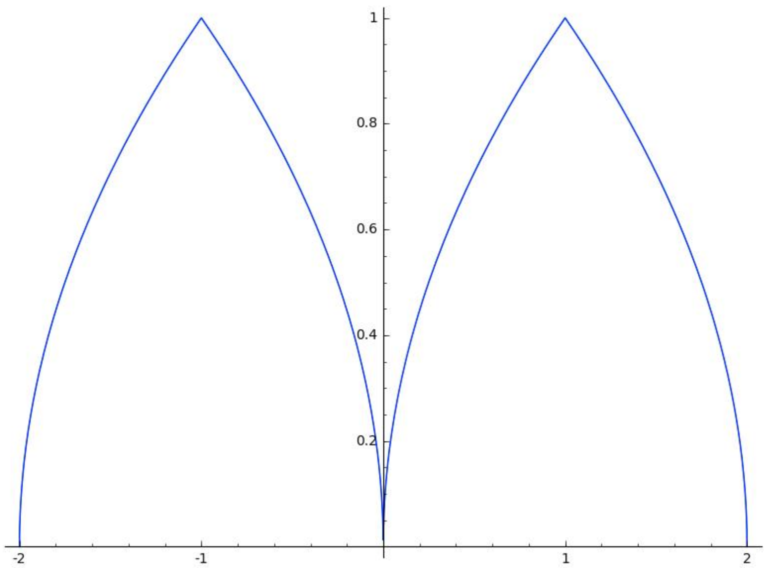
Межрегиональная предметная олимпиада
Казанского федерального университета
по предмету "Математика"
Очный тур
2016-2017 учебный год
9 класс

1. Постройте график функции $f(x)=\sqrt{1-|\sqrt{x^2}-1|}$.

Решение:
Функцию можно переписать в виде

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x}, & 1<x\le 2,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 1,\\ \sqrt{-x}, & -1<x\le 0,\\ \sqrt{x-2}, & -2\le x\le -1.\end{cases}$$

ОДЗ: $-2\le x\le 2$



2. Докажите, что $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2017}$ можно представить в виде $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, где a,b такие целые числа, что $3\mathrm{a}^2-2\mathrm{b}^2=1$.

Решение: Докажем методом математической индукции, что для любого натурального $n(\in\mathbb{N})$ $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n-1}=a_n\sqrt{3}-b_n\sqrt{2}$, где $a_n,b_n\in\ \mathbb{N}$. Для $n=1$ равенство выполняется с коэффициентами $a_1=b_1=1$.
Предположим теперь, что утверждение верно для некоторого фиксированного n докажем, что из равенства для n следует равенство для $n+1$.

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n+1}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2n-1}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2}=$$

$$= (a_n\sqrt{3} - b_n\sqrt{2})(3 + 2 - 2\sqrt{6}) = (5a_n + 4b_n)\sqrt{3} - (5b_n + 6a_n)\sqrt{2}.$$

Обратим вниманием, что мы получили рекурентные соотношения
$a_{n+1} = 5a_n + 4b_n, b_{n+1} = 5b_n + 6a_n$,
причем $a_1 = b_1 = 1$.

Аналогично доказывается, что $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{2n+1} = a_n\sqrt{3} + b_n\sqrt{2}$ с теми же коэффициентами a_n, b_n.

Из равенств

$$\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{2017} = a_{1009}\sqrt{3} - b_{1009}\sqrt{2}, \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{2017} = a_{1009}\sqrt{3} + b_{1009}\sqrt{2},$$

перемножая левые и правые части, получаем

$$1 = 1^{2017} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{2017}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{2017} =$$
$$= (a_{1009}\sqrt{3} - b_{1009}\sqrt{2})(a_{1009}\sqrt{3} + b_{1009}\sqrt{2}) = 3a_{1009}^2 - 2b_{1009}^2.$$

3. Триангуляцией многоугольника называется разбиением многоугольника на треугольники таким образом, чтобы вершины треугольников совпадали с вершинами многогранника. Сколько существует способов триангулировать выпуклый семиугольник?

