ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 6 (505)

УДК 517.929

В.В. ВЛАСОВ, Д.А. МЕДВЕДЕВ

ОБ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Несмотря на значительное число исследований, посвященных изучению функционально-дифференциальных уравнений (см. [1]–[3], а также указанную там библиографию), работ, в которых изучаются свойства систем экспоненциальных решений, сравнительно немного. Наряду с известным самостоятельным интересом изучение полноты, минимальности и базисности систем экспоненциальных решений этих уравнений играет важную роль при получении оценок решений указанных уравнений (подробнее см. [4]–[7]).

В данной работе установлены неулучшаемые оценки сильных решений систем дифференциально-разностных уравнений (произвольного дифференциального порядка m) нейтрального типа в пространстве Соболева.

Результаты статьи являются развитием и обобщением результатов работ [4]–[7].

1. Определения, обозначения и формулировки результатов

Рассмотрим традиционную начальную задачу для дифференциально-разностного уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{kj}u^{(j)}(t-h_k)+\sum_{j=0}^{m}\int_0^h B_j(s)u^{(j)}(t-s)ds=0, \quad t>0, \tag{1}$$

$$u(t)=y(t), \quad t\in[-h,0]. \tag{2}$$

Здесь A_{kj} — матрицы размера $r\times r$ с постоянными комплексными элементами, элементы матриц-функций $B_j(s)$ принадлежат пространству $L_2(0,h)$, числа h_k таковы, что

$$0=h_0<h_1<\dots<h_n=h.$$

Обозначим через $L(\lambda)$ матрицу-функцию вида

$$L(\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} A_{kj}\lambda^j e^{-\lambda h_k}+\sum_{j=0}^{m}\lambda^j\int_0^h e^{-\lambda s}B_j(s)ds,$$

через $l(\lambda)=\det L(\lambda)$ — характеристический квазимногочлен [1] уравнения (1), через λ_q — нули функции $l(\lambda)$, упорядоченные по возрастанию модулей с учетом кратности, через Λ — множество всех нулей функции $l(\lambda)$.

Собственные векторы, входящие в каноническую систему [8] собственных и присоединенных (корневых) векторов матрицы-функции $L(\lambda)$, отвечающие числу λ_q, обозначим через $x_{q,j,0}$, их присоединенные порядка s — через $x_{q,j,s}$ (индекс j показывает, каким по счету является вектор $x_{q,j,0}$ в специально выбранном базисе подпространства решений уравнения $L(\lambda_q)x=0$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 02-01-00790, 04-01-00618.

Введем систему экспоненциальных решений уравнения (1)

$$y_{q,j,s}(t) = e^{\lambda_q t}\Big(\frac{t^s}{s!}x_{q,j,0} + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!}x_{q,j,1} + \cdots + x_{q,j,s}\Big). \tag{3}$$

Обозначим через $W^p_{2,\gamma}((a,b),C^r)$, $-\infty < a < b \le +\infty$, $p = 1,2,\ldots$, весовые пространства Соболева вектор-функции со значениями в C^r, снабженные нормами

$$\|v\|_{W^p_{2,\gamma}(a,b)} \equiv \Big(\int_a^b e^{-2\gamma t}\Big(\sum_{j=0}^p \|v^{(j)}(t)\|^2_{C^r}\Big)dt\Big)^{1/2}, \quad \gamma \ge 0.$$

Здесь и в дальнейшем $W^p_{2,0} \equiv W^p_2$, $v^{(j)}(t) = \frac{d^j}{dt^j}v(t)$, $p, j = 1,2,\ldots$

Определение. Вектор-функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $W^m_{2,\gamma}((-h,\infty),C^r)$ при некотором $\gamma \in R_+$, назовем сильным решением задачи (1), (2), если $u(t)$ удовлетворяет почти всюду на полуоси R_+ уравнению (1) и условию (2).

Приведем результат о разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $W^m_{2,\gamma}((-h,0),C^r)$.

Лемма 1. *Пусть*

$$\det A_{0m} \ne 0, \tag{4}$$

а начальная функция $y(s)$ принадлежит пространству $W^m_{2,\gamma}((-h,+\infty),C^r)$. Тогда найдется такое $\gamma_0 \ge 0$, что для любого $\gamma \ge \gamma_0$ задача (1), (2) *однозначно разрешима в пространстве $W^m_{2,\gamma}((-h,0),C^r)$, при этом для ее решения $u(t)$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{W^m_{2,\gamma}(-h,+\infty)} \le d_0\|y\|_{W^m_2(-h,0)}$$

с постоянной d_0, не зависящей от функции $y(t)$.

