ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.518

Н.Ш. ЗАГИРОВ

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ УЖИ ПО ПОДСИСТЕМАМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТЕПЕНЕЙ

1. Обозначения. Постановка задачи. Полиномиальные ужи, введенные в [1], получили дальнейшее развитие в работах В.К. Дзядыка (см., напр., [2]). Их обобщение на каналы с разрывными границами построено в [3].

Пусть на конечном отрезке $[a,b]$ задана некоторая линейно независимая система функций $\varphi_0,\dots,\varphi_n$. Через L обозначим множество полиномов по этой системе. Для двух фиксированных функций g, G таких, что $g(x)<G(x)$, когда x принадлежит $[a,b]$, положим $L(g,G)=\{P\in L: g(x)\le P(x)\le G(x),\ x\in[a,b]\}$.

Напомним, что полином $Z\in L(g,G)$ называется ужом, порожденным парой (g,G), или ужом пары (g,G), если на отрезке $[a,b]$ имеется такой набор из $m=n+1$ точек $x_1<x_2<\dots<x_m$, что с ростом k от 1 до m точки $M_k=(x_k,Z(x_k))$ попеременно попадают то на график $\Gamma(g)$ функции g, то на график $\Gamma(G)$ функции G (начиная с любого из них). Если же $m>n+1$, то Z называют избыточным ужом [3]. С. Карлин доказал утверждение: если g, G — непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции, для которых существует такой полином l из L, что $g(x)<l(x)<G(x)$ на $[a,b]$ и система $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ является чебышевской, то имеются ровно два ужа, порожденные парой (g,G).

Этот результат обобщен Е.П. Долженко и Е.А. Севастьяновым [2] на разрывные функции g, G, ими же установлены некоторые новые свойства ужей, а также их связь с аппроксимациями со знакочувствительным весом [4]–[6].

В данной работе изучаются вопросы существования и количества ужей, когда система $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ не является чебышевской; рассматривается одна экстремальная задача, связанная с ужами. Установленные результаты конкретизируются на полиномах по некоторым подсистемам алгебраических степеней.

2. Будем считать все рассматриваемые ниже функции непрерывными на отрезке $[a,b]$. С парой (g,G) свяжем две новые функции: $g_0(x)=(g(x)+G(x))/2$, $h(x)=(G(x)-g(x))/2$. Так как $G(x)>g(x)$, то $h(x)>0$ на отрезке $[a,b]$.

Введем функционал

$$N(f)=N(f,g,G)=\max\{|f(x)-g_0(x)|/h(x): x\in[a,b]\}.$$

Известно [7], [8], что $N(f)$ — непрерывный выпуклый неотрицательный функционал и

$$L(g,G)=\{l\in L: N(l)\le 1\}. \tag{1}$$

Величину $N(f_1-f_2)$ называем (g,G)-расстоянием между f_1 и f_2. Пусть

$$E_n(f)=\inf_{l\in L}\max\{|f(x)-l(x)|/h(x): x\in[a,b]\}.$$

Напомним, что величина $E_n(f)$ называется наименьшим уклонением пространства L от функции f, а $l^*\in L$ такой, что

$$\max\{|f(x)-l^*(x)|/h(x): x\in[a,b]\}=E_n(f)$$

называется полиномом (элементом) наилучшего приближения f на L. Очевидно, для положительных на отрезке $[a,b]$ функций h сохраняются теоремы существования, единственности, характеристики элемента наилучшего приближения, известные в случае $h=1$ [3]. Для общего случая, когда $F_n(f)=F_n(f;g,G)=\inf\{N(f-l):l\in L\}$, сохраним ту же терминологию.

Отметим очевидное равенство $F_n(f)=E_n(f-g_0)$, из которого следует, что l^* из L будет полиномом наилучшего приближения f в смысле (g,G)-расстояния тогда и только тогда, когда он будет полиномом наилучшего приближения для функции $f-g_0$ в обычном смысле. Это замечание доказывает, что упомянутые теоремы распространяются и на общий случай.

В этой работе ужи будут построены как решение некоторой экстремальной задачи. Именно, фиксируем одну из функций системы $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$, скажем, φ_n. Полином l из L будем записывать в виде $l=c_n(l)\varphi_n+q$, где q принадлежит множеству V полиномов, порожденных системой $\varphi_0,\ldots,\varphi_{n-1}$.

