ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 6 (469)

УДК 517.929

М.А. СОЛДАТОВ, Т.М. МИТРЯКОВА, В.А. ИЛЬИЧЕВ

ОТЫСКАНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВЫРОЖДЕННОМ СЛУЧАЕ

1. В статье исследуется вопрос о частных аналитических решениях линейных неоднородных дифференциально-разностных уравнений с линейными коэффициентами

$$L[y(x)] \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}(a_{ik}x+b_{ik})y^{(i)}(x+h_k)=F(x), \tag{1}$$

где x — комплексное переменное, $x\in\mathbf{C}$, а разности h_k — вещественные числа, причем

$$h_0<h_1<\dots<h_m. \tag{2}$$

Этот вопрос важен уже потому, что знание частного решения позволяет свести изучение решений такого уравнения к изучению решений соответствующего однородного уравнения

$$L[z(x)]=0. \tag{3}$$

В [1] установлено, что если $F(x)$ — целая функция, то уравнение (1) всегда имеет решение, аналитическое в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re}x>\gamma_1$ (в левой полуплоскости $\operatorname{Re}x<\gamma_2$), однако при этом существенно использовалось условие

$$a_{n0}a_{nm}\neq 0. \tag{4}$$

В противоположность ему случай $a_{n0}a_{nm}=0$ условно называем вырожденным. Вопрос о существовании частных решений при этом условии остался невыясненным — здесь это делается при некоторых специальных ограничениях на коэффиценты a_{ik}, b_{ik} и только в случае, когда $F(x)$ есть целая функция экспоненциального типа (э. т.), т. е. функция из класса $E[1,\infty)$. (Через $E[1,\sigma]$, $E[1,\infty)$, $E\{1,\sigma\}$, $E\{1,\infty\}$ обозначаем классы целых функций э. т. $\le\sigma$, любого э. т., точно порядка 1 и типа σ или ∞.)

Для разностного уравнения (1) при $n=0$ изучаемый вопрос полностью выяснен в ([2], гл. 3). При $n\ge 1$ получение соответствующих вспомогательных оценок значительно усложняется.

2. Пусть функция $F(x)$ представляется интегралом Лапласа

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_S \phi(t)e^{xt}\mathrm{d}t, \tag{5}$$

где S — некоторый контур интегрирования (возможно бесконечный) и функция $\phi(t)$ аналитична вдоль него. Будем искать решения уравнения (1) в форме такого же интеграла

$$y(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_S \gamma(t)e^{xt}\mathrm{d}t, \tag{6}$$

где новую искомую функцию $\gamma(t)$ считаем аналитической вдоль S. Подставляя (6) и (5) в уравнение (1), после очевидных преобразований (см. [3], [2]) придем к требованию

$$\int_S \Big(T[\gamma(t)] + \phi(t)\Big) e^{xt} \mathrm{d}t = A(t)\gamma(t)e^{xt}|_S, \tag{7}$$

где

$$T[\gamma(t)] = A(t)\gamma'(t) + \big(A'(t) - B(t)\big)\gamma(t),$$
$$A(t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} a_{ik}t^i e^{h_k t}, \quad B(t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} b_{ik}t^i e^{h_k t}.$$

$A(t)$ и $B(t)$ называем определяющими функциями (первой и второй) уравнения (1); $A(t)$ называется обычно характеристической функцией.

Будем обозначать также

$$\gamma_0(t) = \frac{1}{A(t)\eta(t)}, \quad \eta(t) = \exp\left\{ -\int_{t_0}^{t} \frac{B(p)}{A(p)} \mathrm{d}p \right\} \tag{8}$$

— решения дифференциальных уравнений

$$T[\gamma_0(t)] = 0, \quad A(t)\eta'(t) + B(t)\eta(t) = 0.$$

Здесь $l[t_0, t]$ (так обозначаем какой-либо простой путь, соединяющий точки t_0 и t) и все рассматриваемые в дальнейшем пути интегрирования не должны, вообще говоря, проходить через нули функции $A(t)$ — только эти нули могут быть особыми точками функций (8).