Принимая во внимание лемму 1, введем аналогично [2] полугруппу V_t, $t > 0$, ограниченных операторов, действующих в пространстве $W^m_2((-h,0),C^r)$ согласно правилу

$$(V_t y)(s) = u(t+s), \quad t \ge 0, \quad s \in [-h,0],$$

где $u(t)$ — сильное решение задачи (1), (2), отвечающее начальной функции $y(t)$.

Лемма 2. *При выполнении* (4) *семейство операторов V_t, $t > 0$, образует C^0-полугруппу в пространстве $W^m_2((-h,0),C^r)$ с генератором D, имеющим область определения*

$$\mathrm{Dom}(D) = \Big\{y \in W^{m+1}_2((-h,0),C^r), \ \ \sum_{k=0}^n\sum_{j=0}^m A_{kj}y^{(j)}(-h_k) + \sum_{j=0}^m\int_0^h B_j(s)y^{(j)}(-s)ds = 0\Big\}$$

и действующим по правилу

$$(Dy)(s) = y^{(1)}(s), \quad s \in (-h,0).$$

Предложение 1. *При выполнении* (4) *спектр оператора D совпадает с множеством Λ нулей функции $l(\lambda)$, а экспоненциальные решения при $t \in [-h,0]$ являются его корневыми функциями и образуют минимальную систему в пространстве $W^m_2((-h,0),C^r)$.*

Лемма 3. *Пусть*

$$\det A_{0m} \ne 0, \quad \det A_{nm} \ne 0. \tag{5}$$

Тогда

1) *конечны величины $\varkappa_+ = \sup_{\lambda_q\in\Lambda}\operatorname{Re}\lambda_q$, $\varkappa_- = \inf_{\lambda_q\in\Lambda}\operatorname{Re}\lambda_q$, $N = \max_{\lambda_q\in\Lambda}\nu_q$;*
2) *система экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$ уравнения* (1) *полна в пространстве $W^m_2((-h,0),C^r)$.*

Обозначим через $B(\lambda_q,\rho)$ круг радиуса ρ с центром в точке λ_q и пусть

$$G(\Lambda,\rho)\equiv C\setminus\Big(\bigcup_{\lambda_q\in\Lambda}B(\lambda_q,\rho)\Big).$$

Лемма 4. *Если выполняется (5), то найдется система замкнутых контуров*

$$\Gamma_n=\{\lambda\in C:\operatorname{Re}\lambda=\alpha,\ \gamma_n\le\operatorname{Im}\lambda\le\gamma_{n+1}\}\cup\{\lambda\in C:\alpha\le\operatorname{Re}\lambda\le\beta,\ \operatorname{Im}\lambda=\gamma_{n+1}\}\cup$$
$$\cup\{\lambda\in C:\operatorname{Re}\lambda=\beta,\ \gamma_n\le\operatorname{Im}\lambda\le\gamma_{n+1}\}\cup\{\lambda\in C:\alpha\le\operatorname{Re}\lambda\le\beta,\ \operatorname{Im}\lambda=\gamma_n\},$$

целиком принадлежащая области $G(\Lambda,\rho)$ при некотором достаточно малом $\rho>0$. При этом выполняются условия

(i) *последовательность вещественных чисел $\{\gamma_n\}_{n\in Z}$ такова, что $0<\delta\le\gamma_{n+1}-\gamma_n\le\Delta<+\infty$, где δ и Δ — некоторые положительные постоянные*;

(ii) *количество $N(\Gamma_n)$ нулей функции $l(\lambda)$ (с учетом кратности), лежащих в областях, границами которых являются контуры Γ_n, равномерно ограничено по n, т. е.*

$$\max_n N(\Gamma_n)\le M.$$

Обозначим через W_n подпространства пространства $W_2^m((-h,0),C^r)$, являющиеся линейной оболочкой всех экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$ вида (3), отвечающих числам λ_q, лежащим в областях, границами которых являются контуры Γ_n, а через V_{λ_q} — подпространства пространства $W_2^m((-h,0),C^r)$, являющиеся линейной оболочкой всех экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$, отвечающих числу λ_q.

