ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.762

А.А. САЛИМОВ, Н. ЧЕНГИЗ

ПОДНЯТИЕ РИМАНОВЫХ МЕТРИК НА ТЕНЗОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ

1. Введение

В данной работе определяется диагональный лифт ${}^Dg$ римановой метрики g с гладкого многообразия M_n на тензорное расслоение $T^0_q(M_n)$ и изучаются киллинговы векторные поля и геодезические линии метрики ${}^Dg$.

Пусть M_n — n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞ и $T^0_q(M_n)$ — тензорное расслоение типа $(0,q)$ над M_n. В терминах локальных координат на многообразии M_n, заданных в окрестности $U \subset M_n$, тензор t в точке $x \in U$ определяется набором чисел $(x^i, t_{i_1\dots i_q})$, где x^i — координаты точки x, а $t_{i_1\dots i_q}$ — компоненты тензора t по отношению к натуральному реперу в точке x. Наборы $(x^i, t_{i_1\dots i_q}) = (x^i, x^{\overline{i}}) = (x^I)$, $i = 1,\dots,n$, $\overline{i} = n+1,\dots,n+n^q$, $I = 1,\dots,n+n^q$, являются локальными координатами элементов расслоения $T^0_q(M_n)$ в окрестности $\pi^{-1}(U)$, где π — естественная проекция $T^0_q(M_n)$ на M_n.

Пусть теперь M_n — риманово многообразие с метрикой g, g_{ji} — компоненты метрики g по отношению к локальным координатам в окрестности U, а Γ^h_{ji} — символы Кристоффеля метрики g в окрестности U. Пусть $F(M_n)$ обозначает кольцо дифференцируемых функций класса C^∞ на M_n, а $\mathcal{T}^r_s(M_n)$ — векторное пространство всех дифференцируемых класса C^∞ тензорных полей типа (r,s) на M_n. $\mathcal{T}^r_s(M_n)$ является модулем над $F(M_n)$. Рассмотрим векторное поле $X \in \mathcal{T}^1_0(M_n)$ и тензорное поле $w \in \mathcal{T}^0_q(M_n)$. Пусть X^h и $w_{h_1\dots h_q}$ — локальные компоненты полей X и w соответственно. Полный лифт ${}^CX \in \mathcal{T}^1_0(T^0_q(M_n))$ векторного поля X, горизонтальный лифт ${}^HX \in \mathcal{T}^1_0(T^0_q(M_n))$ векторного поля X и вертикальный лифт ${}^Vw \in \mathcal{T}^1_0(T^0_q(M_n))$ тензорного поля w на расслоение $T^0_q(M_n)$ имеют соответственно следующие компоненты по отношению к натуральному реперу $\{\partial_H\} = \{\partial_h, \partial_{\overline{h}}\}$, $x^{\overline{h}} = t_{h_1\dots h_q}$, на $T^0_q(M_n)$ [1]–[3]:

$$
\begin{gathered}
{}^CX = \begin{pmatrix} X^h \\ -\sum\limits_{\mu=1}^{q} t_{h_1\dots m\dots h_q}\partial_{h_\mu}X^m \end{pmatrix}, \quad {}^Vw = \begin{pmatrix} 0 \\ w_{h_1\dots h_q} \end{pmatrix}, \\
{}^HX = \begin{pmatrix} X^h \\ X^m \sum\limits_{\mu=1}^{q} \Gamma^s_{mh_\mu} t_{h_1\dots s\dots h_q} \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Для каждой координатной окрестности $U(x^h)$ на M_n определим

$$
\begin{gathered}
X_j = \frac{\partial}{\partial x^j} = \delta^h_j \frac{\partial}{\partial x^h} \in \mathcal{T}^1_0(M_n), \quad j = 1,\dots,n, \\
w_{\overline{j}} = dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q} = \delta^{j_1}_{h_1} \dots \delta^{j_q}_{h_q} dx^{h_1} \otimes \dots \otimes dx^{h_q} \in \mathcal{T}^0_q(M_n), \quad \overline{h} = n+1,\dots,n+n^q.
\end{gathered}
$$

Из (1) следует, что компоненты полей ${}^HX_j$ и ${}^Vw_{\overline{j}}$ по отношению к натуральному реперу $\{\partial_H\}$