Как и в [3], [2], устанавливается

Теорема 1. *Пусть S — конечный замкнутый контур и на нем нет нулей функции $A(t)$. Тогда для того чтобы функция* (6) *была решением уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы функция $\gamma(t)$ была однозначным на S решением дифференциального уравнения*

$$T[\gamma(t)] = v_1(t) - \phi(t), \tag{9}$$

в котором $v_1(t)$ — какая-либо функция, регулярная на и внутри S.

Общее решение уравнения (9) есть

$$\gamma(t) = \gamma_0(t)\Big\{E + \int_c^t (v_1(q) - \phi(q))\eta(q)\mathrm{d}q\Big\}, \quad E = \mathrm{const}\,.$$

Пусть K — выпуклый компакт открытой плоскости $\mathbf{C}$ (в частности — одна точка). Через Б(K) будем обозначать класс целых функций э. т., сопряженная диаграмма которых лежит в K. Через $S(c)$ обозначаем замкнутый контур с началом и концом в точке c, охватывающий компакт K и такой, что в $\overline{J}(S(c))\backslash K$ нет нулей функции $A(t)$, и считаем, что $\phi(t)$ в (5) есть функция, ассоциированная по Борелю с $F(x) \in$ Б(K), все ее особые точки лежат в K. ($J(S) \equiv \operatorname{int} S$ — внутренность контура S, $\overline{J}(S) = J(S) \bigcup S$ и, как обычно, $H(M)$ означает класс функций, голоморфных на множестве M.)

Теорема 2 ([2]). 1. *Если $\eta(t) \notin H(K)$, то уравнение* (1) *имеет решение из класса* Б(K) *для всякой правой части $F(x) \in$* Б(K).

2. *Если $\eta(t) \in H(K)$, то для существования решения $y(x) \in$* Б(K) *необходимо и достаточно условия*

$$K_1 \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{S(c)} \phi(t)\eta(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{10}$$

Эта теорема справедлива и при комплексных h_k и для соответственных дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Для случая $K = \{t : |t| \le \sigma\}$ другими методами ее установили Хильб, Перрон, Шеффер, Хапланов (см. [2], с. 61).

Пусть $F(x) \in \text{Б}(K)$, $\eta(t) \in H(K)$, и возьмем точку $\alpha \in K$ — она будет корнем $\eta(t)$ кратности $s = -\text{res}\,(B(t)/A(t);\alpha)$, $s \ge 0$. Тогда для уравнения

$$L[w(x)] = F(x) - \varkappa x^s e^{\alpha x}, \quad \varkappa = K_1/\eta^{(s)}(\alpha),$$

выполняется условие вида (10), поэтому оно имеет решение $w(x) \in \text{Б}(K)$. При этом заменой $y(x) = w(x) + u(x)$ уравнение (1) приводится к виду

$$L[u(x)] = \varkappa x^s e^{\alpha x}. \tag{11}$$

Таким образом, отыскание частных решений уравнения (1) сводится к отысканию решений уравнения (11). Однако ход доказательства теоремы 2 не дает эффективного способа нахождения решений, поэтому будем рассматривать непосредственно исходное уравнение (1) и дадим более конструктивный метод построения частных решений, причем в обоих случаях: когда $\eta(t)$ регулярна и когда нерегулярна на компакте K.

Отметим, что для случая произвольных целых функций $F(x)$ (без ограничения на рост) аналогичная теореме 2 теорема о нормальной разрешимости уравнения (1) в классе $H(\mathbf{C})$, однако при обязательных условиях (2) и (4), установлена разными методами в [4] и [1]. При этом в [1] рассмотрены также решения типа Г (и типа Г*): так называем решения, регулярные в какой-либо правой полуплоскости $\text{Re}\,x > \gamma_1$ (левой полуплоскости $\text{Re}\,x < \gamma_2$), но не являющиеся целыми функциями.