Перейдем к формулировкам основных результатов работы.

Теорема 1. *При выполнении (5) семейство подпространств $\{W_n\}_{n\in Z}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^m((-h,0),C^r)$.*

Теорема 2. *Пусть выполняется (5) и множество Λ отделимо, т. е. $\inf\limits_{\lambda_p\ne\lambda_q}|\lambda_p-\lambda_q|>0$. Тогда семейство пространств $\{V_{\lambda_q}\}_{\lambda_q\in\Lambda}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $W_2^m((-h,0),C^r)$.*

Замечание 1. Условие $\det A_{nm}\ne0$ является существенным для равномерной минимальности и тем самым для базисности Рисса системы экспоненциальных решений $y_{q,j,s}(t)$ уравнения (1) в пространстве $W_2^m((-h,0),C^m)$.

Теорема 3. *При выполнении (5) для любого сильного решения $u(t)$ задачи (1), (2) выполнено неравенство*

$$\|u\|_{W_2^m(t-h,t)}\le d(t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+t}\|y\|_{W_2^m(-h,0)},\quad t\ge0,\tag{6}$$

с постоянной M, фигурирующей в утверждении (ii) леммы 4, и постоянной d, не зависящей от функции $y(t)$.

Приведем уточнение теоремы 3 в случае отделимости множества Λ.

Теорема 4. *Если выполняется (5) и множество Λ отделимо, то для любого сильного решения $u(t)$ задачи (1), (2) справедливо неравенство (6), в котором $M=\max\limits_{\lambda_q\in\Lambda}\nu_q$, а постоянная d не зависит от начальной функции $y(t)$.*

Замечание 2. Оценки в теоремах 3, 4 являются неулучшаемыми в том смысле, что величину $\varkappa_+$ нельзя заменить на $\varkappa_+-\varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$ ([5]).

2. Доказательство основных результатов

Вначале приведем утверждение, носящее технический характер и используемое при доказательстве основных результатов работы.

Предложение 2. *Если выполнено* (5), *то матрица-функция* $L^{-1}(\lambda)$ *удовлетворяет оценкам*

$$\|L^{-1}(\lambda)\| \le c(|\lambda|+1)^{-m}, \quad \lambda \in G(\Lambda,\rho) \cup \{\operatorname{Re}\lambda > 0\},$$
$$\|L^{-1}(\lambda)\| \le c_0(|\lambda|+1)^{-m}\exp(\operatorname{Re}\lambda h), \quad \lambda \in G(\Lambda,\rho) \cup \{\operatorname{Re}\lambda < 0\},$$

где c, c_0 — *константы.*

Известно утверждение, формулировку которого приведем с учетом принятых здесь обозначений.

Лемма 5 ([9], с. 30). *Если для любых элементов* $f, g \in W_2^m((-h,0), C^r) \equiv H$

$$\sum_{n\in Z}\left|\int_{\Gamma_n}(R_D(\lambda)f,g)_H d\lambda\right| \le \operatorname{const}\|f\|_H\|g\|_H, \tag{7}$$

то система подпространств W_n *является безусловным базисом* H (*базисом Рисса из подпространств*), *если она полна в* H.

Учитывая то, что система экспоненциальных решений уравнения (1) на промежутке запаздывания $[-h,0]$ совпадает с системой собственных и присоединенных (корневых) функций оператора D, и используя лемму 5, установим базисность Рисса корневых функций оператора D.

Чтобы не загромождать изложение техническими деталями, приведем доказательство теоремы 1 в предположении $B_j(s) \equiv 0$, $j = 0,1,\ldots,m$.

