Известия вузов. Математика
2014, № 5, с. 59–63

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное М.М. Арслановым

А.Н. АБЫЗОВ, Х.Н.Н. ЧАН

CS-РИККАРТОВЫ МОДУЛИ

Аннотация. Вводится понятие CS-риккартова модуля, которое является модульным аналогом понятия ACS-кольца. Описываются кольца, над которыми каждый конечнопорожденный проективный модуль является CS-риккартовым модулем. Из полученных результатов в качестве следствий выводятся известные факты, связанные с полунаследственными кольцами и риккартовыми модулями.

Ключевые слова: CS-риккартовы модули, риккартовы модули, ACS-кольца, полунаследственные кольца.

УДК: 512.55

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули — унитарными.

Модуль M называется *риккартовым модулем*, если для каждого $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ имеет место равенство $\mathrm{Ker}\,\varphi = eM$, где $e^2 = e \in \mathrm{End}_R(M)$. Кольцо R называется правым *риккартовым кольцом* (или *правым р. р.-кольцом*), если каждый главный правый идеал кольца R является проективным правым R-модулем. Модуль M называется *d-риккартовым модулем*, если для каждого $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$ имеет место равенство $\mathrm{Im}\,\varphi = eM$, где $e^2 = e \in \mathrm{End}_R(M)$.

Модуль M называется *CS-модулем*, если каждый его подмодуль является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M. Говорят, что подмодуль N модуля M *лежит над прямым слагаемым модуля* M, если существуют такие подмодули N_1 и N_2, что $N_1 \oplus N_2 = M$, $N_1 \subset N$ и $N_2 \cap N$ мал в N_2. Модуль M называется *d-CS-модулем* (или *модулем со свойством подъема*), если каждый его подмодуль лежит над прямым слагаемым модуля M.

Модуль M называется *CS-риккартовым модулем*, если $\mathrm{Ker}\,\varphi$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M для каждого $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$. Кольцо R называется правым *CS-риккартовым кольцом* (или *правым ACS-кольцом*), если правый аннулятор всякого элемента из R является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля R_R. Модуль M называется *d-CS-риккартовым модулем*, если $\mathrm{Im}\,\varphi$ лежит над прямым слагаемым модуля M для каждого $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$.

Риккартовы модули изучались в работах [1]–[3]. В [4]–[6] рассматривались ACS-кольца. Кольца, над которыми каждый конечно порожденный проективный правый модуль является риккартовым, были описаны в [2].

Тот факт, что подмодуль N модуля M является существенным (соответственно косущественным) в M будем обозначать через $N \trianglelefteq M$ (соответственно $N \ll M$).

Лемма 1. (1) *Прямое слагаемое CS-риккартова модуля является CS-риккартовым модулем.*

Поступила 25.10.2013

(2) *Прямое слагаемое d-CS-риккартова модуля является d-CS-риккартовым модулем.*

Лемма 2. *Пусть A — однородный наследственный правый R-модуль, B — однородный сингулярный артиновый правый модуль R-модуль. Тогда*

(1) *модуль $A \oplus B$ является CS-риккартовым,*
(2) *если модуль B не является A-инъективным, то модуль $A \oplus B$ не является CS-модулем.*

Если R — дедекиндова область и P — ненулевой простой идеал кольца R, то из предыдущей леммы следует, что R-модуль $R \oplus (R/P^n)$, где n — натуральное число, является CS-риккартовым модулем, но не является CS-модулем.

Модуль M называется *$\mathcal{K}$-несингулярным*, если для каждого существенного подмодуля N модуля M и каждого гомоморфизма $f \in \mathrm{End}_R(M)$ из равенства $f(N) = 0$ следует $f = 0$. Непосредственно проверяется

Лемма 3. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

(1) *M является $\mathcal{K}$-несингулярным CS-риккартовым модулем*;
(2) *M — риккартов модуль.*

Модуль M_R называется *SIP-модулем* (*соответственно SSP-модулем*), если пересечение (соответственно сумма) любых двух прямых слагаемых модуля M_R снова является прямым слагаемым модуля M_R. Модуль M назовем *SIP-CS-модулем,* если пересечение любых двух прямых слагаемых модуля M_R является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M. Модуль M назовем *SSP-d-CS-модулем,* если сумма любых двух прямых слагаемых модуля M_R лежит над прямым слагаемым модуля M.