имеют соответственно следующий вид:

$$
{}^H X_j = (A_j^H) = \begin{pmatrix} \delta_j^h \\ \sum\limits_{\mu=1}^{q} \Gamma_{jh_\mu}^s t_{h_1\ldots s\ldots h_q} \end{pmatrix},
$$

$$
{}^V w_{\overline{j}} = (A_{\overline{j}}{}^H) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{h_1}^{j_1} \ldots \delta_{h_q}^{j_q} \end{pmatrix},
$$

где δ_j^i — символы Кронекера. Будем называть набор $\{{}^H X_j, {}^V w_j\}$ репером, адаптированным к римановой связности ∇ в $\pi^{-1}(U) \subset T_q^0(M_n)$. Полагая

$$
A_j = {}^H X_j, \quad A_{\overline{j}} = {}^V w_{\overline{j}},
$$

будем обозначать адаптированный репер следующим образом: $\{A_\beta\} = \{A_j, A_{\overline{j}}\}$.

Легко проверить, что $n + n^q$ локальных 1-форм

$$
\begin{aligned}
\widetilde{A}^i &= (\widetilde{A}^i{}_H) = (\delta_h^i, 0) = dx^i, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (2) \\
\widetilde{A}^{\overline{i}} &= (\widetilde{A}^{\overline{i}}{}_H) = \Big(-\sum_{\mu=1}^{q} \Gamma_{hj_\mu}^s t_{i_1\ldots s\ldots i_q}, \delta_{i_1}^{h_1} \ldots \delta_{i_q}^{h_q} \Big) = \\
&= -\sum_{\mu=1}^{q} \Gamma_{hi_\mu}^s t_{i_1\ldots s\ldots i_q} dx^h + \delta_{i_1}^{h_1} \ldots \delta_{i_q}^{h_q} dx^{\overline{h}} = \\
&= \delta t_{i_1\ldots i_q}, \quad \overline{i} = n+1, \ldots, n+n^q,
\end{aligned}
$$

образуют корепер $\{\widetilde{A}^\alpha\} = \{\widetilde{A}^i, \widetilde{A}^{\overline{i}}\}$, дуальный адаптированному реперу $\{A_\beta\}$, т. е. $\widetilde{A}^\alpha{}_H A_\beta{}^H = \delta_\beta^\alpha$.

2. Диагональный лифт ${}^D g$ римановой метрики g на расслоение $T_q^0(M_n)$

Диагональным лифтом тензорного поля g на расслоение $T_q^0(M_n)$ относительно связности ∇ называется тензорное поле типа $(0, 2)$ на $T_q^0(M_n)$, определяемое локально следующим образом:

$$
{}^D g = {}^D g_{ji} \widetilde{A}^j \otimes \widetilde{A}^i + {}^D g_{\overline{j}\,\overline{i}} \widetilde{A}^{\overline{j}} \otimes \widetilde{A}^{\overline{i}} = g_{ji} dx^j \otimes dx^i + g^{j_1 i_1} \delta^{j_2 i_2} \ldots \delta^{j_q i_q} \delta t_{j_1\ldots j_q} \otimes \delta t_{i_1\ldots i_q}, \qquad (3)
$$

где δ^{ji} — символы Кронекера. Из (3) следует, что в адаптированном репере для тензора ${}^D g$ имеем

$$
{}^D g = ({}^D g_{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} g_{ji} & 0 \\ 0 & g^{j_1 i_1} \delta^{j_2 i_2} \ldots \delta^{j_q i_q} \end{pmatrix}. \qquad (4)
$$

Компоненты тензора ${}^D g$ в натуральном репере имеют вид

$$
{}^D g = ({}^D g_{JI}) = \begin{pmatrix} {}^D g_{ji} & {}^D g_{j\overline{i}} \\ {}^D g_{\overline{j}\,\overline{i}} & {}^D g_{\overline{j}\,\overline{i}} \end{pmatrix},
$$

$$
{}^D g_{ji} = g_{ji} + g^{j_1 i_1} + \delta^{j_2 i_2} \ldots \delta^{j_q i_q} \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{q} \Gamma_{jj_\mu}^m t_{j_1\ldots m\ldots j_q} \Gamma_{ii_\lambda}^s t_{i_1\ldots s\ldots i_q},
$$