Решение: Обозначим E_n число вариантов триангуляций выпуклого n-угольника. Очевидно, что для треугольника существует единственная триангуляция,
поэтому $E_3 = 1$, а для четырехугольника существует ровно две $E_4 = 2$.

В произвольном n-угольнике выделим одну из сторон.
Обратим вниманание, что выделенная сторона n-угольника обязательно содержится в одном из треугольников триангуляции в качестве стороны, поскольку
с одной стороны не может оказаться внутри треугольника, который содержится в многоугольнике, а с другой стороны не может не содержаться в треугольниках
триангуляции, иначе не весь многоугольник будет разбит на части.

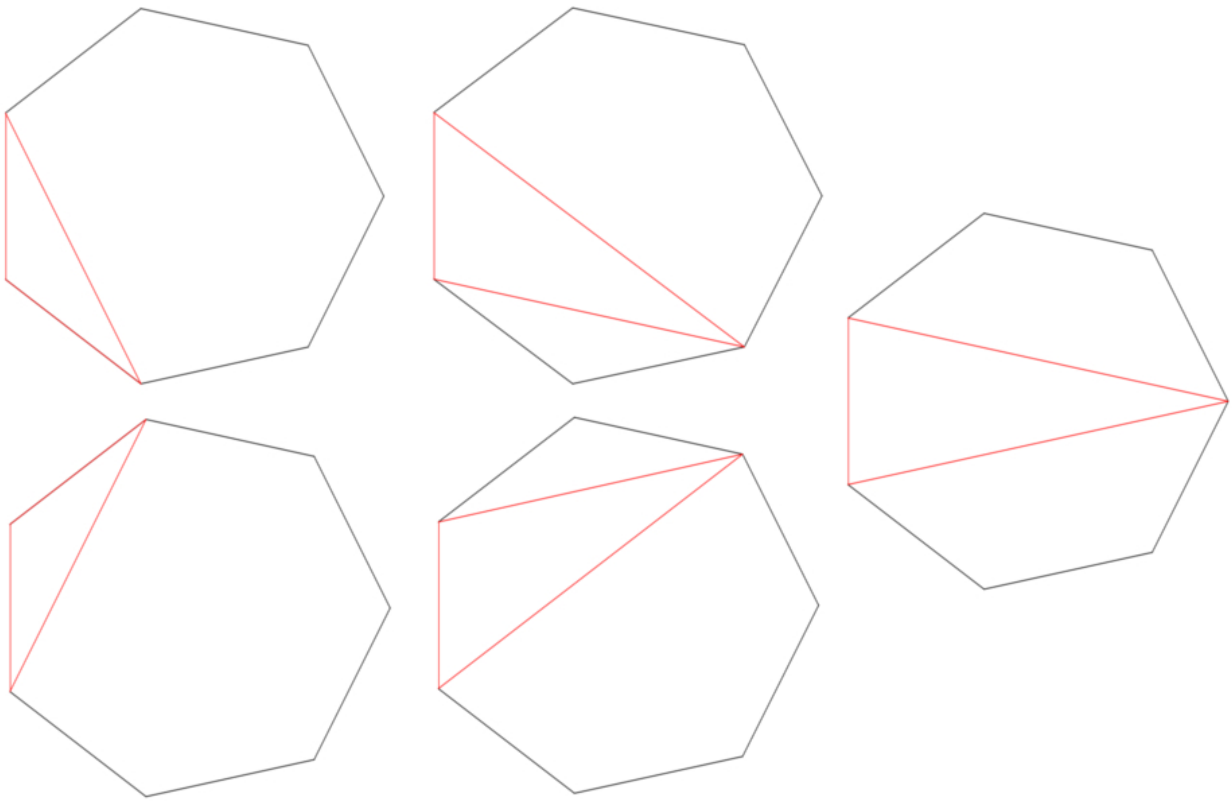


Иллюстрация. Семиугольник, в котором выделена одна из сторон и все возможные треугольники триангуляции ее содержащие.