Положим

$$M=\sup\{c_n(l):l\in L(g,G)\},\quad m=\inf\{c_n(l):l\in L(g,G)\}. \tag{з1}$$

Так как $L(g,G)$ есть выпуклый компакт, то обе задачи имеют решения, причем, если l^* — решение какой-нибудь из них, то $N(l^*)=1$. Чтобы охарактеризовать элемент l^*, введем новые обозначения. Для фиксированного числа t положим

$$F(t)=\inf\{N(t\varphi_n-q):q\in V\},$$
$$F=F(g,G)=\inf\{F(t):-\infty<t<\infty\}.$$

Очевидно,

$$F(t)=\inf\{N(l):c_n(l)=t\},$$
$$F=F(g,G)=\inf\{N(l):l\in L(g,G)\}.$$

Величину $F(g,G)$ будем называть расстоянием от пространства L до канала (g,G). Заметим, что $F(g,G)=0$ тогда и только тогда, когда "середина" канала g_0 принадлежит L.

Нам понадобится

Лемма. *Функция $F(t)$ является непрерывной выпуклой на всей числовой прямой, причем*

$$\lim_{|t|\to\infty}F(t)=+\infty. \tag{2}$$

Множество $L(g,G)$ не пусто тогда и только тогда, когда $F(g,G)\le 1$.

Доказательство. Последняя часть утверждения фактически следует из равенства (1). Выпуклость F следует из выпуклости функционала N:

$$F((t_1+t_2)/2)\le N(\varphi_n(t_1+t_2)/2-(q_1+q_2)/2)\le \tfrac12(N(t_1\varphi_n-q_1)+N(t_2\varphi_n-q_2))=\tfrac12(F(t_1)+F(t_2)).$$

Здесь $q_i\in V$ — полином наилучшего приближения функции $t_i\varphi_n$, $i=1,2$. Если $g_0\notin L$, то равенство (2) непосредственно получается из неравенства ($t\ne 0$)

$$F(t)\ge |t|e_n-K(g,G), \tag{3}$$

где $e_n=\inf\{N(\varphi_n-q):q\in V\}$, $K(g,G)=\max\{|g_0(x)|/h(x):x\in[a,b]\}$. Так как система функций $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$ линейно независимая и $g_0\notin L$, то $e_n>0$. Неравенство (3) получается из следующих двух неравенств:

$$(|t\varphi_n(x)-q^*(x)|-|g_0(x)|)/h(x)\le N(t\varphi_n-q^*),\quad x\in[a,b];$$
$$\sup\{(|t\varphi_n(x)-q^*(x)|-|g_0(x)|)/h(x):x\in[a,b]\}\ge$$
$$\ge\sup\{(|t\varphi_n(x)-q^*(x)|)/h(x):x\in[a,b]\}-\sup\{|g_0(x)|/h(x):x\in[a,b]\}.$$

Здесь q^* — полином наилучшего приближения функции $t\varphi_n$. Если $g_0 \in L$, то достаточно считать $g_0(x) = t_0\varphi_n(x)$ и $t \neq t_0$. $\square$

Следствие. Для любой пары (g, G) существуют такие числа t_1, t_2, что на луче $(-\infty, t_1)$ функция $F(t)$ строго убывает, на луче (t_2, ∞) строго возрастает, а на отрезке $[t_1, t_2]$ она равна $F(g, G)$. Если система функций $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ является чебышевской, то $t_1 = t_2$.

Докажем теперь теорему о характеристике решения задач (з1).

Теорема 1. *Пусть $L(g, G) \neq 0$. Тогда полином l^* из L будет решением первой из задач* (з1), *т. е.*

$$c_n(l) \to \sup, \quad l \in L(g, G), \tag{$*$}$$

тогда и только тогда, когда $q^* = M\varphi_n - l^*$ (M из (з1)) *является полиномом наилучшего приближения функции $M\varphi_n$ в V в смысле (g, G)-расстояния.*

Аналогичное утверждение верно и для второй задачи (з1).

