КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 124, кн. 6 *УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ* **1964**

С. КАНИЕВ

ЛОКАЛЬНЫЕ УКЛОНЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ ОТ ИХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

1. Рассмотрим бигармоническую в единичном круге функцию (см. [1])

$$f(r, \varphi) = \frac{(1-r^2)^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cdot \frac{1 - r\cos(\theta - \varphi)}{[1 - 2r\cos(\theta-\varphi) + r^2]^2}\, d\theta, \tag{1}$$

граничными значениями которой являются значения функции $f(\theta) \in L(0, 2\pi)$, а нормальная производная на границе равна нулю, и оценим разность

$$\Delta(r, \varphi) = f(r, \varphi) - f(\varphi) = \frac{(1-r^2)^2}{2\pi} \int_0^{\pi} w_\varphi(t) \frac{1 - r\cos t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^2}\, dt, \tag{2}$$

где мы положили

$$w_\varphi(t) = f(\varphi + t) - 2f(\varphi) + f(\varphi - t).$$

Эта задача была решена нами [3] в предположении, что функция $f(\theta)$ непрерывна на всем отрезке $[0, 2\pi]$; здесь мы рассмотрим локальный аналог результатов работы [3].

Отметим, что аналогичная задача для гармонических в круге функций рассматривалась Я. Л. Геронимусом [2].

2. Предположим, что функция $f(\theta)$ в точке φ непрерывна или имеет разрыв непрерывности первого рода; припишем ей в этой точке значение

$$f(\varphi) = \frac{1}{2}\{f(\varphi + 0) + f(\varphi - 0)\} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \{f(\varphi + t) + f(\varphi - t)\}.$$

В таком случае функция

$$W_\varphi(\delta) = \sup_{|t| \leqslant \delta} |w_\varphi(t)|,$$

аналогичная модулю гладкости функции $f(\theta)$, в точке φ непрерывна и равна нулю при $\delta = 0$.

Теорема 1. *Если точка φ такова, что при некотором γ $(0 \leqslant \gamma < 1)$ существует интеграл*

$$\int_0^{\pi} |w_\varphi(t)|\, t^{-2-\gamma}\, dt, \tag{3}$$

то при $0 < r_0 \leqslant r < 1$ *справедливо неравенство*

$$|\Delta(r, \varphi)| \leqslant C_1 (1-r)^{1+\gamma} \int_0^\pi |w_\varphi(t)| \, t^{-2-\gamma} \, dt, \quad C_1 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{r_0}}\right)\left(\frac{\pi^2}{4r_0}\right)^{\frac{1+\gamma}{2}}.$$

Доказательство. К формуле

$$\Delta(r, \varphi) = \frac{(1-r^2)^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{w_\varphi(t)}{1 - 2r\cos t + r^2} \, dt + \frac{(1-r^2)^3}{4\pi} \int_0^\pi \frac{w_\varphi(t)}{(1-2r\cos t + r^2)^2} \, dt, \quad (4)$$

получаемой из (2) разложением подынтегрального ядра, применим очевидные неравенства:

$$\left.\begin{aligned} 1 - 2r\cos t + r^2 &\geqslant (1-r)^2, \\ 1 - 2r\cos t + r^2 &\geqslant 4r \frac{t^2}{\pi^2}, \\ 1 - 2r\cos t + r^2 &\geqslant (1-r)^{1-\gamma} \cdot \left(\frac{4rt^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1+\gamma}{2}} \end{aligned}\right\}. \quad (5)$$

Тогда

$$|\Delta(r, \varphi)| \leqslant \frac{(1-r^2)^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{|w_\varphi(t)|}{(1-r)^{1-\gamma} \cdot \left(\frac{4rt^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1+\gamma}{2}}} \, dt +$$

$$+ \frac{(1-r^2)^3}{4\pi} \int_0^\pi \frac{|w_\varphi(t)|}{\left[(1-r)^{1-\frac{\gamma}{2}} \cdot \left(\frac{4rt^2}{\pi^2}\right)^{\frac{1+\frac{\gamma}{2}}{2}}\right]^2} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-r)^{1+\gamma}}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4r_0}\right)^{\frac{1+\gamma}{2}} \int_0^\pi \frac{|w_\varphi(t)|}{t^{1+\gamma}} \, dt + \frac{2(1-r)^{1+\gamma}}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4r_0}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}} \int_0^\pi \frac{|w_\varphi(t)|}{t^{2+\gamma}} \, dt \leqslant$$