3. Итак, пусть выполнены условия (2) и $F(x) \in \text{Б}(K)$. Если S — конечный замкнутый контур и решение $\gamma(t)$ уравнения (9) с $v_1(t) \in H(\overline{J}(S))$ является функцией, неоднозначной на S, то в силу теоремы 1 интеграл (6) не может определять решение уравнения (1). Однако, если за S взять бесконечную петлю с ветвями, параллельными действительной оси (т. е. если точку $c \in S = S(c)$ устремить в бесконечность), то интеграл (6) может дать решение. Пусть $L(c)$ — путь, который, начинаясь в точке c, удаляется в бесконечность по некоторому лучу $\{\text{Im}\,t = \omega,\ \text{Re}\,t \le a\}$ и не проходит через нули функции $A(t)$, а $L^-(c)$ — тот же путь, но проходимый в обратном направлении. Будем рассматривать петли $U(\omega, K) = L^-(c) + S(c) + L(c)$. Полагаем $x = x_1 + ix_2$, $t = t_1 + it_2$. Условия на коэффициенты

$$a_{n0} = \dots = a_{\nu+1,0} = 0, \quad a_{\nu 0} \ne 0; \quad b_{n0} = \dots = b_{\nu+1,0} = 0; \quad 0 \le \nu \le n, \tag{12}$$

выделены в [1] как необходимые условия существования решений типа Г у уравнения (1) с $F(x) \in H(\mathbf{C})$ (в [3] для уравнения (3) неточно указано условие $a_{n0} \ne 0$, т. к. должен быть частный случай (12) при $\nu = n$). Решения типа Г являются функциями, аналитическими во всей плоскости с разрезом по горизонтальному лучу $U_1 = (-\infty + i\,\text{Im}\,\alpha^*, \alpha^*]$, причем точка $\alpha^* = -b_{\nu 0}/a_{\nu 0} + h_0$ обязательно особая. Покажем, что в случае (12) при условии $\eta(t) \notin H(\mathbf{C})$ решения типа Г действительно существуют. Их найдем в виде (6), где S — некоторая бесконечная петля.

Сначала рассмотрим однородное уравнение (3). Пусть $\eta(t) \notin H(\alpha_0)$, причем ограничимся только случаем, когда α_0 — простой нуль функции $A(t)$. Будем полагать $\phi_1(t) = \gamma_0(t)$, когда функция $\gamma_0(t)$ (см. (8)) неоднозначна в окрестности точки α_0, или $\phi_1(t) = \gamma_0(t)\ln(t - \alpha_0)$, когда $\gamma_0(t) \in H(\alpha_0)$. Утверждаем, что функция

$$Z_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{U(0,\{\alpha_0\})} \phi_1(t) e^{xt} \mathrm{d}t \tag{13}$$

и даст решение типа Г уравнения (3). Для такой функции интеграл в (7) с $\gamma(t) = \phi_1(t)$ и $\phi(t) \equiv 0$ даст нуль, ибо $T[\phi_1(t)] \in H(\alpha_0)$. Проверим, что и правая часть обратится в нуль, и что интеграл (6) сходится в некоторой полуплоскости. Для этого оценим функцию $\gamma_0(t)$ при вещественных

$t \to -\infty$. Учитывая, что $\frac{B(t)}{A(t)} \to \frac{b_{\nu 0}}{a_{\nu 0}}$, выделим далее из бесконечно малой $\frac{B(t)}{A(t)} - \frac{b_{\nu 0}}{a_{\nu 0}}$ главную часть вида β/t, $\beta = \mathrm{const}$. Получим

$$\frac{B(t)}{A(t)} = \frac{b_{\nu 0}}{a_{\nu 0}} + \frac{\beta}{t} + \xi(t), \quad |\xi(t)| < \frac{B_1}{|t|^2}, \quad t \le c_1 < 0, \tag{14}$$

причем $\xi(t) = B_1(t)/A(t)$, где $B_1(t)$ — тоже квазиполином вида $B(t)$; $B_1 = \mathrm{const} > 0$. При этом учтено, что

$$A(t) = a_{\nu 0} t^{\nu} e^{h_0 t}(1 + \eta_1(t)), \quad \eta_1(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to -\infty. \tag{15}$$

Проинтегрировав равенство (14) по пути $l[t_0, t]$, найдем

$$\int_{t_0}^{t} \frac{B(p)}{A(p)} \mathrm{d}p = \frac{b_{\nu 0}}{a_{\nu 0}} t + \beta \ln t + A_1 + \xi_1(t), \quad \xi_1(t) = \int_{t_0}^{t} \xi(p) \mathrm{d}p,$$