Доказательство. Так как $L(g, G) \neq 0$, то $F(g, G) \leq 1$. Пусть $F(g, G) = 1$. Для любого $t < t_1$ и $t > t_2$ функция $F(t) > 1$. Поэтому для любого полинома l вида $l = t\varphi_n + q$ число $N(l) > 1$, а значит (см. равенство (1)), l не принадлежит $L(g, G)$ и $M = t_2$, $m = t_1$. Если $l^* = M\varphi_n + q^*$ — решение задачи $(*)$, то l^* принадлежит $L(g, G)$ и т.к. $F(g, G) = 1$, то $F(M) = F(t_2) = 1$. Из определения $F(t)$ следует, что q^* — полином наилучшего приближения для $M\varphi_n$ в смысле (g, G)-расстояния.

Допустим, что $q^* = M\varphi_n - l^*$ из V есть полином наилучшего приближения для $M\varphi_n$. Тогда $l^* = M\varphi_n - q^*$ и $F(M) = F(t_2) = 1$. Значит, l^* принадлежит $L(g, G)$ и является решением задачи $(*)$. Аналогично разбирается вторая задача.

Рассмотрим случай, когда $F(g, G) < 1$. Из леммы следует, что существуют ровно два таких числа $a_1 < t_1 \leq t_2 < a_2$, что $F(a_1) = F(a_2) = 1$. Поскольку для $t < a_1$ и $t > a_2$ имеем $F(t) > 1$ и полином $l = t\varphi_n + q$ не принадлежит $L(g, G)$, то $M = a_2$, $m = a_1$. Теперь из определения $F(a_1)$ и $F(a_2)$ следует утверждение теоремы. $\square$

Фактически, как следствие доказанной теоремы и теоремы Чебышева о характеристике полинома наилучшего приближения получается

Теорема 2. *Пусть $F(g, G) = 1$. Тогда* а) *если система функций $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ является чебышевской, то канал (g, G) содержит единственный полином, который для него является избыточным ужом ($t_1 = t_2$);* б) *если же подсистема $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ является чебышевской, то канал (g, G) имеет единственный уж, когда функция g_0 имеет единственный полином наилучшего приближения в L. Канал имеет бесконечно много ужей, если g_0 имеет хотя два полинома наилучшего приближения в L.*

Пусть $F(g, G) < 1$. Тогда, если система $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ является чебышевской, то пара (g, G) порождает по меньшей мере два ужа по системе $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$.

Доказательство. Так как $F(t) = F_n(t\varphi_n) = E_n(t\varphi_n - g_0)$, то в доказательстве нуждается лишь та часть теоремы, где $F(g, G) = 1$, а система $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ является чебышевской. Пусть g_0 имеет в L единственный полином l^* наилучшего приближения. Так как $F(g, G) = 1$, то $E_n(g_0) = 1$. Если считать, что $l^* = t^*\varphi_n + q^*$, то q^* будет полиномом наилучшего приближения для функции $g_0 - t^*\varphi_n$ по чебышевской системе $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$. Следовательно, по теореме Чебышева [2] существуют точки $x_1 < \cdots < x_m$ ($m \geq n + 1$), в которых $g_0(x_i) - l^*(x_i) = \varepsilon(-1)^i h(x_i)$, $i = 1, \ldots, m$, где ε равен либо плюс, либо минус единице. Возвращаясь от g_0 и h к g и G, можно убедиться, что l^* является ужом пары (g, G).

В силу единственности полинома наилучшего приближения для каждого $l \in L$, $l \neq l^*$, будем иметь $N(l) > 1$ (если $N(l) = 1$, то l тоже был бы полиномом наилучшего приближения g_0 в L), т. е. $l \in L(g, G)$. Следовательно, канал (g, G) содержит единственный полином l^*.

Пусть теперь g_0 допускает хотя бы два полинома $l_1 = a_1\varphi_n + q_1$, $l_2 = a_2\varphi_n + q_2$ наилучшего приближения. Так как система $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ является чебышевской, то $a_1 \neq a_2$. Как обычно, можно убедиться, что тогда любой полином $l_z = zl_1 + (1-z)l_2$, $z \in [0,1]$, также является полиномом наилучшего приближения для g_0 и $E_n(g_0) = 1$. Это же означает, что для каждого $z \in [0,1]$ полином $zq_1 + (1-z)q_2$ является наилучшим в чебышевском пространстве V для функции $g_0 = za_1 + (1-z)a_2$. Следовательно (см. предыдущий абзац), каждый из полиномов l_z является ужом пары (g, G). $\square$

Следствие 1. Если для пары (g, G) выполняется неравенство $F(g, G) < 1$, а система $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ является чебышевской, то решения задач (з1) являются ужами, порожденными парой (g, G). Если же и система $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$ является чебышевской, то два ужа, порожденные парой (g, G), и только они будут решениями задач (з1).

