ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 519.216

А.Н. ЧУПРУНОВ

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ НЕЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ БАНАХОВОЗНАЧНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство, $(T, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство, $Y(t)$, $Y_n(t)$, $t \in T$, $n \in N$, — независимые одинаково распределенные случайные процессы со значениями в банаховом пространстве B, определенные на $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и измеримые как функции двух аргументов относительно произведения σ-алгебр $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Пусть ξ и ξ_n, $n \in N$, — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в $(T, \mathfrak{B})$, определенные на другом вероятностном пространстве $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_1)$.

В [1]–[3] в случае, когда банахово пространство B является действительной прямой R, изучается сходимость по распределению сумм и максимумов от случайных величин $Y_i(\xi_i(\omega_1))$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$, сходимость для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$ эмпирических процессов, случайных ломаных и случайных ступенчатых функций, определенных случайными величинами $Y_i(\xi_i(\omega_1))$. В [4] приведены обобщения результатов [1] на случайные процессы Y_i, принимающие значения в банаховом пространстве B. Здесь продолжаются эти исследования, изучается сходимость случайных ломаных, определенных нормированными суммами и нормированными билинейными формами от банаховозначных случайных элементов $Y_i(\xi_i(\omega_1))$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Пусть D — подмножество вещественной прямой R, L — некоторое линейное пространство функций на D со значениями в банаховом пространстве B, наделенное метризуемой топологией, $H(y)$, $H_n(y)$, $y \in D$, — случайные процессы со значениями в B, почти все траектории которых принадлежат L. Говорят, что процессы $H_n(y)$ сходятся по распределению к процессу $H(y)$ в L (и обозначают $H_n \xrightarrow{d} H$, $n \to \infty$, в L) , если распределения случайных процессов H_n сходятся слабо в L к распределению случайного процесса H. Здесь в качестве пространства L будем рассматривать пространство $C([0,1], B)$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ со значениями в банаховом пространстве B. Символом $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ будем обозначать равенство распределений случайных величин.

Напомним ([5], с. 54), что банахово пространство B имеет тип 2, если существует такое $C > 0$, что для всех $x_1, \dots, x_n \in B$, $n \in N$, $E\Big\| \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i \Big\|^2 \le C\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \Big)$, где r_i — функции Радемахера (т. е. случайные величины r_i независимы и $P\{r_i = 1\} = P\{r_i = -1\} = \frac{1}{2}$, $i \in N$).

Пусть случайный процесс Y и случайная величина ξ такие, что $EY(t) = 0$ для всех $t \in T$, ковариационная форма $V(x', y') = E_1 E x'(Y(\xi)) y'(Y(\xi))$, $x', y' \in B'$, определяет гауссовский случайный элемент $G_{Y,\xi}$ в B и найдется такой гауссовский B-значный случайный процесс $W_{Y,\xi}$, определенный на $[0,1]$ с независимыми приращениями, что для всех $x \in [0,1]$ $W_{Y,\xi}(x) \stackrel{\mathrm{d}}{=} x^{1/2} W_{Y,\xi}$. В этом случае будем говорить, что пара (Y, ξ) определяет винеровский процесс $W_{Y,\xi}$.

Рассмотрим случайные процессы в B, параметризованные элементами $\omega_1 \in \Omega_1$,

$$S_n(x, \omega_1) = n^{-1/2}\Big(\sum_{i=1}^{[nx]} Y_i(\xi_i(\omega_1)) + \{nx\} Y_{[nx]+1}(\xi_{[nx]+1}(\omega_1)) \Big),$$

$0 \le x \le 1$. Здесь через $[a]$ и $\{a\}$ обозначены целая и дробная части числа a.

Теорема 1. *Пусть банахово пространство B имеет тип 2, $EY(t) = 0$ для всех $t \in T$, и $E_1E\|Y(\xi)\|^2 < \infty$. Тогда пара (Y, ξ) определяет винеровский процесс $W_{Y,\xi}$ и $S_n(x, \omega_1) \xrightarrow{d} W_{Y,\xi}$, $n \to \infty$, в $C([0,1], B)$ для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.*

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y), $x, y \in H$, случайные процессы Y_i принимают значения в H. Рассмотрим случайные процессы, параметризованные элементами $\omega_1 \in \Omega_1$,

$$S_n^{\&}(x, \omega_1) = n^{-1}\Biggl(\sum_{j<i\le[nx]} (Y_i(\xi_i(\omega_1)), Y_j(\xi_j(\omega_1))) + \\ + \{nx\} \sum_{\substack{[nx]<i\le[nx]+1,\\ j<i\le[nx]+1}} (Y_i(\xi_i(\omega_1)), Y_j(\xi_j(\omega_1)))\Biggr), \quad 0 \le x \le 1.$$

Обозначим через $I \in C[0,1]$ функцию $I(x) = x$, $x \in [0,1]$.

Теорема 2. *Пусть $B = H$ — гильбертово пространство, $EY(t) = 0$ для всех $t \in T$, и $E_1E\|Y(\xi)\|^2 < \infty$. Тогда пара (Y, ξ) определяет винеровский процесс $W_{Y,\xi}$ и*

$$n^{-1}S_n^{\&}(x, \omega_1) \xrightarrow{d} \tfrac{1}{2}((W_{Y,\xi}, W_{Y,\xi}) - I), \quad n \to \infty, \quad \text{в } C[0,1]$$

для почти всех $\omega_1 \in \Omega_1$.

Литература

1. Чупрунов А.Н. *О сходимости по распределению сумм и максимумов независимых случайных величин со случайными параметрами* // Liet. Matem. Rink. – 1995. – V. 35. – № 1. – P. 52–64.
2. Чупрунов А.Н. *О сходимости по распределению эмпирических процессов, определенных независимыми случайными процессами* // Liet. Matem. Rink. – 1995. – V. 35. – № 2. – P. 171–180.
3. Чупрунов А.Н. *О сходимости по распределению почти всех сумм независимых банаховозначных случайных элементов* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 11. – С. 83–87.
4. Чупрунов А.Н. *О сходимости случайных ломаных с нормировками типа Стьюдента* // Теория вероятн. и ее примен. – 1996. – Т. 51. – № 4. – С. 914–919.
5. Муштари Д.Х. *Вероятности и топологии в банаховых пространствах.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1989. – 152 с.

Казанский государственный университет

Поступила 13.11.1996