$A_1 = \mathrm{const}$. К пути $l[t_0, t]$, где считаем $t \le c_1$, добавим двойной луч $(-\infty, t]$ (т. е. луч, проходимый дважды, в разных направлениях). Получим

$$\xi_1(t) = A_2 + \xi_2(t), \quad A_2 = \mathrm{const}, \quad \xi_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \xi(p) \mathrm{d}p,$$

$|\xi_2(t)| < B_2/|t|$, $t \le c_1 < 0$, $B_2 = \mathrm{const} > 0$. В результате для функции $\gamma_0(t)$ найдем асимптотику

$$\gamma_0(t) = A_3 t^{\beta - \nu}(1 + \eta_2(t)) \exp\left\{ \left(\frac{b_{\nu 0}}{a_{\nu 0}} - h_0 \right) t \right\}, \tag{16}$$

$\eta_2(t) \to 0$ при $t \to -\infty$, $A_3 = \mathrm{const} \ne 0$.

В силу (15) и (16) подстановка в правой части (7) с $S = U(0, \{\alpha_0\})$, $\gamma(t) = \phi_1(t)$ обращается в нуль, если $\mathrm{Re}\, x > \mathrm{Re}\, \alpha^* - h_0$, а интеграл (13) сходится при $\mathrm{Re}\, x > \mathrm{Re}\, \alpha^*$ и для функции $Z_1(x)$ точка $x = \alpha^*$ является особой, так что $Z_1(x)$ действительно является решением типа Г уравнения (3). Случай $\nu = n$ изучен в [3]. Отметим, что если $\gamma_0(t) \in H(\alpha_0)$, то интеграл (13) с точностью до постоянного множителя можно преобразовать в интеграл по простому пути $l[\alpha_0, -\infty]$ с началом в точке α_0 и уходящему в бесконечность по отрицательной части действительной оси (криволинейный луч), причем от функции $\phi_1(t) = \gamma_0(t)$.

Вернемся к неоднородному уравнению (1) с $F(x) \in$ Б(K). Далее будем обозначать решение уравнения (9) с $v_1(t) \equiv 0$ через $\gamma_1(t)$

$$\gamma_1(t) = -\gamma_0(t) \int_{c}^{t} \phi(q) \eta(q) \mathrm{d}q, \tag{17}$$

$T[\gamma_1(t)] = -\phi(t)$. Оценим его при вещественных $t \to -\infty$. При условии (12) $\forall t \le c_1$ будет $|B(t)/A(t)| \le q_1 = \mathrm{const}$, $q_1 \ge |b_{\nu 0}/a_{\nu 0}|$, поэтому

$$|\gamma_1(t)| \le M_1 |A(t)|^{-1} e^{2q_1|t|}(|t| + \chi); \quad M_1 \text{ и } \chi = \mathrm{const} > 0.$$

Тогда правая часть в (7) при $S = U(0, K)$ и $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ обратится в нуль, если $x_1 > 2q_1$, тождество (7) будет выполнено, и функция

$$\mathrm{Y}_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{U(0,K)} \gamma_1(t) e^{xt} \mathrm{d}t \tag{18}$$

в полуплоскости $x_1 > 2q_1$ определит решение уравнения (1), причем интеграл (18) сходится и определяет аналитическую функцию в полуплоскости $x_1 > 2q_1 + h_0$. В таком случае, как это следует из общих свойств решений уравнений (1) [1], существует постоянная $C = C_1$ такая, что для разности $Y_2(x) = Y_1(x) - CZ_1(x)$ точка $x = \alpha^*$ будет правильной и, следовательно, $Y_2(x)$ определит целое решение уравнения (1). Тогда при $C \ne C_1$ функции $Y_2(x)$ будут решениями типа Г.

4. Существование решений типа Г уравнений (3) и (1) было установлено при условии (12) лишь в случае $\eta \notin H(\mathbf{C})$. Покажем, что, независимо от последнего, решения типа Г всегда существуют при условиях

$$a_{im} = \cdots = a_{i,s+1} = 0 \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n, \quad a_{ns} = \cdots = a_{\lambda+1,s} = 0,$$
$$a_{\lambda s} \neq 0, \quad 0 \leq \lambda \leq n, \quad s < m; \tag{19}$$
$$b_{nm} = \cdots = b_{\mu+1,m} = 0, \quad b_{\mu m} \neq 0, \quad 0 \leq \mu \leq n.$$

Условия (19) при $\mu = n$ были выделены в [5] при построении для уравнения (3) решений типа Г (если $a_{n0} \neq 0$) и так называемых элементарных решений второго рода — они из класса $E\{1, \infty\}$.

