ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

УДК 514.763

М.Ш. ЯКУПОВ

КАНОНИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ В ДИСКРЕТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ. I

В статье автора [1] была определена конструкция дискретного пространства K_n с объемным фундаментальным элементом и построены дискретные аналоги классических дифференциальных операторов. В настоящей статье, являющейся продолжением [1], вводится понятие канонической системы базисов в полном комплексе векторных пространств [1] над K_n и дается алгоритм ее построения. Исследуются линейные уравнения, содержащие введенные в [1] дискретные операторы. Дано полное исследование таких уравнений, получены их общие решения, которые записываются в канонической системе базисов.

1. Отсутствие (ко)гомологий при глобальном описании K_n

Дискретное пространство K_n $(n = 1, 2, 3)$ при локальном описании посредством координатизации [1] состоит из счетного числа структурированных "единиц" пространства $\{\overset{n}{e}.\}_{\mathbb{N}}$ — фундаментальных объемных элементов-ячеек пространства. При этом в качестве исходного предположения было принято условие, что при стирании граней, ребер и узлов в K_n получается евклидово пространство E_n, т. е. тело $|K_n|$ геометрического комплекса K_n совпадает с E_n: $|K_n| = E_n$. Тогда при $n = 3$ возможны пять типов пространств K_3 по числу различных типов ячеек пространства — параллелоэдров Е.С. Федорова. Соответствующие дуальные пространства K_3^* составляются из стереоэдров Б.Н. Делоне [1]. Пара пространств K_n и K_n^* образуют *единое* дискретное пространство, которое будет обозначаться далее как $\mathbb{K}_n = (K_n, K_n^*)$ при этом $K_n^{**} = K_n$. При глобальном описании вводится понятие K-области [1], состоящей из конечного числа ячеек пространства K_n: $\mathcal{K} = \{\overset{n}{e}.\}_m$. В частности, в качестве $\mathcal{K}$-области может быть принята m-я регулярная окрестность некоторой выделенной ячейки: $\mathcal{K} = Om(\cdot)$. Вся остальная часть K_n объявляется одной внешней ячейкой $\overset{n}{e}_0 = K_n \setminus \mathcal{K}$. Тем самым пространство K_n представляется в виде конечного геометрического комплекса $K_n = \overset{n}{e}_0 \cup \mathcal{K}$. К пространству K_n присоединяются еще две крайние ячейки; одна ячейка размерности (-1): $\overset{-1}{e}_1 \equiv \varepsilon$ с условием $\partial \overset{0}{e}. = \varepsilon$, $\partial\varepsilon = 0$ для всякого нульмерного элемента $\overset{0}{e}.$ и одна ячейка размерности $(n+1)$: $\overset{n+1}{e}_1 \equiv \mathbb{E}$ с условиями $\partial\mathbb{E} = \sum \overset{n}{e}.$ и $\partial \circ \partial\mathbb{E} = 0$. Соответствующие ячейки индуцируются $*$-отображением [1] и в $K_n^* : \varepsilon \to \mathbb{E}^*$, $\mathbb{E} \to \varepsilon^*$. Если $|K_n| = E_n$, то будет выполняться условие $\partial \circ \partial\mathbb{E} = \partial \sum \overset{n}{e}. = \sum \partial \overset{n}{e}. = 0$, поскольку в этом случае в последнюю сумму каждый $(n-1)$-элемент входит дважды с противоположными знаками. Предполагается далее, что для рассматриваемых K_n это условие выполняется. Но тогда $K_n = \overset{n}{e}_0 \cup \mathcal{K}$ по своим топологическим свойствам становится n-мерной сферой. Следовательно, все числа Бетти комплекса K_n, кроме n-мерного и нульмерного, равны нулю ([5], с. 84). Введение крайних элементов ε и $\mathbb{E}$ устраняет гомологии и на концах полной диаграммы комплекса (диагр. № 1 в [1]).

Итак, в полном комплексе $\mathbb{E} \cup K_n \cup \varepsilon \equiv \mathbb{K}_n$ и, соответственно, в дуальном комплексе $\varepsilon^* \cup K_n^* \cup \mathbb{E}^* \equiv \mathbb{K}_n^*$ (ко)гомологии отсутствуют и, следовательно, всякий (ко)цикл является (ко)границей.

Отметим, что всякая ячейка пространства $\mathbb{D}_n = (\mathbb{K}_n, \mathbb{K}_n^*)$ связана не только со своей первой окрестностью посредством матриц инцидентностей при $p = 0, 1, \ldots, n$, но и связана с полным комплексом через крайние элементы $\mathbb{E}$, ε (ε^*, $\mathbb{E}^*$) при $p=-1,n+1$. Следовательно, всякую ячейку пространства можно рассматривать как структурированное образование вида

$$(\mathbb{E}|\overset{n}{e}\!\cdot|\overset{n-1}{e}\cdots|\overset{0}{e}|\varepsilon)\in\mathbb{K}_n,\quad(\varepsilon^*|\overset{0}{e}\!{}^*_{\cdot}|\overset{1}{e}{}^*|\cdots|\overset{n}{e}{}^*|\mathbb{E}^*)\in\mathbb{K}^*_n. \tag{1.1}$$

Далее будут рассматриваться определенные таким образом полные геометрические комплексы, в которых отсутствуют (ко)гомологии. Вследствие конечности они полностью характеризуются матрицами инцидентностей $C(p)$, $p=0,1,\ldots,n,n+1$, которые входят во все операторы, определенные в полном комплексе $C(\mathbb{D}_n)=(C(\mathbb{K}_n),C(\mathbb{K}^*_n))$. Для упрощения описания этих операторов в $C(\mathbb{D}_n)$ будем строить специальную систему базисов, в которой матрицы приобретут простейший вид.

2. Преобразования базисов и условия сопряжения в комплексе $C(\mathbb{D}_n)$

Предварительно исследуем связи между общими формулами преобразований базисов векторных пространств, входящих в комплекс $C(\mathbb{D}_n)$. В эти формулы будут привнесены некоторые отличия от общепринятых в линейной алгебре соглашений, касающихся условий сопряжения базисов в парах (C^p,C^*_p). Эти отличия появляются по необходимости для согласования условий сопряжения со спецификой предлагаемой канонической системы базисов во всем комплексе $C(\mathbb{D}_n)$.