Замечание 1. Вторая часть теоремы 2 показывает: чтобы канал (g, G) имел по меньшей мере два ужа, необязательно, чтобы вся система $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ была чебышевской. Для этого достаточно, чтобы существовала хотя бы одна чебышевская подсистема из n функций (для $F(g, G) < 1$). (Ср. с теоремой С. Карлина.)

Замечание 2. Простые примеры ($\varphi_0(x) = x$, $\varphi_1(x) = x^2 - 1$, $\varphi_2(x) = x^2 - 4$, $n = 2$) показывают, что чебышевская система $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ может и не содержать чебышевских подсистем из n функций.

Замечание 3. Случай а) первой части теоремы 2 впервые отмечен Е.П. Долженко и Е.А. Севастьяновым.

Из теоремы 2 и теоремы С. Карлина получаем

Следствие 2. Если для пары (g, G) выполняется условие $F(g, G) < 1$, а система $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ или какая-нибудь ее подсистема из n функций является чебышевской, то пара (g, G) порождает по меньшей мере два ужа.

Если система $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ не является чебышевской, то, вообще говоря, существует пара (g, G), которая порождает по этой системе бесконечно много ужей. Так, например, пусть для системы $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ выполняется условие (i): для некоторого набора точек $x_0 < \dots < x_n$ отрезка $\Delta = [a, b]$

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n(x_0) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

определители

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_0(x_{i-1}) & \varphi_0(x_{i+1}) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n-1}(x_0) & \dots & \varphi_{n-1}(x_{i-1}) & \varphi_{n-1}(x_{i+1}) & \dots & \varphi_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

имеют один и тот же знак.

Можно показать, что при условии (i)

1) существуют такие числа b_i ($i = 0, \dots, n$), что $b_i b_{i+1} < 0$ для $i = 0, \dots, n-1$, и $\sum\limits_{i=0}^{n} b_i P(x_i) = 0$ для любого $P \in L_n$;
2) существует полином $P_0 \in L_n$ с нулями в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ и такой, что $\max\limits_{x \in [a,b]} |P_0(x)| = 1$.

Положим, что f есть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция с условиями $f(x_i) = \operatorname{sign} b_i$, $\max\{|f(x)| : x \in [a, b]\} = 1$. Пусть $g_0(x) = f(x)(1 - |P_0(x)|)$, $G(x) = g_0(x) + 1$, $g(x) = g_0(x) - 1$. Тогда при $|\varepsilon| \le 1$ любой полином вида $\varepsilon P_0(x)$ образует уж для пары (g, G).

В работе [9] доказано, что множество систем, удовлетворяющих условию (i), непусто.

Если же ни система $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ и никакая ее подсистема из n функций не будет чебышевской, то существуют каналы без ужей. Например, канал (g, G) с

$$G(x) = g_1(x) + 1, \quad g(x) = g_1(x) - 5/4,$$
$$g_1(x) = \begin{cases} (7/4)x + 1, & -1 \le x \le 0; \\ 1 - (3/4)x, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

не порождает ужей по системе x, x^3, x^5.

3. В этом пункте изучим свойства подсистем алгебраических степеней. Считаем, что

$$\varphi_i(x) = x^i, \;\; i = 0, \dots, j-1; \quad \varphi_i(x) = x^{i+q}, \;\; i = j, \dots, n,$$

где $q \ge 1$, $1 \le j \le n+1$.

При $j = n+1$ эта система является чебышевской на любом отрезке. Известно также, что она является чебышевской на любом отрезке $[a, b]$, когда $ab > 0$. Случай $q = 1$ рассмотрен автором в [9]. В дальнейшем считаем $j \le n$, $a < 0 < b$.

