ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 7 (470)

УДК 512.6

М.Г. ТАНКЕЕВА

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЦИКЛАХ НА КОМПЛЕКСНЫХ ТОРАХ

Степень трансцендентности поля мероморфных функций компактного комплексного многообразия является важнейшим инвариантом, связанным с геометрией многообразия. Например, из хорошо известной классификации компактных комплексных поверхностей следует, что на поверхности с одной алгебраически независимой мероморфной функцией существует пучок эллиптических кривых. Еще более экзотические многообразия без непостоянных мероморфных функций почти не изучены и традиционно рассматриваются в литературе при построении примеров, опровергающих обычную геометрическую интуицию [1].

Целью этой работы является изучение геометрии простых комплексных торов без непостоянных мероморфных функций, что позволяет получить некоторую информацию о геометрии многообразий, близких к таким торам в смысле теории деформаций комплексных структур.

Теорема 1. *Пусть V — связное гладкое замкнутое комплексно-аналитическое подмногообразие комплексного тора T. Если $0 < \dim(V) < \dim(T)$, то V нестабильно относительно малых деформаций тора T. Более того, если N — нормальное расслоение к V в T, то $H^1(V, N) \neq (0)$.*

Известно ([2], теорема 1), что из равенства $H^1(V, N) = (0)$ следует стабильность. Пусть $X \to S$ — версальное семейство Кураниши деформаций тора $T = X_0$, $\Delta \subset S$ — множество таких точек $s \in S$, что тор X_s прост и на X_s нет непостоянных мероморфных функций. Хорошо известно, что Δ плотно в S.

Теорема 2. *На простом комплексном торе T без непостоянных мероморфных функций любой аналитический цикл коразмерности не меньше 1 является 0-мерным.*

Доказательство. Известно [1], что на T нет ненулевых дивизоров. Докажем, что на T нет кривых. Пусть $C \subset T$ — неприводимая кривая. Можно считать, что $0 \in C$. Положим $C_n = C + \cdots + C$ (n слагаемых). Если $C_{n-1} \neq T$, то $\dim(C_n) = n$. Действительно, $C_{n-1} \subset C_n$ и $C_{n-1} \neq C_n$ (иначе $C_{n-1} = C_{n-1} + C_{n-1}$ и, следовательно, C_{n-1} — нетривиальная аналитическая подгруппа в T, что противоречит простоте тора T), поэтому $\dim(C_n) = 1 + \dim(C_{n-1})$, так что $\dim(C_n) = n$. Если $g = \dim(T)$, то C_{g-1} — дивизор на T, что противоречит теореме В.А. Краснова [1].

Пусть $S \subset T$ — неприводимое приведенное замкнутое комплексное подпространство минимальной строго положительной размерности на T. Ясно, что $\dim(S) > 1$, $\operatorname{Sing}(S)$ конечно, на S нет нетривиальных дивизоров и поэтому нет непостоянных мероморфных функций. Разрешая (изолированные) особенности S с помощью последовательных моноидальных преобразований T с неособыми центрами ([3], глава 0, § 7, теорема I'), получим гладкую модель S' пространства S, причем $S' \subset T'$, где T' получается из кэлерова многообразия T с помощью последовательных раздутий неособых центров, а поэтому T' — кэлерово многообразие. Следовательно, S' — кэлерово многообразие без непостоянных мероморфных функций. Для таких многообразий отображение Альбанезе $\alpha : S' \to \mathrm{Alb}(S')$ сюръективно [1]. В силу универсального свойства отображения Альбанезе существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Alb}(S') \\ \downarrow{\scriptstyle\tau} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ S & \xrightarrow{i} & T, \end{array}$$

где $\tau : S' \to S$ — бимероморфный морфизм, i — каноническое вложение, h — композиция гомоморфизма торов и сдвига. Ясно, что $h(\mathrm{Alb}(S'))$ — подтор в T, содержащий $i(S)$, поэтому из простоты T следует сюръективность h. Из сюръективности α и h следует неравенство $\dim(S') \geq \dim(T)$. Поэтому $S = T$. $\square$

Литература

1. Краснов В.А. *Компактные комплексные многообразия без мероморфных функций* // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17. – № 1. – С. 119–122.
2. Kodaira K. *On stability of compact submanifolds of complex manifolds* // Amer. J. Math. – 1963. – V. 85. – P. 79–94.
3. Хиронака Х. *Разрешение особенностей алгебраических многообразий над полями характеристики нуль* // Математика (сб. перев.). – 1965. – Т. 9. – № 6. – С. 2–70.

Владимирский государственный университет

Поступила
05.06.2000