В исходной системе базисов в $C^p(\mathbb{K}_n)$ в качестве базисных элементов были приняты пронумерованные в некотором порядке p-элементы $\{\overset{p}{e}\cdot\}_{\alpha_p}$ для каждого значения $p=-1,0,\ldots,n,n+1$. Соответствующие базисные элементы $\{\underset{p}{e}{}^{\cdot}\}_{\alpha_p}$ в $C^*_p(\mathbb{K}_n)$ определялись стандартными условиями сопряжения

$$\left\langle \underset{p}{e}{}^i,\overset{p}{e}_j\right\rangle=\delta^i_j\sim\left\langle \underset{p}{e},\overset{p}{e}\right\rangle=1_{\alpha_p\times\alpha_p}, \tag{2.1}$$

где базисы представлены в матричной записи

$$\overset{p}{e}=(\overset{p}{e}_1\ldots\overset{p}{e}_{\alpha_p})\ \text{в}\ C^p(\mathbb{K}_n),\quad \underset{p}{e}{}^{\mathrm{tr}}=(\underset{p}{e}{}^1\ldots\underset{p}{e}{}^{\alpha_p})\ \text{в}\ C^*_p(\mathbb{K}_n).$$

Формулы действия (ко)граничных операторов на базисные элементы записываются тогда через матрицы инцидентностей в виде

$$\begin{aligned}\overset{p}{\partial}\overset{p}{e}&=\overset{p-1}{e}C(p),\underset{p}{\partial}\underset{p}{e}=C(p+1)\underset{p+1}{e},\\ C(p)&=\left\langle \underset{p-1}{e},\overset{p}{\partial}\overset{p}{e}\right\rangle=\left\langle \underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{e},\overset{p}{e}\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Преобразования базисов во всем комплексе $(C(\mathbb{K}_n),C^*(\mathbb{K}_n))$ запишем формулами

$$\overset{p}{e}\to\overset{p}{e}{}'=\overset{p}{e}P(p),\quad \underset{p}{e}\to\underset{p}{e}{}'=Q(p)\underset{p}{e} \tag{2.3}$$

и рассмотрим условие сопряжения новых базисов

$$\left\langle \underset{p}{e}{}',\overset{p}{e}{}'\right\rangle=Q(p)\left\langle \underset{p}{e},\overset{p}{e}\right\rangle P(p)=Q(p)p(p), \tag{2.4}$$

где последнее равенство следует из (2.1).

Обычно в линейной алгебре предполагается, что и для новых базисов выполняется стандартное условие сопряжения вида (2.1)

$$\left\langle \underset{p}{e}{}',\overset{p}{e}{}'\right\rangle=1_{\alpha_p\times\alpha_p}\Longrightarrow Q(p)P(p)=1\sim Q(p)=P^{-1}(p), \tag{2.5}$$

которое накладывает в нашем случае жесткие геометрические условия на выбор новых базисов в $C^*(\mathbb{K}_n)\cong C(\mathbb{K}^*_n)$. Здесь мы отказываемся от условий сопряжения вида (2.5) и будем пока предполагать только условие невырожденности матриц преобразований базисов $P(p)$ и $Q(p)$ в формулах (2.3).

Условия сопряжения в новых базисах будем записывать в виде

$$\left\langle \underset{p}{e'}, \overset{p}{e'} \right\rangle = S'(p) \equiv Q(p)P(p), \tag{2.6}$$

где в отличие от (2.5) необязательно, чтобы $S'(p) = 1$. Но в отсутствие условий вида (2.5) некоторые формулы в новых базисах будут отличаться от традиционных, например, выражение для свертки p-вектора и p-ковектора (дискретного интеграла в нашем случае, см. [1]) будет содержать в новых базисах матрицу сопряжения $S'(p)$:

$$\left\langle \underset{p}{w}, \overset{p}{v} \right\rangle = \underset{p}{W} V^p = \underset{p}{W'} S'(p) \overset{p}{V'}.$$

Установим формулы преобразования матриц инцидентностей, *предполагая*, что и в новых базисах формулы действия (ко)граничных операторов записываются точно в такой же форме (2.2), как и в исходной системе базисов,

$$\overset{p}{\partial}\overset{p}{e'} = \overset{p-1}{e'}\, C'(p), \quad \underset{p}{\partial}\,\underset{p}{e'} = C'(p+1)\underset{p+1}{e'}, \tag{2.7}$$

а граничные и кограничные операторы связаны стандартным равенством

$$\left\langle \underset{p-1}{e'}, \overset{p}{\partial}\overset{p}{e'} \right\rangle = \left\langle \underset{p-1}{\partial}\,\underset{p-1}{e'}, \overset{p}{e'} \right\rangle. \tag{2.8}$$

Из (2.2), (2.3) и (2.7) следуют соотношения, определяющие формулы преобразования матриц инцидентностей,

$$\begin{aligned} &P(p-1)C'(p) = C(p)P(p), \quad C'(p)Q(p) = Q(p-1)C(p), \\ &C'(p) = P^{-1}(p-1)C(p)P(p) = Q(p-1)C(p)Q^{-1}(p), \end{aligned} \tag{2.9}$$

условия совместности которых запишутся в виде

$$\begin{aligned} C(p)R'(p) &= R'(p-1)C(p), \quad R'(p) \equiv P(p)Q(p), \\ C'(p)S'(p) &= S'(p-1)C'(p), \quad S'(p) \equiv Q(p)P(p). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Последнее равенство равносильно (2.8) вследствие условия сопряжения (2.6).

При заданных ограничениях на вид матрицы $C'(p)$ в (2.7) равенства (2.9) и (2.10) дают условия на матрицы преобразования базисов в (2.3) и тем самым на матрицы сопряжения (2.6).

Замечание 1. Отмеченную выше возможность произвольного выбора условий сопряжения базисов в парах (C^p, C^*_p) можно внести в определение в самом начале в качестве исходных условий

$$\left\langle \underset{p}{e}, \overset{p}{e} \right\rangle = S(p) = (s^i_j(p))_{\alpha_p \times \alpha_p}, \quad \text{ранг}\, S(p) = \alpha_p. \tag{2.11}$$

Тогда формулы действия (ко)граничных операторов следует записывать в виде

$$\overset{p}{\partial}\overset{p}{e} = \overset{p-1}{e}\, C(p), \quad \underset{p}{\partial}\,\underset{p}{e} = \overline{C}(p+1)\underset{p+1}{e}, \tag{2.12}$$

где

$$\overline{C}(p) = S(p-1)C(p)S^{-1}(p) \sim \left\langle \underset{p-1}{\partial}\,\underset{p-1}{e}, \overset{p}{e} \right\rangle = \left\langle \underset{p-1}{e}, \overset{p}{\partial}\overset{p}{e} \right\rangle. \tag{2.13}$$

При замене базисов по формулам (2.3) в новых базисах

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \underset{p}{e'}, \overset{p}{e'} \right\rangle = S'(p) = Q(p)S(p)P(p),\\
&\overset{p}{\partial}\overset{p}{e'} = \overset{p-1}{e'}\, C'(p), \quad \underset{p}{\partial}\underset{p}{e'} = \overline{C}'(p+1)\underset{p+1}{e'},\\
&P(p-1)C'(p) = C(p)P(p), \quad \overline{C}'(p)Q(p) = Q(p-1)\overline{C}'(p),\\
&S'(p-1)C'(p) = \overline{C}'(p)S'(p).
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Произвол в выборе условий сопряжений может быть использован либо формально для некоторых упрощений, либо в приложениях для описания перемещений ячеек в K_n с выходом в K_n^* и обратно (“мерцающее” движение): иначе говоря, может быть использован как способ описания свойств *кикинемы* и *реновации* движения в дискретном пространстве ([2], с. 89–121; [3], с. 14–59; [4], с. 39–41).