$$
{}^D g_{j\overline{i}} = -g^{j_1 i_1} \delta^{j_2 i_2} \ldots \delta^{j_q i_q} \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma_{jj_\mu}^m t_{j_1\ldots m\ldots j_q},
$$

$$
{}^D g_{\overline{j}\,\overline{i}} = -g^{j_1 i_1} \delta^{j_2 i_2} \ldots \delta^{j_q i_q} \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma_{ii_\mu}^s t_{i_1\ldots s\ldots i_q},
$$

$$
{}^D g_{\overline{j}\,\overline{i}} = g^{j_1 i_1} \delta^{j_2 i_2} \ldots \delta^{j_q i_q}.
$$

Для обозначения компонентов объектов в адаптированном репере будем использовать индексы $\alpha = (i, \bar{i})$, $\beta = (j, \bar{j}) = 1, \ldots, n(1 + n^{q-1})$, а для обозначения компонентов объектов в натуральном репере будем использовать индексы $I = (i, \bar{i})$, $J = (j, \bar{j}) = 1, \ldots, n(1 + n^{q-1})$.

Из (4) следует, что ${}^{D}g$ — риманова метрика на $T_q^0(M_n)$.

Замечание. Метрика ${}^{D}g$ аналогична метрике риманова расширения на касательном расслоении $T_0^1(M_n)$, изучавшейся в [4] (см. также [5], с. 155; на расслоении реперов аналогичная метрика рассматривалась в [6]). В работе [7] изучалась метрика Сасаки на тензорном расслоении $T_q^p(M_n)$, $p > 1$.

Из (1) и (2) следует, что в адаптированном репере компоненты лифтов ${}^{C}X$, ${}^{H}X$ и ${}^{V}w$ имеют соответственно следующий вид:

$$
\begin{aligned}
({}^{C}X^{\alpha}) &= \begin{pmatrix} x^i \\ \sum\limits_{\mu=1}^{q} t_{i_1 \ldots m \ldots i_q} \nabla_{i_\mu} X^m \end{pmatrix}, \\
({}^{H}X^{\alpha}) &= \begin{pmatrix} X^i \\ 0 \end{pmatrix}, \\
({}^{V}w^{\alpha}) &= \begin{pmatrix} 0 & w_{i_1 \ldots i_q} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Из (4) и (5) следует

$$
{}^{D}g({}^{H}X, {}^{H}Y) = g(X, Y), \tag{6}
$$

$$
{}^{D}g({}^{V}w, {}^{H}Y) = 0. \tag{7}
$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Пусть $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$. Тогда скалярное произведение горизонтальных лифтов ${}^{H}X$ и ${}^{H}Y$ на $T_q^0(M_n)$ в метрике ${}^{D}g$ совпадает с вертикальным лифтом скалярного произведения X и Y на M_n.*

Из (4) и (5) также следует

$$
{}^{D}g({}^{V}w, {}^{V}\theta) = \sum_{(i)} {}^{V}(g(w_{(i)}\theta_{(i)})), \tag{8}
$$

$$
{}^{D}g({}^{V}w, {}^{C}Y) = \sum_{(i)} {}^{V}g(w_{(i)}, \iota(\nabla X)_{(i)}), \tag{9}
$$

$$
{}^{D}g({}^{C}x, {}^{C}Y) = {}^{V}(g(X, Y)) + \sum_{(i)} {}^{V}(g(\iota(\nabla X)_{(i)}, \iota(\nabla Y)_{(i)})), \tag{10}
$$

где $(i) = (i_1 \ldots i_q)$, $\iota(\nabla X)_{(i)} = -\sum\limits_{\mu=1}^{q} t_{i_1 \ldots m \ldots i_q} \nabla_{i_\mu} X^m \partial_r$.

Поскольку модуль векторных полей на расслоении $T_q^0(M_n)$ порождается горизонтальными (или полными) и вертикальными лифтами векторных полей с многообразия M_n, то диагональный лифт ${}^{D}g$ римановой метрики g на расслоении $T_q^0(M_n)$ полностью определяется формулами (6)–(8) (или (8)–(10)).

