УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2017, Т. 159, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 13–20 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.17+512.54

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$

В.В. Биткина[1], *А.А. Махнев*[2]

[1]*Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, г. Владикавказ, 362025, Россия*

[2]*Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, 620990, Россия*

Аннотация

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин – сильно регулярные графы со вторым собственным значением, не большим t для данного натурального числа t. Эта задача сводится к описанию дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин – сильно регулярные графы с неглавным собственным значением t для $t = 1, 2, \ldots$

В работе «Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3» А.А. Махневым и Д.В. Падучих найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин – сильно регулярные графы со вторым собственным значением t, $2 < t \le 3$. Неизученными оставались графы с массивами пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$ и $\{256, 204, 1; 1, 51, 256\}$.

В настоящей работе найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$. Доказано, что окрестности вершин рассматриваемого графа являются псевдогеометрическими графами для $GQ(4, 6)$. Определены композиционные факторы группы автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, группа автоморфизмов графа

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, которые находятся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \bigcup [a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ $(\Gamma_{i-1}(u))$ с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 – это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначим множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \bigcap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются как p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин – сильно регулярные графы со вторым собственным значением t, $2 < t \leq 3$. В рамках проекта РНФ 14-11-00061 завершается программа изучения автоморфизмов дистанционно регулярных графов из заключения следствия в [1]. К настоящему моменту остались неизученными массивы $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$ и $\{256, 204, 1; 1, 51, 256\}$. В настоящей работе изучаются автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 125 + 250 + 2 = 378$ вершин и спектр $125^1, 5^{210}, -1^{125}, -25^{42}$. Порядок клики в Γ не превосходит $1 - k/\theta_d = 6$. Так как $25 = 5^2$, то окрестности вершин в Γ – псевдогеометрические графы для $GQ(4,6)$ (см. [2]).

Теорема 1. *Пусть* Γ *– дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *– элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *– пустой граф и либо*

(*i*) $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 60t - 6$ *и* $\alpha_2(g) = 384 - 60t$, *либо*

(*ii*) $p = 3$, $\alpha_3(g) = 9l$, $\alpha_1(g) = 90t + 36 - 3l$ *и* $\alpha_2(g) = 342 - 90t - 6l$, *либо*

(*iii*) $p = 7$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) \in \{126, 336\}$ *и* $\alpha_2(g) \in \{252, 42\}$;

(2) Ω *содержит по* s *вершин в* t *антиподальных классах и либо*

(*i*) $p = 11$ *и* Ω *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{15, 8, 1; 1, 4, 15\}$, *либо*

(*ii*) $p = 7$ *и* Ω *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{13, 12, 1; 1, 6, 13\}$, *либо*

(*iii*) $p = 5$ *и* Ω *– антиподальный класс или* Ω *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{25, 12, 1; 1, 6, 13\}$, *либо*

(*iv*) $p = 3$, Ω *– объединение трех изолированных* 3*-клик или* Ω *является объединением трех изолированных* 6*-клик,* $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_2(g) = 360$, *или* Ω *– регулярный граф степени* 35, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_2(g) = 270$, *либо*

(*v*) $p = 2$, $s = 1$ *и* Ω *является* 6*-кликой или* $s = 3$, $t \in \{4, 14, 24\}$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 20w - 12 + 9t$ *и* $\alpha_2(g) = 390 - 20w - 12t$.

Для доказательства теоремы 1 необходима

Теорема 2. *Пусть* Γ *– сильно регулярный граф с параметрами* $(125, 28, 3, 7)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *– элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *– пустой граф,* $p = 5$, $\alpha_1(g) = 50t - 25$ *и* $\alpha_2(g) = 150 - 50t$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 5$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t - 10$ *и* $\alpha_2(g) = 130 - 20t$, *либо* $p = 3$ *и* $n = 5$, $\alpha_1(g) = 30s$, $\alpha_2(g) = 120 - 30s$ *или* $n = 2$, $\alpha_1(g) = 30s - 9$, $\alpha_2(g) = 132 - 30s$;