3. Определение канонической системы базисов

От исходной системы базисов (ИСБ), перейдем к новой системе базисов, выделяя подпространства (ко)циклов–(ко)границ B и а(ко)циклических элементов X. Из определений подпространств будут непосредственно определяться и их размерности.

В отсутствие гомологий в комплексе $C(\mathbb{K}_n)$

$$
B^p = \overset{p+1}{\partial}\, C^{p+1}(\mathbb{K}_n) = \operatorname{Ker}\overset{p}{\partial};
$$

$$
\begin{aligned}
&B^p = \{\overset{p}{v} \mid \overset{p}{v} = \overset{p+1}{\partial}\overset{p+1}{u}\} \sim \{\overset{p}{V} \mid \overset{p}{V} = C(p+1)\overset{p+1}{U}\} \Longrightarrow \dim B_p = \text{ ранг}\, C(p+1) \equiv r_{p+1},\\
&B^p = \{\overset{p}{v} \mid \overset{p}{\partial}\overset{p}{v} = 0\} \sim \{\overset{p}{V} \mid C(p)\overset{p}{V} = 0\} \qquad\quad \Longrightarrow \dim B^p = \dim C^p - \text{ ранг}\, C(p) =\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \alpha_p - r_p = r_{p+1},
\end{aligned}
$$

$$
X^p = C^p/B^p \Longrightarrow \dim X^p = \dim C^p - \dim B^p = r_p.
$$

В комплексе $C^*(\mathbb{K}_n)$

$$
B_p = \underset{p-1}{\partial} C^*_{p-1}(\mathbb{K}_n) = \operatorname{Ker}\underset{p}{\partial};
$$

$$
\begin{aligned}
&B_p = \{\underset{p}{w} \mid \underset{p}{w} = \underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{u}\} \sim \{\underset{p}{W} \mid \underset{p}{W} = \underset{p-1}{U} C(p)\} \Longrightarrow \dim B_p = \text{ ранг}\, C(p) \equiv r_p,\\
&B_p = \{\underset{p}{w} \mid \underset{p}{\partial}\underset{p}{w} = 0\} \sim \{\underset{p}{W} \mid \underset{p}{W} C(p+1) = 0\} \ \Longrightarrow \dim B_p = \alpha_p - r_{p+1} = r_p,
\end{aligned}
$$

$$
X_p = C^*_p/B_p \Longrightarrow \dim X_p = \dim C^*_p - \dim B_p = r_{p+1}.
$$

Запишем соответствующие разложения для $C^p(\mathbb{K}_n)$ и $C^*_p(\mathbb{K}_n)$, указывая в круглых скобках размерности подпространств,

$$
\begin{gathered}
C^p(\mathbb{K}_n) = B^p_{(r_{p+1})} \oplus X^p_{(r_p)}, \quad C^*_p(\mathbb{K}_n) = X_p^{(r_{p+1})} \oplus B_p^{(r_p)},\\
\alpha_p = r_p + r_{p+1}.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Обозначим соответствующими малыми буквами базисные элементы выделенных подпространств и запишем новые базисы $\{e' \equiv e_{st}\}$, разбивая их на блоки в матричной записи,

$$
\begin{gathered}
\overset{p}{e} \to \overset{p}{e}_{st} = (\overset{p}{b}_{(r_{p+1})}\overset{p}{x}_{(r_p)}), \quad \underset{p}{e} \to \underset{p}{e}_{st} = \begin{pmatrix} \underset{p}{x}^{(r_{p+1})} \\ \underset{p}{b}^{(r_p)} \end{pmatrix},\\
\overset{p}{\partial}\overset{p}{b} = 0, \quad \overset{p}{\partial}\overset{p}{x} = \overset{p-1}{b}, \quad \underset{p}{\partial}\underset{p}{x} = \underset{p+1}{b}, \quad \underset{p}{\partial}\underset{p}{b} = 0.
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

В круглых скобках указаны размеры матриц-строк и столбцов.

Такой выбор базисов устанавливает квазидиагональный(канонический) вид матриц инцидентностей ([5], с. 87–94; [6], с. 27; [7], с. 178; [8], с. 190–196; [9], с. 141–144).

Структура матриц инцидентностей в новой системе базисов определяется непосредственно из формул действия (ко)граничных операторов на базисные элементы

$$\overset{p}{\partial}\overset{p}{e}_{st} = \overset{p-1}{e}_{st} C_{st}(p), \quad \underset{p}{\partial}\underset{p}{e}_{st} = \overline{C}_{st}(p+1)\underset{p+1}{e_{st}}. \tag{3.3}$$

Записывая эти равенства в развернутом виде согласно определениям (3.2), получаем, что матрицы $C_{st}(p)$ и $\overline{C}_{st}(p)$ совпадают и имеют вид

$$\underset{\alpha_{p-1}\times\alpha_p}{C_{st}(p)} = \overline{C}_{st}(p) = \begin{pmatrix} 0_{r_p\times r_{p+1}} & 1_{r_p\times r_p} \\ 0_{r_{p-1}\times r_{p+1}} & 0_{r_{p-1}\times r_p} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где $1_{r_p\times r_p}$ — единичная матрица указанного размера.

Тождество $C_{st}(p)C_{st}(p+1) = 0$ становится тривиальным.

Отметим, что совпадение матриц $C_{st}(p)$ и $\overline{C}_{st}(p)$ в (3.3) обусловлено, в частности, выбранным расположением выделенных элементов в матричных записях (3.2) (ко)базисов в новой системе базисов.