Замечание. Напомним, что любое тензорное поле $\tilde{g} \in \mathcal{T}_2^0(T_1^0(M_n))$ типа $(0, 2)$ на кокасательном расслоении $T_1^0(M_n)$ $(p = 0)$ полностью определяется своим действием на полных лифтах векторных полей ([5], с. 237). Поэтому метрика ${}^{D}g \in \mathcal{T}_2^0(T_1^0(M_n))$ полностью определяется формулами (10).

3. Риманова связность метрики ${}^Dg$

Объект неголономности $\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha}$ репера $\{A_\beta\}$ определяется формулами

$$[A_\gamma, A_\beta] = \Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} A_\alpha$$

или

$$\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} = (A_\gamma A_\beta{}^H - A_\beta A_\gamma{}^H)\widetilde{A}^{\alpha}{}_H.$$

Поскольку $A_j = \partial_j + \sum\limits_{\mu=1}^{q} \Gamma^s_{jh_\mu} t_{h_1\ldots s\ldots h_q} \partial_{\overline{h}}$, $A_{\overline{j}} = \partial_{\overline{j}}$, то компоненты $\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha}$ имеют вид

$$\begin{gathered}
\Omega_{\overline{i}j}{}^{\overline{s}} = -\Omega_{j\overline{i}}{}^{\overline{s}} = \sum_{\mu=1}^{q} \Gamma^t_{js_\mu} \delta^{i_1}_{s_1} \ldots \Gamma^{i_\mu}_{js_\mu} \ldots \delta^{i_q}_{s_q}, \\
\Omega_{ij}{}^{\overline{s}} = -\Omega_{ji}{}^{\overline{s}} = \sum_{\mu=1}^{q} R_{ijs_\mu}{}^{t} t_{s_1\ldots t\ldots s_q}, \\
\Omega_{ij}{}^{s} = \Omega_{\overline{i}\,\overline{j}}{}^{s} = \Omega_{i\overline{j}}{}^{s} = \Omega_{\overline{i}\,\overline{j}}{}^{s} = \Omega_{\overline{i}\,\overline{j}}{}^{\overline{s}} = 0,
\end{gathered} \tag{11}$$

где $R_{kji}{}^{h}$ — компоненты тензора кривизны римановой связности ∇.

Компоненты римановой связности, определяемой метрикой ${}^Dg$, задаются формулами

$${}^D\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\, {}^Dg^{\alpha\varepsilon}(A_\gamma {}^Dg_{\varepsilon\beta} A_\beta {}^Dg_{\gamma\varepsilon} - A_\varepsilon {}^Dg_{\gamma\beta}) + \frac{1}{2}(\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} + \Omega^{\alpha}{}_{\gamma\beta} + \Omega^{\alpha}{}_{\beta\gamma}), \tag{12}$$

где $\Omega^{\alpha}{}_{\gamma\beta} = {}^Dg^{\alpha\varepsilon}\, {}^Dg_{\delta\beta} \Omega_{\varepsilon\gamma}{}^{\delta}$, а ${}^Dg^{\alpha\varepsilon}$ — контравариантные компоненты метрики ${}^Dg$ в адаптированном репере,

$$({}^Dg^{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} g^{ji} & 0 \\ 0 & g_{j_1i_1}\delta_{j_2i_2}\ldots\delta_{j_qi_q} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Учитывая (11)–(13), имеем

$$\begin{gathered}
{}^D\Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ij}, \quad {}^D\Gamma^{\overline{h}}_{i\overline{j}} = -\sum_{\mu=1}^{q} \delta^{j_1}_{h_1} \ldots \Gamma^{j_\mu}_{ih_\mu} \ldots \delta^{j_q}_{h_q}, \\
{}^D\Gamma^{h}_{i\overline{j}} = \frac{1}{2} g^{hn} g^{m_1j_1} \delta^{m_2j_2} \ldots \delta^{m_qj_q} \sum_{\mu=1}^{q} R_{nim_\mu}{}^{t} t_{m_1\ldots t\ldots mi_q}, \\
{}^D\Gamma^{h}_{\overline{i}j} = \frac{1}{2} g^{hn} g^{m_1i_1} \delta^{m_2i_2} \ldots \delta^{m_qi_q} \sum_{\mu=1}^{q} R_{hjm_\mu}{}^{t} t_{m_1\ldots t\ldots m_q}, \\
{}^D\Gamma^{\overline{h}}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{q} R_{ijh_\mu}{}^{t} t_{h_1\ldots t\ldots h_q}, \\
{}^D\Gamma^{\overline{h}}_{\overline{i}\,\overline{j}} = 0, \quad {}^D\Gamma^{h}_{\overline{i}\,\overline{j}} = 0, \quad {}^D\Gamma^{\overline{h}}_{\overline{i}j} = 0.
\end{gathered} \tag{14}$$