Теорема 3. *Если число q является четным, то система функций $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ будет чебышевской системой, если q нечетное, то любой ненулевой полином по этой системе имеет более $n+1$ нулей.*

Доказательство. Для $P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$ через $N^+(P)$ и $N^-(P)$ обозначим соответственно число его различных положительных и отрицательных корней, а через $W^+(P)$ ($W^-(P)$) — число перемен знака полинома $P(t)$ ($P(-t)$), $N(P)$ — число всех различных вещественных нулей P. Известно [10], что

$$N^+(P) \le W^+(P), \quad N(P) \le r + W^+(P) + W^-(P), \tag{4}$$

где $r = 1$, если $x = 0$ является корнем P, и нулю в противном случае.

Имеются три случая для полинома P. Первый, когда $c_0 = \dots = c_{j-1} = 0$, и второй случай, когда $c_j = \dots = c_n = 0$, рассматриваются очевидным образом. Разберем третий случай, когда

$$\begin{aligned}
&c_0 = \dots = c_{s-1} = 0, && c_s \ne 0, \quad s \ge 0, \\
&c_k = \dots = c_{j-1} = 0, && c_{k-1} \ne 0, \quad k \le j, \quad k - 1 \ge s, \\
&c_j = \dots = c_{j+m-1} = 0, && c_{j+m} \ne 0, \;\; m \ge 0, \\
&c_{n-i+1} = \dots = c_n = 0, && c_{n-j} \ne 0, \quad i \ge 0, \quad n - i \ge j + m,
\end{aligned}$$

причем в этих строках при $i = 0$, $m = 0$, $k = j$ или $s = 0$ учитываются только неравенства с коэффициентами полинома P. В третьем случае полином имеет вид

$$P(x) = c_s x^s + \dots + c_{k-1} x^{k-1} + c_{j+m} x^{j+m+q} + \dots + c_{n-i} x^{n-i+q}.$$

Подсчитаем $W^+(P)$ и $W^-(P)$. Если полином $Q(x) = a_s x^s + \dots + a_n x^n$, $s \ge 0$, то

$$W^+(Q) + W^-(Q) \le n - s. \tag{5}$$

При $s = 0$ это неравенство приводится в ([10], гл. 1); если же $s > 0$, то $Q(x) = x^s Q_1(x)$, где $Q_1(x) = a_s + \dots + a_n x^{n-s}$. Разобьем последовательность коэффициентов полинома P на части

$$\Pi_1 = (c_s, \dots, c_{k-1}), \quad \Pi_2 = (c_{k-1}, c_{j+m}), \quad \Pi_3 = (c_{j+m}, \dots, c_{n-i}).$$

Обозначим через $W^+(P, \Pi_i)$, $W^-(P, \Pi_i)$ число перемен знака P на части Π_i, $i = 1, 2, 3$. Тогда $W^+(P) + W^-(P)$ равен сумме получаемых таким образом шести чисел.

Из неравенства (5) следует, что

$$W^+(P, \Pi_1) + W^-(P, \Pi_1) \le k - 1 - s, \quad W^+(P, \Pi_3) + W^-(P, \Pi_3) \le n - i - j - m.$$

Положим $W = W^+(P,\Pi_2) + W^-(P,\Pi_2)$, $R = j-k+1+m$, $a = c_{k-1}c_{j+m}$ и $b = (-1)^{k-1+j+m+q}c_{k-1}$, $c_{j+m} = (-1)^{R+q}a$. Очевидно, W равен количеству отрицательных чисел в множестве $\{a,b\}$. Рассмотрим первую часть теоремы, когда q — четное число. Тогда $b = (-1)^R a$ и $W = 1$ при R нечетном; если же R четное, то $W = 0$ или $W = 2$.

Складывая все шесть чисел, получим $W^+(P) + W^-(P) \le n + W - (j-k+m+1) - s$. Число r в неравенстве (4) не превосходит s. Значит,

$$W^+(P) + W^-(P) + r \le n + W - R. \tag{6}$$

Непосредственно из обозначения R видно, что $R \ge 1$, если оно нечетное, и $R \ge 2$ при R четном. Поэтому из неравенств (4) и (6) получается первая часть теоремы.

Вторая часть теоремы есть следствие ее первой части. Действительно, если бы какой-нибудь ненулевой многочлен по системе (q нечетное)

$$1,\dots,x^{j-1},x^{j+q},\dots,x^{n+q}$$

имел бы более $n+1$ корней, то этот же многочлен, рассматриваемый по системе

$$1,\dots,x^{j-1},x^{j+q-1},\dots,x^{n+1+(q-1)},$$

имел бы более $n+1$ корней, хотя по доказанной части она является чебышевской. $\square$

Замечание 4. Если $j=0$, то теорема остается в силе, когда q нечетное; при $j=0$ и q четном она неверна (например, система x^2, x^3, x^4 на отрезке $[-1,1]$ чебышевской не является).

