac{2d(\varepsilon)}{\pi}\varepsilon,$$

то существуют такие операторы A' и B', что $(A'B') \mid H_n = (B'A') \mid H_n$ и имеют место оценки $\|(A - A') \mid H_n\| \le \varepsilon$, $\|(B - B') \mid H_n\| \le \varepsilon$. (Символом $Y \mid H_n$ обозначено сужение оператора $Y : D(Y) \subset H \to H$ на подпространство $H_n = \operatorname{Im}\widetilde{P}_n$.)

Литература

1. Pearcy C., Shields A. *Almost commuting matrices* // J. Funct. Anal. – 1979. – V. 33. – P. 332–338.
2. Розенблюм Г.В. *Угловая асимптотика спектра операторов, близких к нормальным* // Пробл. матем. анализа. – 1986. – вып. 10. – С. 180–195.
3. Розенблюм Г.В. *Об операторе, почти коммутирующем со своим сопряженным* // Теория операторов и теория функций. – 1983. – вып. 1. – С. 111–115.
4. Садов С.Ю. *Об операторах, почти коммутирующих в смысле порядка* // Функц. анализ и его прилож. – 1992. – Т. 24. – № 3. – С. 83–85.
5. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58. – № 4. – С. 3–32.
6. Баскаков А.Г. *Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов* // Сиб. матем. журн. – 1983. – Т. 24. – № 1. – С. 21–39.

Воронежский государственный
технический университет

Поступила
31.01.1995