Из уравнения связи (ко)граничных операторов

$$\left\langle \underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{e_{st}}, \overset{p}{e}_{st} \right\rangle \left\langle \underset{p-1}{e_{st}}, \overset{p}{\partial}\overset{p}{e}_{st} \right\rangle$$

получаем

$$\left\langle \underset{p}{b}, \overset{p}{b} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \underset{p}{b}, \overset{p}{x} \right\rangle = \left\langle \underset{p-1}{x}, \overset{p-1}{b} \right\rangle.$$

Следовательно, $B_p \perp B^p$. Из этого условия ортогональности и теоремы об ортогональности ([10], с. 53) следует, что $X_p \perp X^p$, т. е. $\left\langle \underset{p}{x}, \overset{p}{x} \right\rangle = 0$. Матрицы сопряжений в новой системе базисов запишутся в виде

$$S_{st}(p) = \left\langle \underset{p}{e_{st}}, \overset{p}{e}_{st} \right\rangle = \begin{pmatrix} B(p+1) & 0 \\ 0 & B(p) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где

$$B(p) = \left\langle \underset{p}{b}^{(r_p)}, \overset{p}{x}_{(r_p)} \right\rangle = \left\langle \underset{p-1}{x}^{(r_p)}, \overset{p-1}{b}_{(r_p)} \right\rangle, \quad \text{ранг}\, \underset{r_p\times r_p}{B(p)} = r_p.$$

Итак, имеем разложения

$$C^p = B^p_{(r_{p+1})} \oplus X^p_{(r_p)}, \quad C^*_p = X_p^{(r_{p+1})} \oplus B_p^{(r_p)}$$

с условиями

$$\begin{gathered} B^p \perp B_p, \quad X^p \perp X_p, \\ B^p = \overset{p+1}{\partial} X^{p+1}, \quad \overset{p}{\partial} B^p = 0, \quad B_p = \underset{p-1}{\partial} X_{p-1}, \quad \underset{p}{\partial} B_p = 0. \end{gathered} \tag{3.6}$$

и с соответствующими изоморфизмами по равенству размерностей.

Определение 1. Систему базисов и кобазисов $\{\overset{p}{e}_{st}, \underset{p}{e_{st}}\}_{n+3}$, определенную условиями (3.2), (3.5) и (3.6), будем называть канонической системой базисов (КСБ) в полном комплексе $C(\mathbb{D}_n)$.

Формулы действия (ко)граничных операторов в КСБ записываются так же, как и в исходной системе (ко)базисов,

$$\overset{p}{\partial}\overset{p}{e}_{st} = \overset{p-1}{e}_{st} C_{st}(p), \quad \underset{p}{\partial}\underset{p}{e}_{st} = C_{st}(p+1)\underset{p+1}{e}_{st}, \tag{3.7}$$

где матрицы $C_{st}(p)$ имеют канонический вид (3.4).

4. Построение канонической системы базисов (КСБ)

Из определений следует, что КСБ в $C^p(\mathbb{K}_n)$ можно построить последовательной процедурой слева-направо по диаграмме № 1 в [1], начиная с $C^{n+1}(\mathbb{K}_n) = X^{n+1}_{(1)} = \{\mathbb{E}\}_1$, $B^{n+1} = 0$, определяя на каждом шаге $B^{p-1} = \overset{p}{\partial} X^p$ и выделяя подпространство X^{p-1} обычными средствами линейной алгебры. Аналогично, КСБ в $C^*_p(\mathbb{K}_n)$ можно строить справа-налево, начиная с $C^*_{-1} = X^{(1)}_{-1} = \{\varepsilon\}_1$, $B_{-1} = 0$ и пользуясь формулой $B_{p+1} = \underset{p}{\partial} X_p$. Но можно осуществлять переход от ИСБ к КСБ по единым формулам преобразований базисов (2.3) с матрицами перехода $P(p)$ и $Q(p)$, удовлетворяющим условиям (2.9) и (2.10). Для этого нужно построить явный вид этих матриц.

Для записи формул преобразования базисов предварительно произведем разбиение на блоки матричные записи базисных элементов в ИСБ:

$$\overset{p}{e} = (\overset{p}{e}_1 \dots \overset{p}{e}_{\alpha_p}) = (\overset{p}{e}{}^{1}_{(r_{p+1})} \overset{p}{e}{}^{2}_{(r_p)}), \quad \underset{p}{e} = \begin{pmatrix} \underset{p}{e}{}^1 \\ \vdots \\ \underset{p}{e}{}^{\alpha_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{p}{e}{}_1^{(r_{p+1})} \\ \underset{p}{e}{}_2^{(r_p)} \end{pmatrix},$$

$$C^p = \overset{1}{C}{}^p_{(r_{p+1})} \oplus \overset{2}{C}{}^p_{(r_p)}, \quad C^*_p = \underset{1}{C}{}^{*(r_{p+1})}_p \oplus \underset{2}{C}{}^{*(r_p)}_p, \tag{4.1}$$

$$\left\langle \underset{p}{e}, \overset{p}{e} \right\rangle = 1 \sim \begin{cases} \left\langle \underset{p}{e}_1, \overset{p}{e}{}^1 \right\rangle = 1_{r_{p+1}\times r_{p+1}}, & \left\langle \underset{p}{e}_2, \overset{p}{e}{}^2 \right\rangle = 1_{r_p\times r_p}, \\ \left\langle \underset{p}{e}_1, \overset{p}{e}{}^2 \right\rangle = 0 \sim \underset{1}{C}{}^*_p \perp \overset{2}{C}{}^p, & \left\langle \underset{p}{e}_2, \overset{p}{e}{}^1 \right\rangle = 0 \sim \underset{2}{C}{}^*_p \perp \overset{1}{C}{}^p. \end{cases}$$

Соответствующее разбиение на блоки матриц инцидентностей, согласованное с формулами действия (ко)граничных операторов (2.2), имеет вид

$$\underset{\alpha_{p-1}\times\alpha_p}{C(p)} = \Big(\underset{\alpha_{p-1}\times r_{p+1}}{C_1(p)} \;\; \underset{\alpha_{p-1}\times r_p}{C_2(p)} \Big) = \begin{pmatrix} \underset{r_p\times\alpha_p}{C^1(p)} \\ \underset{r_{p-1}\times\alpha_p}{C^2(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{r_p\times r_{p+1}}{C^1_1(p)} & \underset{r_p\times r_p}{C^1_2(p)} \\ \underset{r_{p-1}\times r_{p+1}}{C^2_1(p)} & \underset{r_{p-1}\times r_p}{C^2_2(p)} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Блочное представление матриц перехода от ИСБ к КСБ, согласованное с разбиением (3.2) в КСБ, (4.1) в ИСБ и формулами преобразований (2.3):

1) $$\overset{p}{e} \to \overset{p}{e}_{st} = \overset{p}{e}P(p) \sim (\overset{p}{b}\overset{p}{x}) = (\overset{p}{e}{}^1\overset{p}{e}{}^2)P(p);$$

$$\underset{\alpha_p\times\alpha_p}{P(p)} = \Big(\underset{\alpha_p\times r_{p+1}}{P_b(p)} \;\; \underset{\alpha_p\times r_p}{P_x(p)} \Big) = \begin{pmatrix} \underset{r_{p+1}\times r_{p+1}}{P^1_b(p)} & \underset{r_{p+1}\times r_p}{P^1_x(p)} \\ \underset{r_p\times r_{p+1}}{P^2_b(p)} & \underset{r_p\times r_p}{P^2_x(p)} \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

$$\overset{p}{b} = \overset{p}{e}P_b(p), \quad \overset{p}{x} = \overset{p}{e}P_x(p),$$