Теорема 1. *Пусть M является CS-риккартовым модулем и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Тогда*

(1) *если $A = eM$, $B = fM$, где $e^2 = e$ и $f^2 = f$, то существует гомоморфизм $g^2 = g \in S$ такой, что $eM \cap fM \trianglelefteq gM$*;
(2) *если $A \trianglelefteq eM$, $B \trianglelefteq fM$, где $e^2 = e$ и $f^2 = f$, то существует гомоморфизм $g^2 = g \in S$ такой, что $A \cap B \trianglelefteq gM$*;
(3) *для произвольных гомоморфизмов $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in S$ существует идемпотент $e \in S$ такой, что $\cap_{1 \le i \le n} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \trianglelefteq eM$*;
(4) *модуль M является SIP-CS-модулем.*

В работе [5] для случая, когда R является C_3-кольцом, было доказано

Следствие 1. Если R — ACS-кольцо, то для произвольных элементов $r_1, \dots, r_n \in R$ существует идемпотент $e \in R$ такой, что $r(r_1, \dots, r_n) \trianglelefteq eR$.

Теорема 2. *Пусть M является d-CS-риккартовым модулем и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Тогда*

(1) *если $A = eM$, $B = fM$, где $e^2 = e$ и $f^2 = f$, то существует гомоморфизм $g^2 = g \in S$ такой, что $A + B$ лежит над gM*;
(2) *если A лежит над eM, B — над fM, где $e^2 = e$ и $f^2 = f$, то существует гомоморфизм $g^2 = g \in S$ такой, что $A + B$ лежит над gM*;
(3) *для произвольных гомоморфизмов $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in S$ существует идемпотент $e \in S$ такой, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,\varphi_i$ лежит над прямым слагаемым eM*;
(4) *модуль M является SSP-d-CS-модулем.*

Для произвольных правых R-модулей M и N через $Z_M(N)$ будем обозначать наибольший M-сингулярный подмодуль модуля N, т.е. $Z_M(N) = \sum\limits_{f \in \mathrm{Hom}_R(X,N),\ \mathrm{Ker}(f) \trianglelefteq X,\ X \in \sigma(M)} f(X)$.

Лемма 4. *Имеют место следующие утверждения*:

(1) *если M — правый R-модуль и $P \in \sigma(M)$ — проективный модуль в категории $\sigma(M)$, то для подмодуля N модуля P эквивалентны условия*
   (a) *N — существенный подмодуль модуля P,*
   (b) *P/N — M-сингулярный модуль*;
(2) *если M — правый R-модуль, то каждый ненулевой проективный модуль в категории $\sigma(M)$ не является M-сингулярным*;
(3) *если P — ненулевой конечно порожденный квазипроективный R-модуль, то $Z_P(P) \neq P$.*

Лемма 5. *Пусть M — правый R-модуль, $P, N \in \sigma(M)$ и P — проективный модуль в категории $\sigma(M)$. Тогда для гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$ равносильны условия*

(1) $\mathrm{Ker}(\varphi) \trianglelefteq eP$ *для некоторого элемента $e^2 = e \in \mathrm{End}_R(P)$,*
(2) *$\varphi P = P_0 \oplus S$, где P_0 — проективный модуль в категории $\sigma(M)$ и S — M-сингулярный модуль.*

Для произвольного правого R-модуля M через $\nabla(M)$ (соответственно $\triangle(M)$) будем обозначать множество вида $\{f \in \mathrm{End}_R(M) \mid \mathrm{Im}(f) \ll M\}$ (соответственно $\{f \in \mathrm{End}_R(M) \mid \mathrm{Ker}(f) \trianglelefteq M\}$).