Рассмотрим все треугольники триангуляции, содержащие выделенную сторону. Оказывается, что с одной стороны от любого из таких треугольников

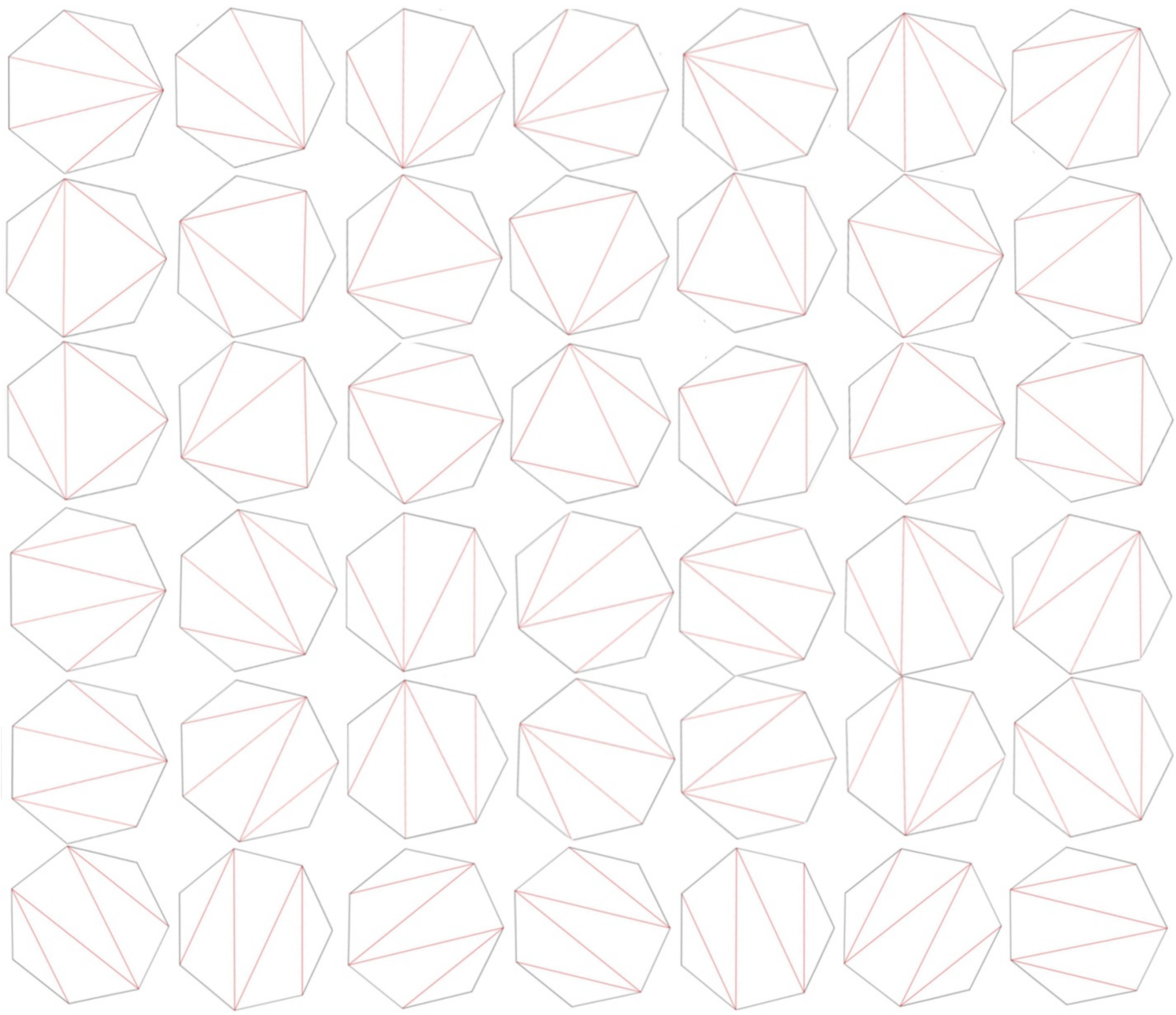
лежит k-угольник (где k<n, включая вырожденный случай двуугольника) и n-k+1-угольник. Эти многоугольники меньшего порядка также можно триангулировать и количество триангуляций с выделенным треугольником равна произведению $E_k\,E_{n-k+1}$, считая, что $E_2 = 1$.