(3) Ω *является* $(7w + 6)$*-кокликой,* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 70s + 13 + 21w$ *и* $\alpha_2(g) = 105 - 28w - 70s$;

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(*i*) $p \leq 5$, *и в случае* $p = 5$ *подграф* Ω *является* 5×5*-решеткой,* $\alpha_1(g) = 50s$ *и* $\alpha_2(g) = 100 - 50s$, *либо*

(*ii*) $p = 3$, $|\Omega| = 3l + 2$, $l \in \{1, 2, \ldots, 11\}$, $\alpha_1(g) = 30s + 39 - 9l$ *и* $\alpha_2(g) = 84 + 6l - 30s$, *либо* *(iii)* $p=2$, $|\Omega|=2l+1$, $l\in\{2,\dots,17\}$, $\alpha_1(g)=20s+2+6l$ *и* $\alpha_2(g)=122-$ $-20s-8l$.

Следствие. *Пусть* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{125,96,1;1,48,125\}$, F *– антиподальный класс и группа* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $S(G)=1$, *то группа* $F^*(G)$ *изоморфна* $U_3(3)$, $U_3(5)$ *или* A_9;

(2) *если* G *действует транзитивно на множестве дуг графа* Γ, *то* Γ *– единственный граф с* $F^*(G)=SU_3(5)$ *и группой* $G_{\{F\}}$, *изоморфной расширению экстраспециальной группы порядка* 125 *с помощью циклической группы порядка* 24.

Доказательства теорем опираются на метод Хигмена изучения автоморфизмов дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [3]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X,\mathcal{R})$ с d классами, где X – множество вершин графа, R_0 – отношение равенства на X и для $i\le 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что $d(u,w)=i$. Для $u\in\Gamma$ положим $k_i=|\Gamma_i(u)|$, $v=|\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u,w смежны, если $(u,w)\in R_i$. Пусть A_i – матрица смежности графа Γ_i для $i>0$ и $A_0=I$ – единичная матрица. Тогда $A_iA_j=\sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i – матрица, в которой на месте (j,l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0),\dots,p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0=1,\dots,m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i)=m_jp_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицами собственных значений схемы соответственно и связаны равенством $PQ=QP=vI$.

Подстановочное представление группы $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v,\mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0,\dots,W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g\in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i – характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [3, § 3.7]) для $g\in G$ получим $\chi_i(g)=v^{-1}\sum_{j=0}^{d}Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ – число точек x из X таких, что $d(x,x^g)=j$.

Ниже в леммах 1–3 предполагается, что Γ – сильно регулярный граф с параметрами $(125,28,3,7)$ и спектром $28^1,3^{84},-7^{40}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 1. *Пусть* $g\in G$, χ_2 *– характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 40. *Тогда* $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_2(g)=(3\alpha_0(g)-\alpha_1(g))/10-5/2$. *Если* $|g|=p$ *– простое число, то* $\chi_2(g)-40$ *делится на* p, *а если* $|g|=p^2$, p *– простое число, то* $\chi_2(g^p)-40$ *делится на* p^2.

Доказательство. Имеем

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1\\84&9&-7/2\\40&-10&5/2\end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_2(g)=(8\alpha_0(g)-2\alpha_1(g)+\alpha_2(g)/2)/25$. Подставляя $\alpha_2(g)=125-\alpha_0(g)-$ $-\alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g)=(3\alpha_0(g)-\alpha_1(g))/10-5/2$. □

Остальные утверждения леммы следует из [4, лемма 1].

Лемма 2. *Пусть* g *– элемент простого порядка* p *из* G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* $p=2$, *то любая вершина из* $\Gamma \backslash \Omega$ *смежна с нечетным числом вершин из* Ω;

(2) *если* Ω *– пустой граф, то* $p=5$, $\alpha_1(g)=50t-25$ *и* $\alpha_2(g)=150-50t$;

(3) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $n=5$, $p=2$, $\alpha_1(g)=20t-10$ *и* $\alpha_2(g)=130-20t$, *либо* $p=3$ *и* $n=5$, $\alpha_1(g)=30s$ *и* $\alpha_2(g)=120-30s$ *или* $n=2$, $\alpha_1(g)=30s-9$ *и* $\alpha_2(g)=132-30s$;