Резольвента оператора D в точках существования представима в виде

$$R_D(\lambda)f = -(\lambda I - D)^{-1}f = -e^{\lambda t}F(\lambda) - e^{\lambda t}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{f^{(p)}(0)}{\lambda^{p+1}} + \int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)ds, \tag{8}$$

где

$$F(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\sum_{p=0}^{m-1}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p}A_{kj}\lambda^j e^{-\lambda h_k}\right]\frac{f^{(p)}(0)}{\lambda^{p+1}} - L^{-1}(\lambda)\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}A_{kj}e^{-\lambda h_k}\int_0^{-h_k}e^{-\lambda s}f^{(j)}(s)ds.$$

Представим вектор-функцию

$$F(\lambda) = Q(\lambda) + L^{-1}(\lambda)P(\lambda), \tag{9}$$

где

$$Q(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\sum_{p=0}^{m-1}\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{p}A_{kj}\lambda^j e^{-\lambda h_k}\right]\frac{f^{(p)}(0)}{\lambda^{p+1}},$$
$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n}e^{\lambda h_k}G_k(\lambda), \quad G_k(\lambda) = \int_0^{-h_k}e^{-\lambda s}\sum_{j=0}^{m}A_{kj}f^{(j)}(s)ds.$$

Установим необходимые в дальнейшем оценки вектор-функции $F(\lambda)$. Заметим, что вектор-функции $G_k(\lambda)$ являются целыми функциями экспоненциального типа (не превосходящего h_k), принадлежащими пространству Харди в любой полосе $\{\lambda : A < \operatorname{Re}\lambda < B\}$, причем справедливы неравенства

$$\sup_{A\le x\le B}\int_{-\infty}^{+\infty}\|G_k(x+iy)\|^2 dy \le c_1\|f\|^2_{W_2^m(-h,0)}$$

с постоянной c_1, не зависящей от функции $f(t)$. Отсюда немедленно вытекает неравенство

$$\sup_{A\le x\le B}\int_{-\infty}^{+\infty}\|P(x+iy)\|^2dy\le c_2\|f\|^2_{W_2^m(-h,0)} \tag{10}$$

с постоянной c_2, не зависящей от функции $f(t)$.

На основании предложения 2 и теоремы о следах для пространств Соболева получаем оценку вектор-функции $Q(\lambda)$ в области $\Pi_\rho(\alpha_1,\beta_1)=G(\Lambda,\rho)\cap\{\lambda:\alpha_1<\operatorname{Re}\lambda<\beta_1\}$

$$\|Q(\lambda)\|\le c_3(|\lambda|+1)^{-m-1}\|f\|_{W_2^m(-h,0)},\quad c_3=\text{const}>0. \tag{11}$$

Здесь α_1, β_1 — произвольные постоянные такие, что $\alpha_1\le\alpha$, $\beta\le\beta_1$. Принимая во внимание представление (9), предложение 2, а также оценки (10) и (11), при $\operatorname{Re}\lambda=\alpha$, $\operatorname{Re}\lambda=\beta$ получаем неравенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\xi+i\mu|^{2m})\|F(\xi+i\mu)\|^2d\mu\le c_4\|f\|^2_{W_2^m(-h,0)},\quad \xi=\alpha,\beta, \tag{12}$$

с постоянной c_4, не зависящей от функции $f(t)$.

Поскольку согласно лемме 2 система $\{W_n\}_{n\in Z}$ является полной в пространстве $W_2^m((-h,0),C^r)$, остановимся на доказательстве соотношения (7), фигурирующего в формулировке леммы 5.

В соответствии с леммой 5 и (8) необходимо показать, что

$$\sum_{n\in Z}\left|\int_{\Gamma_n}(e^{\lambda t}F(\lambda),g(t))_{W_2^m}d\lambda\right|\le\text{const}\,\|f\|_{W_2^m}\|g\|_{W_2^m}. \tag{13}$$

Заметим, что интегралы по контурам Γ_n от второго и третьего слагаемых в правой части (8) равны нулю (за исключением, быть может, одного интеграла от второго слагаемого), поскольку подинтегральные функции регулярны в областях, границами которых являются контуры Γ_n.

Обозначив

$$g_m(\lambda)=\int_{-h}^0 e^{\lambda t}g^{(m)}(t)dt,\quad g_0(\lambda)=\int_{-h}^0 e^{\lambda t}g(t)dt,$$

получим

$$(e^{\lambda t}F(\lambda),g(t))_{W_2^m((-h,0),C^r)}=(\lambda^mF(\lambda),g_m(\overline{\lambda}))_{C^r}+(F(\lambda),g_0(\overline{\lambda}))_{C^r}.$$

Для доказательства (13) достаточно установить неравенства

$$\sum_{n\in Z}\left|\int_{\Gamma_n}(\lambda^jF(\lambda),g_j(\overline{\lambda}))d\lambda\right|\le\text{const}\,\|f\|_{W_2^m}\|g\|_{W_2^m},\quad j=0,m. \tag{14}$$