2) $$\underset{p}{e} \to \underset{p}{e}_{st} = Q(p)\underset{p}{e} \sim \begin{pmatrix} \underset{p}{x} \\ \underset{p}{b} \end{pmatrix} = Q(p)\begin{pmatrix} \underset{p}{e_1} \\ \underset{p}{e_2} \end{pmatrix};$$

$$\underset{\alpha_p\times\alpha_p}{Q(p)} = \begin{pmatrix} \underset{r_{p+1}\times\alpha_p}{Q^x(p)} \\ \underset{r_p\times\alpha_p}{Q^b(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{r_{p+1}\times r_{p+1}}{Q_1^x(p)} & \underset{r_{p+1}\times r_p}{Q_2^x(p)} \\ \underset{r_p\times r_{p+1}}{Q_1^b(p)} & \underset{r_p\times r_p}{Q_2^b(p)} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

$$\underset{p}{x} = Q^x(p)\underset{p}{e}, \quad \underset{p}{b} = Q^b(p)\underset{p}{e}.$$

Расписывая все условия (2.9), (2.10), связывающие матрицы $P(p)$ и $Q(p)$ с матрицами инцидентностей в ИСБ и КСБ, получаем

$$\begin{gathered} P_b(p) = C(p+1)P_x(p+1), \quad Q^b(p) = Q^x(p-1)C(p), \\ Q^x(p)P_x(p) = 0. \end{gathered} \tag{4.5}$$

При этом

$$B(p) = Q^x(p-1)C(p)P_x(p).$$

Других условий на P и Q нет.

Остается уточнить вид матриц $P_x(p)$ и $Q^x(p)$. Записывая соотношение (4.4) по их блочным разбиениям в (4.1) и (4.2), получаем условие

$$Q_1^x(p)P_x^1(p) + Q_2^x(p)P_x^2(p) = 0.$$

Теперь надо выбрать матрицы, входящие в это условие, имея в виду, что ранг $P_x(p) =$ ранг $Q^x(p-1) = r_p$. Простейший выбор таков

$$P_x^2(p) = 1_{r_p\times r_p}, \quad Q_1^x(p) = 1_{r_{p+1}\times r_{p+1}}, \quad P_x^1(p) = 0, \quad Q_2^x(p) = 0. \tag{4.6}$$

Тогда

$$P_b(p) = C_2(p+1), \quad Q^b(p) = C^1(p), \quad B(p) = C_1^1(p),$$

и матрицы перехода $P(p)$ и $Q(p)$ определяются полностью. Именно

$$\underset{\alpha_p\times\alpha_p}{P(p)} \left(\underset{\alpha_p\times r_{p+1}}{C_2(p+1)} \left| \begin{matrix} \underset{r_{p+1}\times r_p}{0} \\ \underset{r_p\times r_p}{1} \end{matrix} \right. \right), \qquad \underset{\alpha_p\times\alpha_p}{Q(p)} = \left(\begin{array}{cc} \underset{r_{p+1}\times r_{p+1}}{1} & \underset{r_{p+1}\times r_p}{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\underset{r_p\times\alpha_p}{C^1(p)}} \end{array} \right), \tag{4.7}$$

$$P^{-1}(p) = S_{st}^{-1}(p)Q(p), \quad Q^{-1}(p) = P(p)S_{st}^{-1}(p), \tag{4.8}$$

где $C_2(p+1)$ — последние r_{p+1} столбцов матрицы $C(p+1)$, $C^1(p)$ — первые r_p строк матрицы $C(p)$. Пересечением матриц $C_2(p)$ и $C^1(p)$ является подматрица $C_2^1(p) = B(p)$.

Алгоритм построения КСБ оказывается весьма простым. Вид матриц $P(p)$ и $Q(p)$ по (4.6), обусловленный выбором (4.5), означает, что

$$\begin{aligned} &\overset{p}{b} = \overset{p}{e}C_2(p+1), \quad \overset{p}{x} = \overset{p}{e}{}^{2}, \\ &\underset{p}{b} = C^1(p)\underset{p}{e}, \quad \underset{p}{x} = \underset{p}{e}_1. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Итак, доказано

Предложение 1. *В полном комплексе* $(C(\mathbb{K}_n), C^*(\mathbb{K}_n))$ *существует согласованная по формулам действия* (3.7) *каноническая система базисов* (3.2) *с матрицей инцидентностей вида* (3.3) *и с алгоритмом построения по формулам* (4.9).

Замечание 2. Матрицы сопряжений базисов КСБ в $C(\mathbb{K}_n)$ и соответствующих кобазисов в $C^*(\mathbb{K})n)$ имеют существенно недиагональный вид

$$S_{st}(p) = \begin{pmatrix} B(p+1) & 0 \\ 0 & B(p) \end{pmatrix}, \qquad S_{st}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1}(p+1) & 0 \\ 0 & B^{-1}(p) \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

$$B(p) = C_2^1(p).$$

Опишем КСБ в комплексе $C(\mathbb{K}_n^*)$, являющимся геометрической реализацией комплекса $C^*(\mathbb{K}_n)$ (см. [1]). Эта КСБ индуцируется из КСБ в $C^*(\mathbb{K}_n)$ и определяется следующей схемой перехода:

$$\mathbb{K}_n \to \mathbb{K}_n^* \Longrightarrow C^*(\mathbb{K}_n) \to C(\mathbb{K}_n^*); \quad C_p^*(\mathbb{K}_n) \cong C^{n-p}(\mathbb{K}_n^*);$$

$$\underset{p}{e} \cong \overset{n-p}{e^*} = \underset{p}{e}^{\mathrm{tr}} \sim \overset{p}{e}{}^* = \underset{n-p}{e}^{\mathrm{tr}},$$

$$\underset{p}{w} \cong \overset{n-p}{w^*} = \underset{p}{e}^{\mathrm{tr}} \underset{p}{W}^{\mathrm{tr}} = \overset{n-p}{e^*}\overset{n-p}{W^*} \sim \overset{p}{w}{}^* = \overset{p}{e}{}^* \overset{p}{W}{}^*, \quad \overset{p}{W}{}^* = \underset{n-p}{W}^{\mathrm{tr}},$$

$$\partial \underset{p\,p}{e} = C(p+1) \underset{p+1}{e} \Longrightarrow \overset{p}{\partial}{}^* \overset{p}{e}{}^* = \overset{p-1}{e^*} C^*(p), \quad C^*(p) = C^{\mathrm{tr}}(n-p+1).$$

Из этих формул следует, что

$$C^p(\mathbb{K}_n^*) = X^{*p}_{(r_{n-p+1})} \oplus B^{*p}_{(r_{n-p})},$$

$$\overset{p}{e}{}^*_{st} = (\overset{p}{x}{}^*_{(r_{n-p+1})} \overset{p}{b}{}^*_{(r_{n-p})}) = \underset{n-p}{e}{}^{\mathrm{tr}}_{st},$$

$$\underset{p}{e}_{st} Q(p) \underset{p}{e} \Longrightarrow \overset{p}{e}{}^*_{st} = \overset{p}{e}{}^* D^*(p), \quad P^*(p) = Q^{\mathrm{tr}}(n-p).$$

Замечание 3. Формулы (4.8) устанавливают геометрическую интерпретацию элементов КСБ в $C(\mathbb{K}_n)$ и $C(\mathbb{K}^*)$ по отношению к элементам исходной системы базисов.