(4) *если* Ω *является* l*-кокликой,* $l \geq 2$, *то* $p=7$, $l=7w+6$, $\alpha_1(g)=70s+ +13+21w$ *и* $\alpha_2(g)=105-28w-70s$;

(5) *если* Ω *является объединением изолированных клик, то* Ω *– клика или коклика.*

Лемма 3. *Пусть* Ω *содержит геодезический* 2*-путь. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v', k', 3, 7)$;

(2) *для любой вершины* a *подграф* $[a]$ *не содержится в* Ω;

(3) $p \leq 5$, *и в случае* $p=5$ *подграф* Ω *является* 5×5*-решеткой,* $\alpha_1(g)=50s$ *и* $\alpha_2(g)=100-50s$;

(4) $p=3$, $|\Omega|=3l+2$, $l \in \{1,2,\ldots,11\}$, $\alpha_1(g)=30s+39-9l$ *и* $\alpha_2(g)=84+ +6l-30s$;

(5) $p=2$, $|\Omega|=2l+1$, $l\in\{2,\ldots,17\}$, $\alpha_1(g)=20s+2+6l$ *и* $\alpha_2(g)=122-20s-8l$.

Из лемм 1–3 следует теорема 1.

Лемма 4. *Пусть* Γ *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{125,96,1;1,48,125\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g\in G$, χ_2 *– характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 125, χ_3 *– характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 42. *Тогда* $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* l, *взаимно простого с* $|g|$, $\chi_2(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_3(g))/3-\\-1$, $\chi_3(g)=(2\alpha_0(g)-2\alpha_1(g)/5+\alpha_2(g)/5-\alpha_3(g))/18$. *Если* $|g|=p$ *– простое число, то* $\chi_2(g)-125$ *и* $\chi_3(g)-42$ *делятся на* p, *а если* $|g|=p^2$, p *– простое число, то* $\chi_3(g^p)-42$ *делится на* p^2.

В леммах 5–8 предполагается, что Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{125,96,1;1,48,125\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Если Ω – непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Для вершины $x\in\Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x.

Лемма 5. *Если* Ω *– пустой граф, то выполняется одно из утверждений:*

(1) $p=2$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)=60t-6$ *и* $\alpha_2(g)=384-60t$;

(2) $p=3$, $\alpha_3(g)=9l$, $\alpha_1(g)=90t+36-3l$ *и* $\alpha_2(g)=342-90t-6l$;

(3) $p=7$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_1(g)\in\{126,336\}$ *и* $\alpha_2(g)\in\{252,42\}$.

Лемма 6. *Если* $p\geq 7$, *то либо* $p=11$ *и* Ω *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{15,8,1;1,4,15\}$, *либо* $p=7$ *и* Ω *– дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{13,12,1;1,6,13\}$.

Доказательство. Если $p>2$, то $s=3$, Ω – регулярный граф степени $t-1$ и p делит $126-t$. Каждая вершина из $\Gamma\setminus\Omega$ смежна ровно с t вершинами из Ω, поэтому $t \leq 48$. Если $p > 23$, то Ω – реберно регулярный граф с параметрами $(v', t-1, 28)$.

Если $p > 47$, то Ω – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{t-1, t-30, 1; 1, 48, t-1\}$, противоречие.

Пусть $p = 47$. Тогда $t = 32$ и $\mu_\Omega = 1$. Отсюда граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{31, 2, 1; 1, 1, 31\}$, противоречие с тем, что два собственных значения графа Ω являются корнями уравнения $x^2 - 27x - 31 = 0$.

Случаи $13 \leq p \leq 43$ рассматриваются аналогично.

Пусть $p = 11$. Тогда либо $t = 16$, $\lambda_\Omega = 6$ и $\mu_\Omega = 4$, либо $t = 27$, $\lambda_\Omega \in \{6, 17\}$ и $\mu_\Omega \in \{4, 15\}$, либо $t = 38$, $\lambda_\Omega \in \{6, 17, 28\}$ и $\mu_\Omega \in \{4, 15, 26\}$.