Отметим, что вектор-функции $g_m(\lambda)$ и $g_0(\lambda)$ являются целыми функциями экспоненциального типа, не превосходящего h, из пространства Харди $H_2(A,B)$ в любой полосе $\{\lambda:A\le\operatorname{Re}\lambda\le B\}$, причем справедливы оценки

$$\sup_{A\le x\le B}\int_{-\infty}^{+\infty}\|g_j(x+iy)\|^2dy\le k_j\|g^{(j)}\|^2_{L_2(-h,0)},\quad j=0,m, \tag{15}$$

с постоянными k_0, k_m, не зависящими от функции $g(t)$. Отсюда при $A=\alpha$, $B=\beta$ вытекают неравенства

$$\sum_{n\in Z}\left|\int_{\xi+i\gamma_n}^{\xi+i\gamma_{n+1}}(\lambda^jF(\lambda),g_j(\overline{\lambda}))d\lambda\right|\le\int_{-\infty}^{+\infty}|(((\xi+i\mu)^jF(\xi+i\mu),g_j(\xi-i\mu))|d\mu\le$$

$$\le c_5\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\xi+i\mu|^{2j})\|F(\xi+i\mu)\|^2d\mu\right)^{1/2}\|g^{(j)}\|_{L_2(-h,0)},\quad j=0,m,\quad \xi=\alpha,\beta, \tag{16}$$

с постоянной c_5, не зависящей от функции $g(t)$.

В свою очередь, из (12), (16) вытекают неравенства

$$\sum_{n\in Z}\left|\int_{\xi+i\gamma_n}^{\xi+i\gamma_{n+1}}(\lambda^j F(\lambda),g_j(\overline{\lambda}))d\lambda\right|\le c_7\|f\|_{W_2^m(-h,0)}\|g^{(j)}\|_{L_2(-h,0)},\quad j=\overline{0,m}, \tag{17}$$

с постоянной c_7, не зависящей от функций f и g.

Для завершения доказательства соотношения (13) понадобится утверждение, являющееся незначительной модификацией теоремы 3.3.1 из [10]. Для его формулировки обозначим через $M_{\nu 2}(R)$ совокупность всех целых функций экспоненциального типа ν, которые как функции действительного переменного $t\in R$ принадлежат пространству $L_2(R)$.

Лемма 6. *Пусть функция $v(z)\in M_{\nu 2}(R)$, а последовательность действительных чисел $\{t_n\}_{n\in Z}$ такова, что $0<\delta\le t_{n+1}-t_n\le\Delta<+\infty$, где δ и Δ — положительные постоянные. Тогда имеет место неравенство*

$$\left(\sum_{n\in Z}|v(t_n)|^2\right)^{1/2}\le\delta^{-1/2}(1+\nu\Delta)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|v(t)|^2\right)^{1/2}.$$

В соответствии с представлением (9)

$$(\lambda^j F(\lambda),g_j(\overline{\lambda}))=(\lambda^j Q(\lambda),g_j(\overline{\lambda}))+(\lambda^j L^{-1}(\lambda)P(\lambda),g_j(\overline{\lambda})).$$

Согласно лемме 4 и оценке (11)

$$\|\lambda^m Q(\lambda)\|\;|_{\operatorname{Im}\lambda=\gamma_n}\le c_8\sup(|\lambda|+1)^{-1}\|f\|_{W_2^m(-h,0)}.$$

Из последнего неравенства получим оценку

$$\int_{\alpha+i\gamma_n}^{\beta+i\gamma_n}\|\lambda^m Q(\lambda)\|^2 d\lambda\le c_9(|n|+1)^{-2}\|f\|^2_{W_2^m(-h,0)},\quad n\in Z, \tag{18}$$

с постоянной c_9, не зависящей от функции $f(t)$.