Теорема 3. *Пусть M — правый R-модуль и P — проективный модуль в категории $\sigma(M)$. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *для произвольного гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{End}_R(P)$ имеет место равенство $\varphi(P) = eP \oplus P'$, где P' — M-сингулярный модуль и $e^2 = e \in \mathrm{End}_R(P)$*;
(2) *P — CS-риккартовый модуль, удовлетворяющий условию C_2*;
(3) *P — $d-CS$-риккартовый модуль, удовлетворяющий условию $\triangle(P) = \nabla(P)$.*

Следствие 2 ([4], теорема 2.4)**.** Для кольца R следующие условия эквивалентны:

(1) R — полурегулярное кольцо и $J(R) = Z_r(R)$,
(2) кольцо R является правым ACS-кольцом и правым C_2-кольцом,
(3) каждый конечно порожденный правый идеал кольца R имеет вид $eR \oplus S$, где $e = e^2 \in R$ и S — сингулярный правый идеал кольца R.

Теорема 4. *Для кольца R следующие условия эквивалентны*:

(1) *R — полурегулярное кольцо и $J(R) = Z_r(R)$,*
(2) *каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является CS-риккартовым модулем и C_2-модулем.*

Теорема 5. *Пусть M — правый R-модуль, $P \in \sigma(M)$ и $S = \mathrm{End}_R(P)$. Тогда следующие условия равносильны*:

(1) *для каждого гомоморфизма $\varphi \in S$ существует $e^2 = e \in S$ такой, что $eP \subseteq \varphi P$, $(1-e)\varphi P \subseteq Z_M(P)$*;
(2) *для каждых гомоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S$ существует $e^2 = e \in S$ такой, что $eP \subset \varphi_1 P + \cdots + \varphi_n P$ и $(\varphi_1 P + \cdots + \varphi_n P) \cap (1-e)P \subset Z_M(P)$*;
(3) *для каждых гомоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S$ имеет место равенство $\varphi_1 P + \cdots + \varphi_n P = eP \oplus U$, где $e^2 = e \in S$ и $U \subset Z_M(P)$*;
(4) *для каждого гомоморфизма $\varphi \in S$ существует $e^2 = e \in S$ такой, что $\varphi P = eP \oplus U$, где $U \subset Z_M(P)$.*

Если P проективен в категории $\sigma(M)$, то (1)–(4) эквивалентны условию

(5) *P является CS-риккартовым модулем, удовлетворяющим условию C_2.*

Модуль M назовем CS-риккартовым модулем относительно модуля N, если $\operatorname{Ker}\varphi$ является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M для каждого $\varphi \in \operatorname{End}_R(M, N)$.

Теорема 6. *Для кольца R и фиксированного $n \in \mathbb{N}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *каждый n-порожденный проективный правый R-модуль является CS-риккартовым модулем;*
(2) *свободный R-модуль $R_R^{(n)}$ является CS-риккартовым модулем;*
(3) $\operatorname{Mat}_n(R)$ *является правым ACS-кольцом;*
(4) *каждый n-порожденный правый идеал кольца R имеет вид $P \oplus S$, где P — проективный R-модуль и S — сингулярный правый идеал кольца R;*
(5) *R-модуль $R_R^{(n)}$ является CS-риккартовым модулем относительно модуля R_R.*

Теорема 7. *Для кольца R следующие условия эквивалентны:*

(1) *каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является CS-риккартовым модулем;*
(2) *свободный R-модуль $R_R^{(n)}$ является CS-риккартовым модулем для каждого $n \in \mathbb{N}$;*
(3) $\operatorname{Mat}_n(R)$ *является правым ACS-кольцом для каждого $n \in \mathbb{N}$;*
(4) *для некоторого натурального числа m в кольце $\operatorname{Mat}_m(R)$ каждый конечно порожденный правый идеал кольца $\operatorname{Mat}_m(R)$ имеет вид $P \oplus S$, где P — проективный $\operatorname{Mat}_m(R)$-модуль и S — сингулярный правый идеал кольца R;*
(5) *каждый конечно порожденный правый идеал кольца R имеет вид $P \oplus S$, где P — проективный R-модуль и S — сингулярный правый идеал кольца R.*

Доказательство. Эквивалентность пп. (1), (2), (3), (5) следует из теоремы 6.