Выделяя в два этапа из отношения $B(t)/A(t)$ главные части при $t_1 \to +\infty$, найдем

$$\frac{B(t)}{A(t)} = \frac{b_{\mu m}}{a_{\lambda s}} t^{\mu-\lambda} e^{(h_m - h_s)t} + \frac{q_2}{a_{\lambda s}} t^{\mu-\lambda-1} e^{(h_m - h_s)t} + \alpha_1(t),$$

где $q_2 = \mathrm{const}$, $\alpha_1(t) = O(t^{\mu-\lambda-2})e^{(h_m-h_s)t}$ при $t_1 \to +\infty$. Проинтегрировав это равенство по некоторому пути $l[t_0, t]$, причем первое слагаемое справа — по частям два раза, а второе — один раз, получим

$$\int_{t_0}^{t} \frac{B(p)}{A(p)} \mathrm{d}p = B t^{\mu-\lambda} e^{(h_m-h_s)t} + \alpha_2(t), \quad B = \frac{b_{\mu m}}{(h_m - h_s)a_{\lambda s}} \equiv |B| e^{i\theta},$$

причем функция $\alpha_2(t)$, как и ее производная $\alpha_2'(t)$, на лучах $T(\tau) = \{t_2 = \tau,\ b(\tau) \leq t_1 < +\infty\}$, τ и $b(\tau)$ — постоянные, при $t_1 \to +\infty$ ведет себя как $O(t^{\mu-\lambda-1} e^{(h_m-h_s)t})$. Обозначив

$$u(t_1, t_2) = \mathrm{Re} \int_{t_0}^{t} \frac{B(p)}{A(p)} \mathrm{d}p,$$

оценим функцию $\gamma_1(t)$

$$|\gamma_1(t)| \leq \frac{1}{|A(t)|} e^{u(t_1,t_2)} \int_{t_0}^{t} e^{-u(t_1,t_2)} |\phi(t)|\, |\mathrm{d}t|. \tag{20}$$

Разбив путь $l[t_0, t]$ на три части $l[t_0, \tau]$, $l[\tau, \tau + it_2]$, $[\tau + it_2, t_1 + it_2]$, получим

$$u(t_1, t_2) = |t|^{\mu-\lambda} e^{(h_m-h_s)t_1} (1 + \xi(t_1, t_2)) |B| \cos[\theta + (h_m - h_s)t_2 + (\mu - \lambda) \arg t] + \zeta(t_2),$$

где $\xi(t_1, t_2) \to 0$ при $t_1 \to +\infty$, $\forall \tau = t_2 = \mathrm{const}$, $|\zeta(t_2)| \leq q_3 |t_2|$, $q_3 = \mathrm{const}$.

Определим число τ из условия $\cos[\theta + (h_m - h_s)\tau + (\mu - \lambda) \arg t] < 0$. Так как $\arg t \to 0$ при $t_1 \to +\infty, \forall t_2 = \mathrm{const}$, то при достаточно большом $b(\tau)$ функция $(-u(t_1, t_2))$ достигает наибольшее значение в правом конце пути $l[t_0, t]$, $t \in T(\tau)$. Вынося это значение за знак интеграла в (20), учитывая ограниченность функции $\phi(t)$, получим

$$|\gamma_1(t)| \leq M_1 \frac{|t| + a}{|A(t)|}, \quad M_1 = \mathrm{const}, \quad a = \mathrm{const} > 0, \quad t \in T(\tau). \tag{21}$$

Для функции же $\gamma_0(t)$ из (8), где полагаем $t_0 = c$, на лучах $T(\tau)$ будет иметь место оценка

$$|\gamma_0(t)| \leq M e^{\mu_1 |t|} \exp\{-d|t|^{\mu-\lambda} e^{(h_m-h_s)t_1}\}, \quad t_1 \geq b(\tau), \tag{22}$$