Для вектор-функции $g_j(\lambda)$ в соответствии с леммой 6 имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|(g_j(x+i\gamma_n),e_l)|^2\le c_{10}\int_{-\infty}^{+\infty}|(g_j(x+iy),e_l)|^2dy\le$$

$$\le c_{11}\int_{-\infty}^{+\infty}\|g_j(x+iy)\|^2_{C^r}dy,\quad x\in[\alpha,\beta],\quad j=\overline{0,m},$$

где $\{e_l\}_{l=1}^r$ — ортонормированный базис пространства C^r, и, значит, согласно (15)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_\alpha^\beta\|g_j(x+i\gamma_n)\|^2_{C^r}dx\le c_{12}\sup_{\alpha\le x\le\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\|g_j(x+iy)\|^2_{C^r}dy\le c_{13}\|g^{(j)}\|_{L_2(-h,0)} \tag{19}$$

с постоянными c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}, не зависящими от функции $g(t)$.

Принимая во внимание, что функция $(P(\lambda),e_l)$, $l=1,2,\ldots,r$, $\lambda=iz$, также удовлетворяет условиям леммы 6, аналогично оценке для вектор-функции $g_j(\lambda)$ получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\|P(x+i\gamma_n)\|^2_{C^r}\le c_{14}\int_{-\infty}^{+\infty}\|P(x+iy)\|^2_{C^r}dy,\quad x\in[\alpha,\beta]. \tag{20}$$

Следовательно, из (20) и оценки (10) следует неравенство

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_\alpha^\beta\|P(x+i\gamma_n)\|^2dx\le c_{15}\|f\|^2_{W_2^m(-h,0)}$$

с постоянной c_{15}, не зависящей от функции $f(t)$.

Из последнего неравенства, а также из того (см. лемму 4 и предложение 2), что

$$\sup_{\lambda\in l_n} |\lambda|^m \|L^{-1}(\lambda)\| \le K_0 = \mathrm{const}, \quad n \in Z,$$

получим оценку

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{l_n} \|\lambda^m L^{-1}(\lambda)P(\lambda)\|^2_{C^r} |d\lambda| \le c_{16} \|f\|^2_{W_2^m(-h,0)}, \tag{21}$$

где $l_n = \{\lambda \in C : \mathrm{Im}\,\lambda = \gamma_n,\ \alpha \le \mathrm{Re}\,\lambda \le \beta\}$.

Принимая во внимание представление (9) и оценки (18), (21), имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{l_n} \|\lambda^m F(\lambda)\|^2 |d\lambda| \le c_{17} \|f\|^2_{W_2^m(-h,0)} \tag{22}$$

с постоянной c_{17}, не зависящей от функции $f(t)$.

Следовательно, из оценок (19), (22) и неравенства

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_{l_n} (\lambda^j F(\lambda), g_j(\overline{\lambda})) d\lambda \right| \le \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{l_n} \|\lambda^j F(\lambda)\|^2 |d\lambda| \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{l_n} \|g_j(\overline{\lambda})\|^2 |d\lambda| \right)^{1/2},$$

$j = \overline{0,m}$, вытекает

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \int_{l_n} (\lambda^j F(\lambda), g_j(\overline{\lambda})) d\lambda \right| \le c_{18} \|f\|_{W_2^m(-h,0)} \|g^{(j)}\|_{L_2(-h,0)}, \quad j = \overline{0,m}, \tag{23}$$

с постоянной c_{18}, не зависящей от функций $f(t)$ и $g(t)$.

Наконец, объединяя неравенства (17) и (23), получаем искомое неравенство (14).

Таким образом, в соответствии с леммой 5 система подпространств $\{W_n\}_{n\in Z}$ образует безусловный базис (базис Рисса) пространства $W_2^m((-h,0),C^r)$.

Прокомментируем некоторые сформулированные утверждения.

Доказательство теоремы 3 следует из установленной теоремы 1 из [11]. Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1 с несколько иным выбором контуров Γ_n, учитывающим отделимость множества Λ. Доказательство теоремы 4 вытекает из теоремы 2 и устанавливается аналогично доказательству теоремы 1 из [5].

Отметим, что доказательство леммы 4 и предложения 2 проводится с использованием результатов работ [12], [13] аналогично доказательству леммы 4 и предложения 3 из статьи [4], в которой рассматривается случай уравнения первого порядка ($m = 1$). Полнота системы экспоненциальных решений (лемма 3) доказывается аналогично лемме 3 из [14].

Лемма 1 о корректной разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $W^m_{2,\gamma}((-h,+\infty),C^r)$ является следствием существенно более общих результатов о разрешимости функционально-дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами ([15], [14]).