В третьем случае имеем $\alpha_1(g) = 0$, так как $\lambda < 38$. Отсюда $\chi_3(g) = (228 + \alpha_2(g)/5)/18$, противоречие с тем, что $\alpha_2(g) = 330$ и $\alpha_0(g) + \alpha_2(g) > v = 378$.

В первом случае Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{15, 8, 1; 1, 4, 15\}$.

В оставшемся случае каждый μ-подграф в Γ регулярен степени 7, поэтому $\mu_\Omega = 15$, противоречие.

Пусть $p = 7$. Ввиду теоремы 2 окрестность вершины в Ω является $(7w+6)$-кокликой, $w \leq 2$. Отсюда $\lambda_\Omega = 0$, $t \in \{14, 21\}$ и $\mu_\Omega \in \{6, 13\}$. В случае $t = 14$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{13, 12, 1; 1, 6, 13\}$.

В случае $t = 21$ для антиподального класса $\{a_1, a_2, a_3\}$ из Ω вершина $b \in \Omega(a_3)$ смежна либо с 6 вершинами в каждом из подграфов $\Omega(a_1)$, $\Omega(a_2)$ и с 7 вершинами из $\Omega(a_3)$, либо с 19 вершинами в $\Omega(a_1) \bigcup \Omega(a_2)$ и с 0 вершин из $\Omega(a_3)$. Можно считать, что b смежна с 13-кокликой из $\Omega(a_1)$, поэтому $\Omega(a_1)$ является 20-кокликой. Пусть x – число вершин из $\Omega_2(a_1)$, смежных с 13 вершинами из $\Omega(a_1)$. Тогда число ребер между $\Omega(a_1)$ и $\Omega_2(a_1)$ равно $20 \cdot 19 = 13x + 6(40 - x)$, поэтому $x = 20$. Среди 10 вершин из $\Omega(a_1)$, смежных с 13 вершинами из $\Omega(a_2)$, найдутся две вершины c_1, c_2, смежные с общей вершиной b из $\Omega(a_3)$. Так как Ω не содержит треугольников, то $\Omega(a_2) \setminus [b]$ содержит по 13 вершин из $[c_1]$, $[c_2]$, противоречие с тем, что $\Omega(c_1) \bigcap [c_2]$ содержит a_1, b и не менее 12 вершин из $\Omega(a_2) \setminus [b]$. $\square$

Лемма 7. *Если $p \leq 5$, то выполняется одно из утверждений:*

(1) $p = 5$ и либо Ω – антиподальный класс, либо Ω – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{25, 12, 1; 1, 6, 13\}$;

(2) $p = 3$ и либо Ω – объединение трех изолированных 3-клик, либо Ω является объединением трех изолированных 6-клик, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 360$, либо Ω – регулярный граф степени 35, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 270$;

(3) $p = 2$ и либо $s = 1$, Ω является 6-кликой, либо $s = 3$, $t \in \{4, 14, 24\}$, $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 20w - 12 + 9t$ и $\alpha_2(g) = 390 - 20w - 12t$.

Доказательство. Пусть $p = 5$. Ввиду теоремы 2 либо Ω – коклика, либо окрестность вершины в Ω является 5×5-решеткой. В первом случае $t = 1$. В последнем случае Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{25, 16, 1; 1, 8, 25\}$.

Случаи $p = 3$ и $p = 2$ рассматриваются аналогично. Лемма, а вместе с ней и теорема 1 доказаны. $\square$

Пусть до конца работы Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ и $|G|$ делится на 5. Если a – вершина из Γ, то $|G : G_a| = 378 = 27 \cdot 14$.