где $\mu_1 > 0$, $d > 0$ — некоторые постоянные. Оценки (21) и (22) устанавливаются по той же схеме, как, например, в [1], [5], но технически несколько сложнее. Учитываем также асимптотику

$$A(t) = a_{\lambda s} t^{\lambda} e^{h_s t}(1 + o(1)), \quad t_1 \to +\infty.$$

Пусть H — петля, состоящая из замкнутого пути $S(c)$ и двойной кривой, начинающейся в точке c, бесконечная часть которой идет по лучу $T(\tau)$. Тогда интеграл

$$W_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_H \gamma_1(t)e^{xt}\mathrm{d}t \tag{23}$$

сходится во всяком случае в некоторой полуплоскости $x_1 < \rho_0$ и определяет решение уравнения (1). В силу выполнимости условий (19) всякое такое решение является целой функцией. Если кроме (19) выполнены и условия (12), то интеграл

$$Z_2(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \gamma_0(t)e^{xt}\mathrm{d}t, \tag{24}$$

где $L_1 = (-\infty, c_1] + l[c_1, \tau + ib(\tau)] + [\tau + ib(\tau), +\infty + ib(\tau)]$, определяет решение типа Г уравнения (3), и поэтому функции $W_2(x) = W_1(x) + C_2Z_2(x)$ с $C_2 = \mathrm{const} \neq 0$ определяют решения типа Г уравнения (1). (В (24) за путь L_1 можно брать и прямую $\operatorname{Im} t = \tau$, обходящую нули функции $A(t)$.) При тех же условиях (19) и (12) функции $Y_3(x) = Y_1(x) - CZ_2(x)$ при некотором значении $C = C_3$ определяют целые решения уравнения (1), а при $C \neq C_3$ — решения типа Г.

Пусть $\eta(t) \in H(\mathbf{C})$. В силу теоремы 2 решение (23) растет при $x \to \infty$ быстрее всякой целой функции э. т. Можно утверждать, что это будет функция первого порядка максимального типа (т. е. функция из класса $E\{1, \infty\}$). Для доказательства, заметив, что $\eta(t) \in H(K)$ для любых компактов K, разобьем путь H на три части: $H_1 = (+\infty + i\tau, b + i\tau)$ — верхняя часть петли H, $H_2 = H_1^-$ — нижняя часть и H_3 — остальная часть пути H; H_3 — это конечная петля, охватывающая K, с началом и концом в точке $t = \tau + ib(\tau)$. Значение выбранной непрерывной вдоль H ветви функции $\gamma_1(t)$ в точке $t \in H_2$ после обхода по H обозначим $\gamma_1^*(t)$. В силу однозначности функций $\eta(t)$ и $\gamma_0(t)$, из (17) найдем

$$\gamma_1^*(t) = \gamma_1(t) - 2\pi i K_1\gamma_0(t).$$

Тогда интеграл (23) перепишется в виде

$$W_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{H_3} \gamma_1(t)e^{xt}\mathrm{d}t - K_1\int_{H_2} \gamma_0(t)e^{xt}\mathrm{d}t. \tag{25}$$

Интеграл по конечной петле H_3 определяет целую функцию из класса $E[1, \sigma]$, где $\sigma = \max|t|$ $\forall t \in H_3$, а интеграл по лучу H_2 (его обозначим через $W_1^*(x)$) можем оценить, используя (22), по аналогии с [5]. В результате получим

$$|W_1^*(x)| \leq M\exp\{d|x| + qx_1\ln|x_1|\},$$

где $q = 1/(h_m - h_s)$, если $x_1 \geq 1$, или $q = 0$, если $x_1 \leq 1$. Отсюда и из теоремы 2 следует, что $W_1(x) \in E\{1, \infty\}$, если $K_1 \neq 0$.

Отметим, что при условии $\eta(t) \in H(K)$ для интеграла (18) также справедливо представление вида (25), в силу чего при $K_1 = 0$ будем иметь

$$Y_1(x) = W_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{S(c)} \gamma_1(t)e^{xt}\mathrm{d}t$$

— это будут целые функции из класса Б(K), что соответствует теореме 2.

5. Резюмируя сказанное в пп. 3–4, приходим к следующим результатам.

Теорема 3. *В случае* (12) *при выполнении либо* $\eta(t) \notin H(\mathbf{C})$, *либо* (19) *однородное уравнение* (3) *имеет решения типа* Г.