Из (5) и (14) следует, что ковариантные производные ${}^D\nabla_{{}^V\theta}{}^Vw$, ${}^D\nabla_{{}^HX}{}^HY$, ${}^D\nabla_{{}^V\theta}{}^HY$ и ${}^D\nabla_{{}^HX}{}^Vw$ имеют соответственно следующие компоненты:

$$\begin{gathered}
{}^D\nabla_{{}^V\theta}{}^Vw = 0, \\
{}^D\nabla_{{}^HX}{}^HY = \begin{pmatrix} X^i\nabla_iY^k \\ \frac{1}{2}X^iY^j \sum\limits_{\mu=1}^{q} R_{ijk_\mu}{}^{s} t_{k_1\ldots s\ldots k_q} \end{pmatrix} = {}^H(\nabla_XY) + \frac{1}{2}\gamma R(X,Y), \\
{}^D\nabla_{{}^V\theta}{}^HY = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}Y^j\theta_{i_1\ldots i_q} g^{hn} g^{m_1i_1}\delta^{m_2i_2}\ldots\delta^{m_qi_q} \sum\limits_{\mu=1}^{q} R_{hjm_\mu}{}^{t} t_{m_1\ldots t\ldots m_q} \\ 0 \end{pmatrix},
\end{gathered} \tag{15}$$

$$
{}^D\nabla_{{}^HX}{}^Vw = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}X^i w_{j_1\ldots j_q} g^{hn} g^{m_1j_1}\delta^{m_2j_2}\ldots\delta^{m_qj_q}\sum\limits_{\mu=1}^{q} R_{nim_\mu}{}^t t_{m_1\ldots t\ldots m_q} \\ X^i(\partial_i w_{h_1\ldots h_q} - \Gamma^t_{ih_\mu} w_{h_1\ldots t\ldots h_q}) \end{pmatrix},
$$

где $\gamma R(X,Y)$ имеет вид [8]

$$
\gamma R(X,Y) = \begin{pmatrix} 0 \\ X^iY^j \sum\limits_{\mu=1}^{q} R_{ijk_\mu}{}^s t_{k_1\ldots s\ldots k_q} \end{pmatrix}.
$$

Поскольку модуль векторных полей на расслоении $T^0_q(M_n)$ порождается горизонтальными и вертикальными лифтами векторных полей с многообразия M_n, то формулы (15) полностью определяют риманову связность ${}^D\nabla$ метрики ${}^Dg$.

Определим теперь горизонтальный лифт ${}^H\nabla$ римановой связности ∇ с многообразия M_n на расслоение $T^0_q(M_n)$ следующими условиями:

$$
\begin{aligned}
&{}^H\nabla_{{}^Vw}{}^V\theta = 0, && {}^H\nabla_{{}^Vw}{}^HY = 0,\\
&{}^H\nabla_{{}^HX}{}^V\theta = {}^V(\nabla_X\theta), && {}^H\nabla_{{}^HX}{}^HY = {}^H(\nabla_XY)
\end{aligned} \tag{16}
$$

для любых $X,Y\in\mathcal{T}^1_0(M_n)$, $w,\theta\in\mathcal{T}^0_q(M_n)$. В натуральном репере на расслоении $T^0_q(M_n)$ горизонтальный лифт ${}^H\nabla$ связности ∇ имеет компоненты