5. Свойства матриц инцидентностей

При построении КСБ попутно было получено следующее свойство матриц инцидентностей, которое сформулируем как

Предложение 2. *Всякий минор порядка $r_p =$ ранг $C(p)$ матрицы $C(p)$ в исходной системе базисов является невырожденным.*

В рассмотренном расщеплении матрицы $C(p)$ на блоки был выделен один из таких миноров $C_2^1(p)$ в качестве основного. Этот минор располагается в правом верхнем углу матрицы $C(p)$. При этом равенство $C_2^1(p) = \left\langle \underset{p}{b}, \overset{p}{x} \right\rangle = \left\langle \underset{p-1}{x}, \overset{p-1}{b} \right\rangle = B(p)$ соответствует выбору базисов в X_p и X^p и, соответственно, в B_p и B^p так, как это было осуществлено в алгоритме построения КСБ.

Как видно из окончательных формул для матриц преобразований $P(p)$ и $Q(p)$ от ИСБ к КСБ, используются только те блоки матрицы $C(p)$, которые расположены в первых r_p ее строках и r_{p+1} последних столбцах. Оказывается, для остальных блоков можно получить явные выражения через эти блоки, используя тождества $C(p)C(p+1) = 0$.

Расписывая это тождество для расщепления (4.2) матрицы $C(p)$, получаем следующие соотношения между блоками двух смежных матриц инцидентностей:

$$\begin{aligned} C_1^1(p)C_1^1(p+1) + B(p)C_1^2(p+1) &= 0, \\ C_1^1(p)B(p+1) + B(p)C_2^2(p+1) &= 0, \\ C_1^2(p)C_1^1(p+1) + C_2^2(p)C_1^2(p+1) &= 0, \\ C_1^2(p)B(p+1) + C_2^2(p)C_2^2(p+1) &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Второе из этих равенств представим в трех различных видах:

$$
\begin{aligned}
B^{-1}(p)C_1^1(p) &= -C_2^2(p+1)B^{-1}(p+1),\\
C_1^1(p) &= -B(p)C_2^2(p+1)B^{-1}(p+1),\\
C_2^2(p+1) &= -B^{-1}(p)C_1^1(p)B(p+1).
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Из четвертого равенства (5.1) следует

$$
C_1^2(p) = -C_2^2(p)C_2^2(p+1)B^{-1}(p+1).
$$

Используя первое равенство из (5.2), получаем

$$
C_1^2(p) = C_2^2(p)B^{-1}(p)C_1^1(p). \tag{5.3}
$$

Это равенство выражает необходимое и достаточное условие того, что ранг $C(p) =$ ранг $B(p) = r_p$ ([11], с. 61–62).

Первое и третье равенства в (5.1) являются следствиями полученных (5.2) и (5.3), которые, стало быть, исчерпывают содержание рассматриваемого тождества. Первое из них, (5.2), устанавливает остаточную связь между смежными матрицами инцидентностей, второе, (5.3), дает искомое выражение левого нижнего блока через остальные.

Таким образом, тождества $\partial \circ \partial = 0 \sim C(p)C(p+1) = 0$ в блочном представлении матриц инцидентностей (4.2) с обозначением $B(p) \equiv C_2^1(p)$ равносильны системе равенств, которую можно записать либо в виде

$$
\begin{cases}
C_1^2(p) = C_2^2(p)B^{-1}(p)C_1^1(p),\\
C_2^2(p) = -B^{-1}(p-1)C_1^1(p-1)B(p),
\end{cases}
\tag{5.4}
$$

либо

$$
\begin{cases}
C_1^1(p) = -B(p)C_2^2(p+1)B^{-1}(p+1),\\
C_1^2(p) = C_2^2(p)B^{-1}(p)C_1^1(p),
\end{cases}
\tag{5.5}
$$

которые устанавливают явную зависимость либо первых r_{p+1} столбцов матрицы $C(p)$ через последние r_p столбцов, входящих в $B(p)$, либо последних r_{p-1} ее строк через первые r_p строк. Это утверждение относится ко всей последовательности матриц $C(p)$, рассматриваемой либо в порядке возрастания значений p, либо в порядке их убывания. А так как крайние матрицы $C(0)$ и $C(n+1)$ известны, то получаем

Предложение 3. *В последовательности матриц инцидентностей*

$$
\{C(p) \mid p = 0, 1, \ldots, n, n+1\}
$$

каждая матрица инцидентностей однозначно определяется заданием либо первых r_p ее строк, либо последних r_p столбцов. Остальные определяются через них по формулам (5.4) *или* (5.5).

Вместо первых или последних строк или столбцов можно выбрать такое же количество произвольных строк или столбцов — начальная нумерация p-элементов может быть установлена произвольно; нумерация определяется алгоритмом построения $\mathbb{K}_n$.

Далее при обращении ∂- и δ-дифференцирований понадобятся выражения для псевдообратных матриц от матриц инцидентностей. Явное выражение для псевдообратной матрицы можно найти, если известно скелетное разложение исходной матрицы ([11], сс. 193, 196–197; [12], сс. 32, 63–64). Скелетное разложение для матриц инцидентностей с разбиением на блоки размера 2×2 по формуле (4.2) можно представить в виде (используется равенство (5.3))

$$
C(p) = \begin{pmatrix} C_1^1 & B \\ C_1^2 & C_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ C_2^2 \end{pmatrix}(B^{-1}C_1^1 \mid 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ C_1^2 B^{-1} \end{pmatrix}(C_1^1 B). \tag{5.6}
$$

Используя любое из этих двух скелетных разложений, можно выписать явные выражения для псевдообратной матрицы от $C(p)$ по формулам, приведенным в [11] или [12].

6. Обращение ∂-операторов

Определение 2. ∂-уравнениями в комплексе $C(\mathbb{D}_n)$ будем называть уравнения вида

$$\partial v = f, \tag{6.1}$$

где f — заданное (ко)векторное поле, v — искомый (ко)вектор.

Исследуем условия совместности (разрешимости) таких уравнений, построение общего решения (обращение оператора ∂), произвол в общем решении.

Из тождеств $\partial \circ \partial$ следует необходимое условие совместности вида $\partial f = 0$ и наличие произвола в решении $v \to v' = v + \partial u$, где u — произвольный (ко)вектор соответствующей размерности.