Теорема 4. *Пусть* $F(x) \in$ Б(K). *Тогда*

1. *при условии* (12) *уравнение* (1) *всегда имеет решение, регулярное в правой полуплоскости* $\operatorname{Re} x > \operatorname{Re}\alpha^*$, *причем в случае* $\eta(t) \notin H(\mathbf{C})$ *существуют как решения типа* Г, *так и целые решения*;

2. *при условии (19) уравнение (1) всегда имеет решение в виде целой функции, а при дополнительном условии (12) существуют и решения типа* Γ;
3. *при совместном выполнении условий* $\eta(t) \in H(\mathbf{C})$ *и (19) в случае* $K_1 \neq 0$ *целые решения уравнения (1) растут быстрее всякой функции из класса* $E[1,\infty)$ *и существуют решения из класса* $E\{1,\infty\}$.

Отметим, что при условии (19) уравнение (1) не вырождается в обычное дифференциальное уравнение, и поэтому к последним не относятся соответствующие положения теоремы 4.

6. В теоремах 3 и 4 речь идет о решениях, аналитических в какой-либо правой полуплоскости $\operatorname{Re} x > \gamma_1$. Такие решения связаны с условиями на коэффициенты a_{i0}. Тогда аналогичные факты можно высказать и о решениях, аналитических в левой полуплоскости $\operatorname{Re} x < \gamma_2$ — и это будет связано с условиями на коэффициенты a_{im}. Впрочем, эти задачи сводятся одна к другой в результате преобразования уравнения (1) с помощью замен $x + h_m = -z$, $y(-z) = w(z)$.

Отметим часть таких фактов. Для существования решений типа Γ^* уравнения (1) с $F(x) \in H(\mathbf{C})$ необходимы условия

$$|a_{im}| + |b_{im}| = 0 \ \ \forall i = n, n-1, \ldots, p+1, \quad a_{pm} \neq 0, \quad 0 \leq p \leq n. \tag{26}$$

При этом, если $\eta(t) \notin H(\mathbf{C})$, решения типа Γ^* на самом деле существуют. Такие решения являются функциями, аналитическими во всей плоскости с разрезом по горизонтальному лучу $U_2 = [\beta^*, +\infty + i\operatorname{Im}\beta^*)$, причем точка $\beta^* = -b_{pm}/a_{pm} + h_m$ обязательно является особой.

При выполнении условий

$$\begin{gathered} a_{i0} = \cdots = a_{i,r-1} = 0 \ \ \forall i = 0, 1, \ldots, n, \quad a_{nr} = \cdots = a_{q+1,r} = 0, \quad r > 0, \\ a_{qr} \neq 0 \ (0 \leq q \leq n); \quad b_{n0} = \cdots = b_{t+1,0} = 0, \quad b_{t,0} \neq 0 \ (0 \leq t \leq n) \end{gathered} \tag{27}$$

уравнение (1) с $F(x) \in E[1,\infty)$ всегда имеет целые решения и они при $K_1 \neq 0$ растут быстрее всякой целой функции э. т., а при совместном выполнении условий (26) и (27) всегда существуют и решения типа Γ^*.

7. Для уравнения (11) с $s = 0$ при условии $A(\alpha) \neq 0$ частные решения можно построить в значительно более простой форме, именно,

$$y(x) = M \int_S \gamma_0(t) e^{xt} \mathrm{d}t. \tag{28}$$

Здесь $\gamma_0(t)$ — заданная функция из (8), а постоянная M и путь S подлежат определению из условия

$$M A(t) \gamma_0(t) e^{xt}\big|_S = \varkappa e^{\alpha x}, \tag{29}$$

которое получается так же, как и (7), с учетом $T[\gamma_0(t)] \equiv 0$.

С помощью полученных выше оценок функции $\gamma_0(t)$ можно проверить, что условие (29) будет выполнено, например, в следующих случаях.

а) Пусть выполнено условие (12), и простой путь $S = l(-\infty, \alpha]$ идет из $-\infty$ в точку α по лучу $(-\infty, c_1]$ и далее по конечному участку $l[c_1, \alpha]$, а число $M = \varkappa/(A(\alpha)\gamma_0(\alpha)) \equiv M_0$. Тогда интеграл (28) определит решение типа Γ уравнения (11).