Лемма 8. *Пусть h – элемент порядка 7 из G, g – элемент простого порядка p из $C_G(f)$, $p \neq 7$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\mathrm{Fix}(h)$ – *пустой граф и либо*

(*i*) $|\Omega| = 0$, $p = 2$, $\alpha_3(g) = 0$, $t = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 294$ *или* $p = 3$, $\alpha_3(g) = 9l$ *делится на 7,* $\alpha_1(g) = 126 - 3l$ *и* $C_G(h)$ *не содержит элементов порядка* 9, *либо*

(*ii*) $p = 2$, $t = 14$ *и* $\alpha_1(g) = 154$*;*

(2) $\mathrm{Fix}(h)$ – *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{13, 12, 1; 1, 6, 13\}$, $p = 2$ *и либо*

(*i*) $|\Omega| = 0$, *либо*

(*ii*) Ω *является кубом, содержащимся в* $\mathrm{Fix}(h)$, $\alpha_1(g) = 20w+24$ *и* $w = 1, 8$, *либо*

(*iii*) $\Omega = \mathrm{Fix}(h)$, $\alpha_1(g) = 154$.

Лемма 9. *Пусть* $\overline{T}$ *– цоколь группы* $\overline{G} = G/S(G)$*. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *разрешимый радикал* $S(G)$, *является* $\{2, 3\}$*-группой;*

(2) *либо*

(*i*) *группа* $\overline{T}$ *изоморфна* A_7 *и* $|\overline{T} : \overline{T}_{\{F\}}| = 7$, *либо*

(*ii*) *группа* $\overline{T}$ *изоморфна* A_7, $L_3(4)$ *и* $|\overline{T} : \overline{T}_{\{F\}}| = 21$, *либо*

(*iii*) *группа* $\overline{T}$ *изоморфна* $Sp_6(2)$ *и* $|\overline{T} : \overline{T}_{\{F\}}| = 63$, *либо*

(*iv*) *группа* $\overline{T}$ *изоморфна* A_9, A_{10}, $U_3(5)$ *и* $|\overline{T} : \overline{T}_{\{F\}}| = 126$.

Доказательство. Так как $v = 378 = 27 \cdot 14$, то $S(G)$, является $\{2, 3, 7\}$-группой. Если Q – подгруппа порядка 7 из $S(G)$, то элемент порядка 5 из G централизует Q, противоречие.

Пусть $\overline{T}$ – цоколь группы $\overline{G} = G/S(G)$. Ввиду теоремы 1 и леммы 8 имеем $\pi(\overline{T}) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Если $|G|$ делится на 11, то по [5, табл. 1] группа $\overline{T}$ изоморфна M_{22}, A_{11}, A_{12}, McL, His или $U_6(2)$. В любом случае $\overline{T}$ не содержит подгрупп индекса, делящего 126.

Если $|G|$ делится на 11, то по [5, табл. 1] группа $\overline{T}$ изоморфна A_7, $U_3(5)$, $L_3(4)$, A_8, A_9, A_{10}, J_2, $U_4(3)$, $Sp_6(2)$ или $P\Omega^+{}_8(2)$. Так как $\overline{T}$ содержит подгруппу индекса, делящего 126, то либо

(*i*) группа $\overline{T}$ изоморфна A_7 и $|\overline{T} : \overline{T}_{\{F\}}| = 7$, либо

(*ii*) группа $\overline{T}$ изоморфна A_7, $L_3(4)$ и $|\overline{T} : \overline{T}_{\{F\}}| = 21$, либо

(*iii*) группа $\overline{T}$ изоморфна $Sp_6(2)$ и $|\overline{T} : \overline{T}_{\{F\}}| = 63$, либо

(*iv*) группа $\overline{T}$ изоморфна A_9, A_{10}, $U_3(5)$ и $|\overline{T} : \overline{T}_{\{F\}}| = 126$.

Лемма доказана. □

Завершим доказательство следствия. Пусть $S(G) = 1$. Если $|G|$ не делится на 5, то группа T изоморфна $U_3(3)$. Если $|G|$ делится на 5, то ввиду леммы 9 группа T изоморфна $U_3(5)$, A_9 или A_{10}. Но в случае A_{10} группа $T_{\{F\}}$ изоморфна расширению $A_5 \times A_5$ с помощью циклической группы порядка 4. Противоречие с тем, что группа G_a не содержит подгрупп индекса 3.