$$\leqslant (1-r)^{1+\gamma} \int_0^\pi \frac{|w_\varphi(t)|}{t^{2+\gamma}} \, dt \cdot \left[\left(\frac{\pi^2}{4r_0}\right)^{\frac{1+\gamma}{2}} + \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4r_0}\right)^{1+\frac{\gamma}{2}}\right],$$

откуда следует утверждение теоремы.

В частности, если $W_\varphi(\delta) \leqslant C_2 \delta^{1+\alpha}$, $0 \leqslant \alpha < 1$, то интеграл (3) существует при $\gamma < \alpha$. Если же $W_\varphi(\delta) \leqslant C_3 \delta^{1+\alpha} \left(\lg \frac{1}{\delta}\right)^{-\beta}$. $\beta > 1$, $0 \leqslant \alpha < 1$, то он существует при $\gamma = \alpha$.

Теорема 2. *При* $0 < r_0 \leqslant r < 1$ *справедлива оценка*

$$\Delta(r, \varphi) \leqslant C_4 \frac{(1-r)^3}{\delta^4}, \quad C_4 = \frac{3}{\pi}\left\{1 + \left(\frac{\pi^2}{4r_0}\right)^2 \left[\int_0^{2\pi} |f(t)| \, dt + 2\pi |f(\varphi)|\right]\right\}, \quad (6)$$

где δ *определяется в зависимости от* $1 - r$ *из уравнения*

$$(1-r)^4 = \delta^5 W_\varphi(\delta). \quad (7)$$

В частности, если $W_\varphi(\delta) \leqslant C_5 \delta \left(\lg \frac{1}{\delta}\right)^{-\beta}$, $\beta > 0$, *то*

$$|\Delta(r, \varphi)| \leqslant C_6 (1-r)^{\frac{1}{3}} \left(\lg \frac{1}{1-r}\right)^{-\frac{2\beta}{3}}.$$

Доказательство. Интегралы в правой части (4) (обозначим их через I_1 и I_2) разбиваем на два — по отрезкам $[0, \delta_i]$ и $[\delta_i, \pi]$ ($i = 1, 2$). Воспользовавшись неравенствами (5), оцениваем каждый из них в зависимости от δ_i и $1 - r$:

$$|I_1| \leqslant \frac{(1-r^2)^2}{4\pi} \int_0^{\delta_1} \frac{W_\varphi(\delta_1)}{(1-r)^2} dt + \frac{(1-r^2)^2}{4\pi} \int_{\delta_1}^{\pi} \frac{|f(\varphi+t) + f(\varphi-t) - 2f(\varphi)|}{4r\frac{t^2}{\pi^2}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} W_\varphi(\delta_1) \cdot \delta_1 + \frac{(1-r)^2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4r_0} \cdot \frac{1}{\delta_1^2} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt + 2\pi |f(\varphi)| \right\}.$$

В силу произвольности δ_1 приравниваем друг другу эти оценки. Тогда получаем уравнения

$$(1-r)^2 = \delta_1^3 W_\varphi(\delta_1). \tag{8}$$

Следовательно,

$$|I_1| \leqslant \frac{(1-r)^2}{\delta_1^2} \cdot \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{4r_0} \left[\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt + 2\pi |f(\varphi)| \right] \right\}. \tag{9}$$

$$|I_2| \leqslant \frac{(1-r^2)^3}{4\pi} \int_0^{\delta_2} \frac{W_\varphi(\delta_2)}{(1-r)^4} dt + \frac{(1-r^2)^3}{4\pi} \int_{\delta_2}^{\pi} \frac{|f(\varphi+t) + f(\varphi-t) - 2f(\varphi)|}{\left(\frac{4rt^2}{\pi^2}\right)^2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{W_\varphi(\delta_2)\, \delta_2}{(1-r)} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(1-r)^3}{\delta_2^4} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4r_0}\right)^2 \left[\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt + 2\pi |f(\varphi)| \right].$$