б) Пусть выполнены условия (19), и простой путь $S = S^*$ идет по лучу $T(\tau)$ из бесконечности в точку $b(\tau) + i\tau$ и от нее далее в точку α. Тогда при том же значении $M = M_0$ интеграл (28) сходится $\forall x$ и определяет целое решение (уравнения (11) с $s = 0$).

Интересно отметить следующее. Поскольку $A(\alpha) \neq 0$, то число $K_1 \equiv \varkappa\eta(\alpha) \neq 0$, поэтому в случае $\eta(t) \in H(\mathbf{C})$ интеграл (28) определит решение из класса $E\{1,\infty\}$. Так через свойства решений уравнения (1) (см. теорему 4) заключаем, что функция, определяемая интегралом вида (28) по пути $S = S^*$, является целой функцией первого порядка максимального типа.

8. Примеры. 1) Пусть $\Delta u(x) = u(x+1) - u(x)$, $\Delta^k u = \Delta(\Delta^{k-1}u)$. Для разностного уравнения $x\Delta^m u(x) = 1$ выполняется условие (4) $(n = 0)$. Оно имеет следующее решение типа Γ (с особыми точками $x = 0, -1, -2, \dots$): $u(x) = P_{m-1}(x)\Psi(x)$, где $P_{m-1}(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)/(m+1)!$, $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции Эйлера $\Gamma(x)$, и решение типа Γ^*: $u^*(x) = P_{m-1}(x)\Psi(m-x)$ (с особыми точками $x = m, m+1, \dots$). Решений в классе целых функций нет.

2) Для разностного уравнения $y(x+1) - xy(x) = 1$ выполняются условия вида (12), (19) $(n = 0)$. Оно имеет решения

$$y_1(x) = -e\int_{-\infty}^{0} \exp(-e^t)e^{xt}\mathrm{d}t \quad \text{и} \quad y_2(x) = -e\int_{+\infty}^{0} \exp(-e^t)e^{xt}\mathrm{d}t.$$

Из них первое — типа Γ, второе — целое из класса $E\{1,\infty\}$. Это — неполные гамма-функции ([2], с. 103), обычно их записывают в виде интегралов, получающихся из указанных в результате замены $e^t = \xi$.

3) Возьмем уравнение (3) с $B(t) = (\lambda+1)A'(t)$, $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ Тогда $\gamma_0(t) = (A(t))^\lambda$. Понятно, что решения типа Γ могут существовать и когда $a_{n0} = 0$, точнее, когда выполняются условия (12) с $\nu < n$: достаточно взять квазиполином $A(t)$ с таким свойством. Например, можно рассмотреть уравнение (3) с $A(t) = t^2e^t + t$, $\lambda = 0$; $A(t) = te^{2t} + t^2e^t + t$, $\lambda = 0$ (здесь выполняются оба условия: (12) с $\nu < n$ и (26) с $p < n$), при этом решением будет $y(x) = 1/x$. Случаю $A(t) = te^t + 1$, $\lambda = 0$ соответствует уравнение $(x+1)y'(x+1) + y(x+1) + xy(x) = 0$ с решением $y(x) = e^{x\alpha_0}/x$, где $\alpha_0 e^{\alpha_0} + 1 = 0$.

Литература

1. Солдатов М.А. *О некоторых решениях линейных неоднородных дифференциально-разностных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1969. – № 12. – С.83–92.
2. Миролюбов А.А., Солдатов М.А. *Линейные неоднородные разностные уравнения.* – М.: Наука, 1986. – 128 с.
3. Леонтьев А.Ф. *Дифференциально-разностные уравнения с линейными коэффициентами* // Тр. Горьковск. пед. ин-та. – 1951. – № 14. – С.3–30.
4. Краплин М.А. *О целых и мероморфных решениях одного класса разностных уравнений* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 142. – № 5. – С. 1011–1014.
5. Солдатов М.А. *О свойствах решений линейных дифференциально-разностных уравнений* // Сиб. матем. журн. – 1967. – Т. 8. – № 3. – С. 669–679.

Нижегородский государственный университет

Поступила 19.07.1999