(4) $\Rightarrow$ (2). Пусть $R_R^{(n_0)}$ — конечно порожденный свободный правый R-модуль. Выберем такое натуральное число k, что $km > n_0$. Из теоремы 6 следует, что кольцо $M_k(M_m(R)) \cong M_{km}(R)$ является правым ACS-кольцом. Тогда из теоремы 6 и леммы 1 следует, что модуль $R_R^{(n_0)}$ является CS-риккартовым.

(5) $\Rightarrow$ (4). Из теоремы 6 следует, что для каждого натурального числа k кольцо $M_{km}(R) \cong M_k(M_m(R))$ является правым ACS-кольцом. Тогда импликация следует из предыдущей теоремы. $\square$

Следующее утверждение непосредственно следует из предыдущей теоремы, леммы 3 и того факта, что для произвольного натурального числа n правая несингулярность кольца равносильна правой несингулярности кольца $M_n(R)$.

Следствие 3 ([2], теорема 3.6)**.** Для кольца R следующие условия эквивалентны:

(1) каждый конечно порожденный проективный правый R-модуль является риккартовым модулем;
(2) свободный R-модуль $R_R^{(n)}$ является риккартовым модулем для каждого $n \in \mathbb{N}$;
(3) $\operatorname{Mat}_n(R)$ является правым p. p.-кольцом для каждого $n \in \mathbb{N}$;
(4) R — полунаследственное справа кольцо;
(5) для некоторого натурального числа n кольцо $\operatorname{Mat}_n(R)$ является полунаследственным справа кольцом.

Литература

[1] Lee Gangyong, Rizvi S. Tariq, and Roman Cosmin S. *Rickart modules*, Communications in Algebra **38** (11), 4005–4027 (2010).

[2] Lee Gangyong, Rizvi S. Tariq, and Roman Cosmin S. *Direct sums of Rickart modules*, J. Algebra **353** (1), 62–78 (2012).

[3] Lee Gangyong, Rizvi S. Tariq, and Roman Cosmin S. *Dual Rickart modules*, Communications in Algebra **39** (11), 4036–4058 (2011).
[4] Nicholson W.K., Yousif M.F. *Weakly continous and C_2 rings*, Communications in Algebra **29** (6), 2429–2446 (2001).
[5] Li Wenxi, Chen Jianlong, *When CF rings are Artinian*, J. Algebra and its Appl. **12** (4) (2013). Paper №1250059, 7 p.
[6] Zeng Qingyi, *Some examples of ACS-rings*, Vietnam J. Math. **35** (1), 11–19 (2007).
[7] Clark J., Lomp C., Vanaja N., and Wisbauer R. *Lifting modules. Supplements and projectivity in module theory*, Frontiers in Mathematics (Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2006).
[8] Wisbauer R. *Foundations of module and ring theory. A handbook for study and research* (Gordon and Breach Science Publishers, Reading, 1991).

А.Н. Абызов

доцент, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: aabyzov@kpfu.ru

Чан Хоай Нгок Нян

аспирант, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: tranhoaingocnhan@gmail.com

A.N. Abyzov and Tran Hoai Ngoc Nhan

CS-Rickart modules

Abstract. We introduce a notion of CS-Rickart module being a modular analog of the ACS-ring concept. We describe the rings over which each finitely generated projective module is CS-Rickart module. The presented results yield the known results related to Rickart modules and semihereditary rings.

Keywords: CS-Rickart modules, Rickart modules, ACS-rings, semihereditary rings.

A.N. Abyzov

Associate Professor, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan (Volga Region) Federal Univesrity,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: aabyzov@kpfu.ru

Tran Hoai Ngoc Nhan

Postgraduate, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan (Volga Region) Federal Univesrity,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: tranhoaingocnhan@gmail.com