Более точно, уравнения (6.1) распадаются на два типа:

1) в комплексе $C(\mathbb{K}_n)$

$$\overset{p}{\partial}\overset{p-1}{f} \quad \text{с условиями} \quad \overset{p-1}{\partial}\overset{p-1}{f} = 0, \quad \overset{p}{v} \to \overset{p}{v}' = \overset{p}{v} + \overset{p+1}{\partial}\overset{p+1}{u}, \tag{6.2}$$

2) в комплексе $C^*(\mathbb{K}_n)$

$$\underset{p}{\partial}\underset{p}{w} = \underset{p+1}{f} \quad \text{с условиями} \quad \underset{p+1}{\partial}\underset{p+1}{f} = 0, \quad \underset{p}{w} \to \underset{p}{w}' = \underset{p}{w} + \underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{u}. \tag{6.3}$$

В координатах уравнения (6.2), (6.3) запишутся соответственно как уравнения

1)

$$\underset{\alpha_{p-1}\times\alpha_p}{C(p)}\underset{\alpha_p\times 1}{\overset{p}{V}} = \underset{\alpha_{p-1}\times 1}{\overset{p-1}{F}}, \quad \operatorname{ранг} C(p) = r_p, \tag{6.4}$$

2)

$$\underset{p}{\overset{1\times\alpha_p}{W}}\overset{\alpha_p\times\alpha_{p+1}}{C(p+1)} = \underset{p}{\overset{1\times\alpha_{p+1}}{F}}, \quad \operatorname{ранг} C(p+1) = r_{p+1}. \tag{6.5}$$

Таким образом, имеем дело с системами линейных уравнений, параметры которых даны в записях размерностей входящих в них матриц. Особенности систем уравнений (6.4) и (6.5) обуславливаются спецификой матриц инцидентностей.

Сопоставим рассматриваемые системы уравнений с обычными системами линейных уравнений $Ax = b$, где матрицу A будем рассматривать как матрицу соответствующего линейного отображения $\mathcal{A}$. Согласно третьей теореме Фредгольма необходимое и достаточное условие совместности этой системы может быть представлено в виде условия $b \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \perp \operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$. Произвол в общем решении, задаваемый как общее решение соответствующей однородной системы, может быть представлен как вектор, принадлежащий $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Если известна псевдообратная к A матрица A^+, то в случае совместности общее решение может быть записано в виде ([10], с. 199)

$$x = A^+ b + (1 - A^+ A)C. \tag{6.6}$$

Отсутствие (ко)гомологий упрощает исследование изучаемых ∂-уравнений.

Предложение 4. *Для уравнения $\partial v = f$ условие $\partial f = 0$ является необходимым и достаточным условием совместности. Произвол в общем решении определяется преобразованием калибровки $v \to v' = v + \partial u$, где u — произвольный (ко)вектор соответствующей размерности.*

Доказательство основано на применении теоремы Фредгольма о совместности системы линейных уравнений ([10], с. 56; [11], с. 12). Для уравнения $\overset{p}{\partial}\overset{p}{v} = \overset{p-1}{f}$ из тождества $\partial \circ \partial = 0$ имеем необходимое условие совместности $\overset{p-1}{\partial}\overset{p-1}{f} = 0$. Это означает, что $\overset{p-1}{f} \in \operatorname{Ker} \overset{p-1}{\partial} = B^{p-1}$. Поскольку $(\overset{p}{\partial})^* = \underset{p-1}{\partial}$, то сопряженным однородным уравнением для рассматриваемого уравнения будет $\underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{w} = 0$, следовательно, $\underset{p-1}{w} \in \operatorname{Ker} \underset{p-1}{\partial} = B_{p-1}$. Из условия ортогональности (3.6) следует, что для всякого решения $\underset{p-1}{w}$ сопряженного уравнения имеем $\underset{p-1}{w} \perp \overset{p-1}{f}$, т. е. $\left\langle \underset{p-1}{w}, \overset{p-1}{f} \right\rangle = 0$. Согласно третьей теореме Фредгольма это означает, что условие $\partial f = 0$ является и достаточным. Из доказательства выводим и указанный произвол в общем решении $\overset{p}{v} \to \overset{p}{v}' = \overset{p}{v} + \overset{p+1}{\partial}\overset{p+1}{u}$.

Аналогично доказывается , что условие $\underset{p+1}{\partial}\underset{p+1}{f} = 0$ для уравнения $\underset{p}{\partial}\underset{p}{w} = \underset{p+1}{f}$ является также и достаточным условием совместности и произвол в общем решении определяется как $\underset{p}{w} \to \underset{p}{w}' = \underset{p}{w} + \underset{p-1}{\partial}\underset{p-1}{u}$.

Из сказанного ясно, что желательно строить решения ∂-уравнений в КСБ, в которой явно выделены и описаны подпространства B и X, а матрицы инцидентностей имеют простейший вид (3.4). По найденному решению в КСБ можно получить решение и в ИСБ по соответствующим формулам преобразований координат (ко)векторов. Для записи этих формул произведем соответствующие разбиения на блоки в матричных записях координат (ко)векторов в ИСБ и КСБ согласно разбиениям базисных элементов по формулам (3.2) и (4.1)

$$\begin{aligned} &\overset{p}{v} = \overset{p}{e}\overset{p}{V} = \overset{p}{e}{}^1\overset{p}{V}_1 + \overset{p}{e}{}^2\overset{p}{V}_2 = \overset{p}{e}_{st}\overset{p}{V}_{st} = \overset{p}{b}\overset{p}{V}_b + \overset{p}{x}\overset{p}{V}_x, \\ &\underset{p}{w} = \underset{p}{W}\underset{p}{e} = \underset{p}{W}{}^1\underset{p}{e}_1 + \underset{p}{W}{}^2\underset{p}{e}_2 = \underset{p}{W}_{st}\underset{p}{e}_{st} = \underset{p}{W}{}^x\underset{p}{x} + \underset{p}{W}{}^b\underset{p}{b}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Формулы преобразований координат (ко)векторов

$$\overset{p}{V} = P(p)\overset{p}{V}_{st}, \quad \underset{p}{W} = \underset{p}{W}_{st}Q(p)$$

запишем в развернутом виде

$$\begin{aligned} &\overset{p}{V}_b = B^{-1}(p+1)\overset{p}{V}_1, \quad \underset{p}{W}{}^x = \underset{p}{W}{}^1 - \underset{p}{W}{}^2 B^{-1}(p)C_1^1(p), \\ &\overset{p}{V}_x = -C_2^2(p+1)B^{-1}(p+1)\overset{p}{V}_1 + \overset{p}{V}_2, \quad \underset{p}{W}{}^b = \underset{p}{W}{}^2 B^{-1}(p). \end{aligned} \tag{6.8}$$

Построим общее решение уравнения (6.2) в КСБ

$$\overset{p}{\partial}\overset{p}{v} = \overset{p-1}{f} \sim C_{st}(p)\overset{p}{V}_{st} = \overset{p-1}{F}_{st} \tag{6.9}$$