$$
\begin{aligned}
&{}^H\Gamma^i_{ms} = \Gamma^i_{ms}, \quad {}^H\Gamma^i_{\overline{m}s} = 0, \quad {}^H\Gamma^i_{m\overline{s}} = 0, \quad {}^H\Gamma^i_{\overline{m}\,\overline{s}} = 0,\\
&{}^H\Gamma^{\overline{i}}_{\overline{m}s} = -\sum_{c=1}^{q}\delta^{m_1}_{i_1}\ldots\Gamma^{m_c}_{si_c}\ldots\delta^{m_1}_{i_q},\\
&{}^H\Gamma^{\overline{i}}_{m\overline{s}} = -\sum_{c=1}^{q}\delta^{s_1}_{i_1}\ldots\Gamma^{s_c}_{mi_c}\ldots\delta^{s_q}_{i_q},\\
&{}^H\Gamma^{\overline{i}}_{ms} = \sum_{c=1}^{q}(-\partial_m\Gamma^a_{si_c} + \Gamma^r_{mi_c}\Gamma^a_{sr} + \Gamma^r_{ms}\Gamma^a_{ri_c})t_{i_1\ldots a\ldots i_q} +\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{q}\sum_{c=1}^{q}(\Gamma^k_{mi_c}\Gamma^r_{si_b} + \Gamma^r_{mi_b}\Gamma^l_{si_c})t_{i_1\ldots r\ldots l\ldots i_q},\\
&{}^H\Gamma^{\overline{i}}_{\overline{m}\,\overline{s}} = 0 \quad (x^{\overline{i}} = t_{i_1\ldots i_q}, \quad x^{\overline{m}} = t_{m_1\ldots m_q}, \quad x^{\overline{x}} = t_{s_1\ldots s_q}).
\end{aligned}
$$

Поскольку модуль векторных полей на $\pi^{-1}(U)\subset T^0_q(M_n)$ порождается векторными полями ${}^HX_i$ и ${}^Vw_{\overline{i}}$, всякое тензорное поле типа $(1,2)$ на $\pi^{-1}(U)$ определяется своим действием на ${}^HX_i$ и ${}^Vw_{\overline{i}}$. Пусть $S\in\mathcal{T}^1_2(M_n)$ — тензорное поле типа $(1,2)$ на многообразии M_n. Тензорное поле ${}^HS\in(\mathcal{T}^1_2(T^0_q(M_n)))$, определяемое соотношениями

$$
\begin{aligned}
&{}^HS({}^HX,{}^HY) = {}^H(S(X,Y)) && \forall X,Y\in\mathcal{T}^1_0(M_n),\\
&{}^HS({}^Vw,{}^HY) = {}^V(S_Y(w)) && \forall w\in\mathcal{T}^0_q(M_n),\\
&{}^HS({}^HX,{}^V\theta) = {}^V(S_X(\theta)) && \forall \theta\in\mathcal{T}^0_q(M_n),\\
&{}^HS({}^Vw,{}^V\theta) = 0,
\end{aligned} \tag{17}
$$

где $S_X(w), S_X(\theta)\in\mathcal{T}^0_q(M_n)$, назовем горизонтальным лифтом поля $S\in\mathcal{T}^1_2(M_n)$ на $T^0_q(M_n)$.

Пусть T и $\widetilde{T}$ — тензоры кручения связностей ∇ и ${}^H\nabla$ соответственно, а R — тензор кривизны связности ∇. Непосредственно по определению тензора кручения линейной связности имеем

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{T}({}^Vw,{}^V\theta) = {}^H\nabla_{{}^Vw}{}^V\theta - {}^H\nabla_{{}^V\theta}{}^Vw - [{}^Vw,{}^V\theta],\\
&\widetilde{T}({}^Vw,{}^HY) = {}^H\nabla_{{}^Vw}{}^HY - {}^H\nabla_{{}^HY}{}^Vw - [{}^Vw,{}^HY],\\
&\widetilde{T}({}^HX,{}^HY) = {}^H\nabla_{{}^HX}{}^HY - {}^H\nabla_{{}^HY}{}^HX - [{}^HX,{}^HY].
\end{aligned}
$$

Кроме того, [9]

$$[{}^V w, V\theta] = 0, \quad [{}^V w, {}^H Y] = -{}^V(\nabla_Y w),$$
$$[{}^H X, {}^H Y] = {}^H[X, Y] + \gamma R(X, Y). \tag{18}$$

Принимая во внимание (16)–(18), получаем

$$\widetilde{T}({}^V w, {}^V \theta) = 0, \quad \widetilde{T}({}^V w, {}^H Y) = 0,$$
$$\widetilde{T}({}^H X, {}^H Y) = {}^H T({}^H X, {}^H Y) - \gamma R(X, Y) = {}^H(T(X, Y)) - \gamma R(X, Y) = -\gamma R(X, Y).$$

Таким образом, в общем случае связность ${}^H\nabla$ имеет кручение.