Как и выше, получаем уравнение

$$(1-r)^4 = \delta_2^5 W_\varphi(\delta_2). \tag{10}$$

Следовательно,

$$|I_2| \leqslant \frac{(1-r)^3}{\delta_2^4} \cdot \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi^2}{4r_0}\right)^2 \left[\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt + 2\pi |f(\varphi)| \right] \right\}. \tag{11}$$

Нетрудно убедиться в том, что оценка (11) при выборе δ_2 по уравнению (10) по порядку меньше, чем оценка (9) при выборе δ_1 по уравнению (8). Следовательно, складывая оценки (9) и (11), получим оценку (6).

Теорема 3. *Если* $\int_0^{\delta} |w_\varphi(t)|\, dt \leqslant \delta^2 \mu(\delta)$, $\mu(\delta) \downarrow 0$, *то при* $0 < r_0 \leqslant \leqslant r < 1$ *справедлива оценка*

$$\Delta(r, \varphi) \leqslant C_4 \frac{(1-r)^3}{\delta^4},$$

где δ определяется в зависимости от $1 - r$ из уравнения

$$(1-r)^4 = \delta^6 \mu(\delta).$$

Доказывается аналогично теореме 2.

3. До сих пор накладывалось ограничение на поведение функции $f(\theta)$ в одной точке φ и в бесконечно малой ее окрестности; будем теперь считать известным ее поведение на некотором внутреннем к $[0, 2\pi]$ отрезке $[\alpha, \beta]$.

Теорема 4. *Пусть функция $f(\theta)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta] \subset \subset [0, 2\pi]$ с модулем гладкости $\omega_2(t)$. Тогда при всех $\alpha + \varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \leqslant \beta - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и $0 < r_0 \leqslant r < 1$ справедлива оценка*

$$|\Delta(r, \varphi)| \leqslant C_7(1-r)^3 + C_8\omega_2(1-r),$$

где C_7 зависит только от r_0, а C_8 — абсолютная константа.

Так как $(1-r)^3$ при $r \to 1$ стремится к нулю быстрее, чем $\omega_2(1-r)$, то C_7 можно считать равным нулю.

Доказательство. Имеем:

$$f(r, \varphi) - f(\varphi) = \frac{(1-r^2)^2}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(t) - f(\varphi)}{1 - 2r\cos(t-\varphi) + r^2}\, dt -$$

$$+ \frac{(1-r^2)^3}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(t) - f(\varphi)}{[1 - 2r\cos(t-\varphi) + r^2]^2}\, dt.$$

Каждый из этих интегралов разбиваем на два — по $[\alpha, \beta]$ и по дополнительному множеству; вторые из них оцениваем так же, как в теореме 2, с заменой δ на ε. Тогда интегралы от 0 до ε и от α до β по результатам работы [3] не превосходят $C_8\omega_2(1-r)$, а интегралы по множеству $[\varepsilon, 2\pi] - [\alpha, \beta]$ по теореме 2 дают $C_7(1-r)^3$.

4. Теоремы 1—4 аналогичны результатам Я. Л. Геронимуса [2]. Если относительно точки φ предположить, что для функции $W_\varphi(\delta)$ выполняется соотношение

$$W_\varphi(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)^2\, W_\varphi(\delta), \tag{12}$$

при любом $\lambda > 0$ и $0 \leqslant \delta \leqslant \pi$, то, как и в работе [3], получаем оценку

$$|\Delta(r, \varphi)| \leqslant C_9 W_\varphi(1-r), \tag{13}$$

где C_9 — абсолютная константа, то есть имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Если точка φ такова, что для любого $\lambda > 0$ и $0 \leqslant \delta \leqslant \pi$ выполняется соотношение* (12), *то при всех $0 \leqslant r < 1$ имеет место оценка* (13).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский. Уравнения математической физики. Гостехиздат, Москва, 1952.
2. Я. Л. Геронимус. — ДАН СССР, 129, № 4 (1959).
3. С. Канцев. — ДАН СССР, 1963.