Пусть группа G действует транзитивно на множестве дуг графа Γ. Тогда $|G|$ делится на 125, и ввиду леммы 9 группа $\overline{T}$ изоморфна $U_3(5)$. С помощью компьютерных вычислений получим, что группа T изоморфна $SU_3(5)$ и Γ – единственный граф со стабилизатором $G_{\{F\}}$ антиподального класса F, изоморфным расширению экстраспециальной группы порядка 125 с помощью циклической группы порядка 24. Следствие доказано.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 15-11-10025) (теорема 1 и следствие), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 (№ 02.A03.21.0006) (теорема 2).

Литература

1. *Махнев А.А., Падучих Д.В.* Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Докл. РАН. – 2015. – Т. 464, № 4. – С. 396–400.
2. *Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs. – N. Y.: Springer-Verlag, 1989. – 485 p.
3. *Cameron P.J.* Permutation Groups // London Math. Soc. Student Texts. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. – No 45. – 232 p.
4. *Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.* Об автоморфизмах дистанционного графа с массивом пересечений {56, 45, 1; 1, 9, 56} // Докл. РАН. – 2010. – Т. 432, № 5. – С. 583–587.
5. *Zavarnitsine A.V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Elektron. Mat. Izv. – 2009. – V. 6. – P. 1–12.

Поступила в редакцию
01.12.16

Биткина Виктория Васильевна, ассистент кафедры прикладной математики

Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова
ул. Ватутина, д. 46, г. Владикавказ, 362025, Россия
E-mail: *bviktoriyav@mail.ru*

Махнев Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий отделом алгебры и топологии

Институт математики и механики УрО РАН
ул. С. Ковалевской, д. 16, г. Екатеринбург, 620990, Россия
E-mail: *makhnev@imm.uran.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 1, pp. 13–20

On Automorphisms of a Distance-Regular Graph with Intersection Array $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$

V.V. Bitkina[a*], *A.A. Makhnev*[b**]

[a]*North Ossetian State University, Vladikavkaz, 362025 Russia*
[b]*Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia*
E-mail: [*]*bviktoriyav@mail.ru*, [**]*makhnev@imm.uran.ru*

Received December 1, 2016

Abstract

J. Koolen posed the problem of studying distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the second eigenvalue $\leq t$ for the given positive integer t. This problem is reduced to the description of distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the non-principal eigenvalue t for $t = 1, 2, \ldots$

In the paper "Distance regular graphs in which local subgraphs are strongly regular graphs with the second eigenvalue at most 3", A.A. Makhnev and D.V. Paduchikh found the arrays of intersections of distance-regular graphs in which neighborhoods of vertices are strongly regular graphs with the second eigenvalue t such as $2 < t \leq 3$. The graphs with intersection arrays $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$, $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$, and $\{256, 204, 1; 1, 51, 256\}$ remain unexplored.

In this paper, we have found the possible orders and the structures of subgraphs of the fixed points of automorphisms of a distance-regular graph with the intersection array $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$. It has been proved that the neighborhoods of the vertices of this graph are pseudogeometric graphs for $GQ(4, 6)$. Composition factors of the automorphism group of a distance-regular graph with the intersection array $\{125.96, 1; 1, 48, 125\}$ have been determined.

Keywords: distance-regular graph, automorphism groups of graph

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 15-11-10025) (theorem 1 and corollary), as well as by the Agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013 between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and the Ural Federal University (theorem 2).

References

1. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. Distance regular graphs in which local subgraphs are strongly regular graphs with the second eigenvalue at most 3. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 92, no. 2, pp. 568–571. doi: 10.1134/S1064562415050191.
2. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs. New York, Springer, 1989. 485 p.
3. Cameron P.J. Permutation groups. *London Math. Soc. Stud. Texts.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999, no. 45. 232 p.
4. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A. On automorphisms of distance regular graphs with intersection array 56, 45, 1; 1, 9, 56. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282.
5. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2009, vol. 6, pp. 1–12. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Биткина В.В., Махнев А.А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$ // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 1. – С. 13–20.

***For citation*:** Bitkina V.V., Makhnev A.A. On automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{125, 96, 1; 1, 48, 125\}$. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 1, pp. 13–20. (In Russian)