3. Некоторые замечания и комментарии

Замечание 3. Оценки, аналогичные полученным в теоремах 3, 4, для которых величина $\varkappa$ заменяется на $\varkappa+\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), давно известны ([1], [2]). В этой связи и в связи с рассмотрением критического и сверхкритического случаев естественно возникла задача о получении более точных оценок решений уравнений нейтрального типа, и, в частности, вопрос о том, можно ли положить $\varepsilon = 0$. Теоремы 3, 4 дают положительный ответ на данный вопрос и посвящены исследованию указанной задачи.

Полнота системы экспоненциальных решений уравнений, близких (1), изучалась рядом авторов (см. [16]–[18], а также указанную там библиографию).

В заключение отметим, что асимптотическое поведение решений уравнения вида (1) изучалось многими авторами ([1], [2]). Отличительной чертой предлагаемого здесь подхода является то, что он носит спектральный характер и базируется на анализе свойств системы экспоненциальных решений. Так, теоремы 3 и 4 получены на основе базисности Рисса системы подпространств W_n и V_{λ_q}. Ранее результаты о базисности экспоненциальных решений в шкале пространств Соболева с целым индексом были установлены в случае $m = 1$ в [4]–[6]; в скалярном случае ($r = 1$) для произвольного индекса — в [7].

При ином понимании решений базисность систем экспоненциальных решений для уравнений, близких (1) в пространстве $L_2((-h,0),C^r) \oplus C^r$, при $m = 1$ в предположении отделимости множества Λ рассматривалась в [16].

Отметим, что изучение базисности Рисса системы экспоненциальных решений тесно связано с исследованием задач со спектральным параметром в граничных условиях, а также многоточечных спектральных задач. Наиболее близкой и завершенной в этом направлении работой является [19] (см. там же библиографию).

В связи с изучением оператора D заметим, что спектральный анализ оператора дифференцирования (полнота, разложение по собственным функциям, равносходимость) главным образом в скалярном случае и в пространствах $L_p(a,b)$, $C(a,b)$ с несколько иными граничными условиями проводился рядом авторов. Библиография и комментарии по этой тематике представлены в обстоятельном обзоре [20].

Литература

1. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 371 с.
4. Власов В.В. *Об оценках решений дифференциально–разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 14–22.
5. Власов В.В. *Об одном классе дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 20–29.
6. Власов В.В. *О базисности экспоненциальных решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева* // Докл. РАН. – 2001. – Т. 381. – № 5. – С. 302–304.
7. Власов В.В., Иванов С.А. *Оценка решений уравнений с последействием в пространствах Соболева и базис из разделенных разностей* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 2. – С. 303–306.
8. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.
9. Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.* – Кишинев: Штиница, 1986. – 260 с.
10. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1977. – 455 с.
11. Милославский А.И. *Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений* // Сиб. матем. журн. – 1985. – Т. 26. – № 5. – С. 118–132.
12. Зверкин А.М. *Разложение в ряд решений линейных дифференциально-разностных уравнений.* Ч. 1. *Квазиполиномы* // Тр. семин. по теории дифференц. уравнений с отклоняющ. аргументом. – М.: Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы, 1965. – Т. 5. – С. 3–38.
13. Левин Б.Я. *О базисах показательных функций в L_2* // Зап. Харьковск. матем. о-ва. – 1961. – Т. 27. – № 4. – С. 39–48.

14. Власов В.В. *Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в гильбертовом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 22–35.
15. Власов В.В. *О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева* // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. – 1999. – Т. 227. – С. 109–121.
16. Lunel S.V., Yakubovich D.V. *A functional model aproach to linear neutral functional differential equations* // J. Int. Equat. and Oper. Theory. – 1997. – V. 27. – № 5. – P. 347–378.
17. Delfour M.C., Manitius A. *The structural operator F and its role in the theory of retarded systems.* Part II // J. Math. Anal. and Appl. – 1980. – V. 74. – № 2. – P. 359–381.
18. Lunel S.V. *Series expansions and small solutions for Volterra equations of convolution type* // J. Different. Equat. – 1990. – V. 85. – № 1. – P. 17–53.
19. Шкаликов А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Тр. семин. им. И.Г. Петровского. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – Вып. 9. – С. 190–229.
20. Седлецкий А.М. *Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси* // УМН. – 1982. – Т. 37. – Вып. 5. – С. 51–95.

Московский государственный университет

Поступила 18.03.2003