Замечание 5. Если из системы степеней выбрасывать не подряд идущие куски, то в оставшейся системе закономерности типа теоремы 4 не соблюдаются.

4. Ниже все обозначения (в частности, $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ п. 3) сохраняются.

Теорема 4. *Пусть для пары (g,G) множество $L(g,G)$ непустое. Тогда для любых $n \ge 2$, $q \ge 0$, $j \ge 1$ возможны только следующие ситуации.*

1) *$F(g,G) = 1$, q четное. Множество $L(g,G)$ содержит единственный полином, который является избыточным ужом пары (g,G).*
2) *$F(g,G) = 1$, q нечетное. Если g_0 имеет хотя бы два полинома наилучшего приближения по системе $\varphi_0,\dots,\varphi_n$, то пара (g,G) имеет бесконечно много ужей. Если же g_0 по этой системе имеет единственный полином наилучшего приближения, то он и будет единственным ужом пары (g,G).*
3) *$F(g,G) < 1$. Тогда пара (g,G) порождает ровно два ужа при q четном и по меньшей мере два ужа для нечетного q.*

Доказательство. Для доказательства используются теоремы 2, 3. Добавим только, что в случае, когда q — нечетное число, подсистема $1,\dots,x^{j-1},\dots,x^{j+q+1},\dots,x^{n-1+(q+1)}$ является чебышевской. $\square$

Из следствия 1 теоремы 2 получается

Теорема 5. *Пусть*

$$L = \left\{ \sum_{i=0}^{j-1} c_i x^i + x^q \sum_{i=j}^{n} c_i x^i \right\}$$

— множество полиномов по системе $\varphi_0,\dots,\varphi_n$, $F(g,G) < 1$. Тогда решение задачи

$$c_k(l) \to \sup, \quad l \in L(g,G), \tag{з2}$$

является ужом, порожденным парой (g,G) при $k = j-1$ ($j \ge 2$) и $k = j+q$ ($j \ge 1$), когда q — нечетное число.

Если q — число четное, а $k = n + q$, то полином l^* является решением задачи (з2) *тогда и только тогда, когда l^* является ужом с бо́льшим старшим коэффициентом из двух ужей, порожденных парой* (g, G).

Замечание 6. Задача (з2) при $q = 0$ для $0 \le k \le n$ изучалась ранее в [9].

Литература

1. Karlin S. *Representation theorems for positive functions* // J. Math. Mech. – 1963. – V. 12. – № 4. – P. 599–618.
2. Дзядык В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* – М.: Наука, 1975. – 510 с.
3. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. *Об определении чебышевских ужей* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1994. – № 3. – С. 49–59.
4. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. *Знакочувствительные аппроксимации* (*пространство знакочувствительных весов, жесткость и свобода системы*) // Докл. РАН. – 1993. – Т. 332. – № 6. – С. 14–17.
5. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. *Знакочувствительные аппроксимации* (*вопросы единственности и устойчивости*) // Докл. РАН. – 1993. – Т. 333. – № 1. – С. 5–7.
6. Долженко Е.П., Севастьянов Е.А. *Метрические пространства полунепрерывных функций* // Матем. заметки. – 1994. – Т. 55. – № 3. – С. 48–59.
7. Загиров Н.Ш. *Рациональные ужи* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53. – № 6. – С. 33–40.
8. Загиров Н.Ш. *Несимметричная норма* // Сб. “Конструктивная теория функций и ее приложения”. – Махачкала, 1994. – С. 47–49.
9. Zagirov N.Sh. *Polynomials with extremal coefficients and snakes* // East J. on Approximations. – 1995. – V. 1. – № 2. – P. 231–248.
10. Полиа Г., Сегё Г. *Задачи и теоремы из анализа.* Ч. 2. – 3-е изд. – М.: Наука, 1978. – 432 с.

Дагестанский государственный университет

Поступили
первый вариант 08.07.1996
окончательный вариант 22.04.1997