с условием $\overset{p-1}{\partial}\overset{p-1}{F}_{st} = 0 \sim \overset{p-1}{F}_{st} \in B^{p-1} \Longrightarrow \overset{p-1}{F}_x = 0$ и с произволом

$$\overset{p}{V}_{st} \to \overset{p}{V}'_{st} = \overset{p}{V}_{st} - \overset{p+1}{\partial}\overset{p+1}{U}_{st}. \tag{6.10}$$

Из формул (3.4), (4.7), (4.8), (6.8) и (6.9) получаем общее решение

$$\overset{p}{V}{}_x^{(r_p)} = \overset{p-1}{F}{}_b^{(r_p)}, \quad \overset{p}{V}{}_b^{(r_{p+1})} = \overset{p}{C}{}_b^{(r_{p+1})}.$$

С учетом произвола (6.10) общее решение запишется в виде

$$\overset{p}{V}_x = \overset{p-1}{F}{}_b^{(r_p)}, \quad \overset{p}{V}{}_b^{(r_{p+1})} = \overset{p+1}{U}{}_x^{(r_{p+1})} + \overset{p}{C}{}_b^{(r_{p+1})} \equiv \overset{p}{C}'{}_b^{(r_{p+1})}. \tag{6.11}$$

Итак, решение уравнения (6.9) определяется заданием внешнего поля $\overset{p-1}{f}$ в подпространстве B^{-1}, содержит произвол $\overset{p}{C}{}'^{(r_{p+1})}_{b}$ из $r_{p+1} = \alpha_p - r_p$ постоянных. Этот произвол исключается заданием начальных значений $\overset{p}{V}_b$ либо в подпространстве B^p (тем самым определяется $\overset{p}{C}{}'_b$), либо, как видно из структуры решения (6.11), начальные условия можно задать и в X^{p+1} или распределить их, смотря по обстоятельствам, по X^{p+1} и B^p. Решение (6.11) можно представить в матричной записи

$$\overset{p}{V} = C^+_{st}(p)\overset{p-1}{F}_{st} + [1 - C^+_{st}(p)C_{st}(p)]^p\overset{p}{C}_{st}, \tag{6.12}$$

где матрица

$$C^+_{st}(p) = \begin{pmatrix} 0_{r_{p+1}\times r_p} & 0_{r_{p+1}\times r_{p-1}} \\ 1_{r_p\times r_p} & 0_{r_p\times r_{p-1}} \end{pmatrix}$$

является псевдообратной матрицей для матрицы $C_{st}(p)$.

И, наконец, вводя расширенные матрицы

$$M(p) = (C^+_{st}(p) \mid 1 - C^+_{st}(p)C_{st}(p)), \quad \overset{p}{E} = \begin{pmatrix} \overset{p-1}{F}_{st} \\ \overset{p}{C}_{st} \end{pmatrix},$$

решение запишем в виде

$$\overset{p}{V}_{st} = M(p)\overset{p}{E}, \tag{6.13}$$

где матрицу $M(p)$ можно рассматривать как матрицу обращения оператора $\overset{p}{\partial}$.

Аналогично строится общее решение и для уравнения $\underset{p}{\partial}\underset{p}{w} = \underset{p+1}{f}$. Опуская промежуточные записи, приведем окончательный результат: решение этого уравнения в КСБ запишется в виде

$$\underset{p}{W}{}^{x}_{(r_{p+1})} = \underset{p+1}{F}{}^{b}_{(r_{p+1})}, \quad \underset{p}{W}{}^{b}_{(r_p)} = \underset{p-1}{U}{}^{x}_{(r_p)} + \underset{p}{C}{}^{b}_{(r_p)} \equiv \underset{p}{C}{}'^{b}_{(r_p)}$$

или

$$\underset{p}{W}_{st} = \underset{p+1}{F}_{st}C^+_{st}(p+1) + \underset{p}{C}_{st}[1 - C^+_{st}(p+1)C_{st}(p+1)]. \tag{6.14}$$

Введем расширенные матрицы

$$N(p+1) = \begin{pmatrix} C^+_{st}(p+1) \\ 1 - C^+_{st}(p+1)C_{st}(p+1) \end{pmatrix}, \qquad \underset{p}{E} = (\underset{p+1}{F}_{st}\ \underset{p}{C}_{st}).$$

Тогда

$$\underset{p}{W}_{st} = \underset{p}{E}N(p+1),$$

где $N(p+1)$ — матрица обращения оператора $\underset{p}{\partial}$.

Построенные общие решения ∂-уравнений можно записать в исходной системе базисов $\{\overset{p}{e}, \underset{p}{e}\}_{n+3}$, заменяя координаты (ко)векторов в КСБ их координатами в ИСБ по формулам преобразований (6.8). Поскольку известны явные выражения (5.4) для скелетного разложения матриц $C(p)$ в ИСБ и, следовательно, явным образом можно записать псевдообратные матрицы $C^+(p)$, то можно было бы в самом начале записать явные решения ∂-уравнений в ИСБ в форме (6.12) или (6.14) (см. формулу (6.6)) без значков "st". Но при этом необходимо дополнительно к этим решениям присоединять условия совместности вида $f \in B$. Но т. к. подпространства B в ИСБ явно не выделены, пришлось бы задавать это условие дополнительным уравнением. Возникли бы также затруднения с заданием начальных условий.

Исследование ∂-, δ- и Δ-уравнений будет продолжено в следующей публикации.

Литература

1. Якупов М.Ш. *Дифференцирование и кодифференцирование в дискретном пространстве с объемным фундаментальным элементом* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 4. – С.59–78.
2. Зубов В.П. *Развитие атомистических представлений до начала* XIX *века.* – М.: Наука, 1966. – 370 с.
3. Вяльцев А.Н. *Дискретное пространство-время.* – М.: Наука, 1965. – 398 с.
4. Ахундов М.Д. *Проблема прерывности и непрерывности пространства и времени.* – М.: Наука, 1974. – 253 с.
5. Зейферт Г., Трельфалль В. *Топология.* – М.–Л.: ГОНТИ, 1938. – 400 с.
6. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия. Методы теории гомологий.* – М.: Наука, 1984. – 343 с.
7. Стинрод Н., Эйленберг С. *Основания алгебраической топологии.* – М.: ГИФМЛ, 1958. – 402 с.
8. Лефшец С. *Алгебраическая топология.* – М.: Ин. Лит., 1949. – 503 с.
9. Масси У. *Теория гомологий и когомологий.* – М.: Мир, 1981. – 387 с.
10. Глазман И.М., Любич Ю.И. *Конечномерный линейный анализ.* – М.: Наука, 1969. – 475 с.
11. Беклемишев Д.В. *Дополнительные главы линейной алгебры.* – М.: Наука, 1983. – 335 с.
12. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1966. – 576 с.

Казанский государственный университет

Поступила
16.02.1995