Обратим вниманием, что получающиеся в результате таких операций триангуляции n-угольника всегда различны между собой, поскольку для различных выделенных треугольников триангуляции не могут совпадать.

В таком случае для пятиугольника $E_5 = E_2E_4 + E_3E_3 + E_4E_2 = 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5$,
для шестиугольника $E_6 = E_2E_5 + E_3E_4 + E_4E_3 + E_5E_2 = 1\cdot 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 = 14$
и для семиугольника

$$E_7 = E_2E_6 + E_3E_5 + E_4E_4 + E_5E_3 + E_6E_2 = 1\cdot 14 + 1\cdot 5 + 2\cdot 2 + 5\cdot 1 + 14\cdot 1 = 42.$$

Перечислим ниже их все:



Следует обратить внимание, что с точностью до поворота существует шесть способов триангуляции, описанные в левом столбце рисунка, а с точностью до поворота и отражения существует ровно четыре способа триангуляции.

4. В нулевой момент времени n муравьев помещено на узкую ветку длиной 50 см и каждый муравей начинает движение в случайном направлении вдоль этой ветки. Встречаясь при движении, два муравья моментально разворачиваются и продолжают движение в обратном направлении. Подходя к краю ветки, муравей ее покидает. Какое максимальное расстояние может пройти муравей, помещенный на эту ветку до тех пор пока ее не покинет?

Решение: Если предположить, что муравьи могут двигаться с разными скоростями, то в случае, если на расстоянии ε от концов ветки расположить двух муравьев движущихся в сторону ближайших концов ветки со скоростью δ и ещё одного муравья движущегося со скоростью v с одной из этих позиций в сторону центра ветки, то муравей, находящийя в середине должен будет пройти путь $\frac{\varepsilon}{\delta}v$ прежде чем хотя бы один из концов станет ему доступен.

Если скорости муравьев могут быть произвольными, то предполагая, что $v = n\delta$, где $n \in \mathbb{N}$, мы получаем, что муравей находящийся в середине пройдет по меньшей мере путь размером в $n\varepsilon$. Поскольку n произволен, то произведение $n\varepsilon$ может быть неограниченно большим.

Сделаем теперь естественное предположение, что муравьи движутся с одинаковой скоростью v и каждый муравей держит эстафетную палочку, а при встрече муравьи прежде чем развернуться обмениваются эстафетными палочками.

Эстафетные палочки не меняют направление движения, а учитывая, что обмен палочками и разворот муравьев происходит моментально, то они движутся с постоянной скоростью v, равной скорости муравьев, вдоль ветки. Таким образом, максимальное время, за которое все эстафетные палочки гарантированно покинут ветку оказывается равным $T = \frac{50}{v}$см. Поскольку в каждый момент времени у одного муравья находится эстафетная палочка, то эстафетные палочки покинут ветку тогда и только тогда, когда все муравьи покинут ветку. Таким образом максимальное время, которое муравей может провести на ветке не больше, чем T.

Если в начальный момент времени на одном из концов ветки муравей с эстафетной палочкой начинает движение к середине ветки, то его эстафетная палочка будет находиться на ветке ровно $T = \frac{50}{v}$см времени, поэтому $T = \frac{50}{v}$см – максимальное время, которое эстафетные палочки могут находиться на ветке. В то же время, муравей, который удалит последнюю эстафетную палочку с ветки, сам будет последним муравьем, который сойдет с этой ветки. Поскольку он находился весь промежуток времени $[0,T]$ на ветке и двигался в разные стороны со скоростью v, то за это время он пройдет ровно $v \cdot T = 50$см.