Рассмотрим на $T^0_q(M_n)$ тензор

$${}^D\widetilde{g} = \widetilde{g}^{ji} A_j \otimes A_i + g_{j_1 i_1} \delta_{j_2 i_2} \dots \delta_{j_q i_q} A_{\overline{j}} \otimes A_{\overline{i}}. \tag{19}$$

Из (16) имеем

$$\begin{aligned}
&{}^H\nabla_{{}^H X} A_i = X^s \Gamma^h_{si} A_h,\\
&{}^H\nabla_{{}^H X} A_{\overline{i}} = -X^s \sum_{\mu=1}^{q} \delta^{i_1}_{h_1} \dots \Gamma^{i+\mu}_{s h_\mu} \dots \delta^{i_q}_{h_q} A_{\overline{h}},\\
&{}^H\nabla_{{}^V w} A_i = 0,\\
&{}^H\nabla_{{}^V w} A_{\overline{i}} = 0
\end{aligned} \tag{20}$$

для любых $X \in \mathcal{T}^1_0(M_n)$, $w \in \mathcal{T}^0_q(M_n)$. Учитывая (19) и (20), получаем

$$\begin{aligned}
&{}^H\nabla_{{}^H X} {}^D\widetilde{g} = {}^D(\nabla_X \widetilde{g}),\\
&{}^H\nabla_{{}^V w} {}^D\widetilde{g} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Если $\nabla_X g = 0$, то $\nabla_X \widetilde{g} = 0$. Согласно (21), а также соотношению $\nabla_X g = 0$ и ${}^D g_{\alpha\gamma} {}^D\widetilde{g}^{\gamma\beta} = \delta^\beta_\alpha$, имеем

$$\begin{aligned}
&{}^H\nabla_{{}^H X} {}^D g = 0,\\
&{}^H\nabla_{{}^V w} {}^D g = 0.
\end{aligned}$$

В результате доказана

Теорема 2. *Пусть M_n — риманово многообразие с метрическим тензором g. Тогда горизонтальный лифт ${}^H\nabla$ римановой связности ∇ является метрической связностью по отношению к ${}^D g$.*

4. Киллинговы векторные поля

Векторное поле $X \in \mathcal{T}^1_0(M_n)$ на римановом многообразии (M_n, g) называется инфинитезимальной изометрией или киллинговым векторным полем, если $\mathcal{L}_X g = 0$ ([10], с. 178). В терминах локальных координат на M_n это условие принимает вид

$$\mathcal{L}_X g_{ji} = X^k \nabla_k g_{ji} + g_{ki} \nabla_j X^k + g_{jk} \nabla_j X^k = \nabla_j X_i + \nabla_i X_j = 0,$$

где g_{ji} — компоненты метрического тензора g, X^k — компоненты векторного поля X, а ∇ — риманова связность тензора g.

Ковекторные поля на расслоении $T^0_q(M_n)$, ассоциированные посредством метрики ${}^Dg$ соответственно с полным ${}^CX$ и горизонтальным ${}^HX$ лифтами векторного поля X, имеют следующие компоненты по отношению к адаптированному реперу:

$$({}^CX_\beta) = ({}^Dg_{\beta\alpha}{}^CX^\alpha) = \left(X_j, -g^{j_1i_1}\delta^{j_2i_2}\dots\delta^{j_qi_q}\sum_{\mu=1}^{q} t_{i_1\dots m\dots i_q}\nabla_{i_u}X^m\right),$$
$$({}^HX_\beta) = ({}^Dg_{\beta\alpha}{}^HX^\alpha) = (X_j, 0).$$

Производные Ли тензора ${}^Dg$ по отношению к векторным полям ${}^CX$ и ${}^HX$ имеют соответственно компоненты

$$(\mathcal{L}_{{}^CX}{}^Dg_{\beta\alpha}) = ({}^D\nabla_\beta{}^CX_\alpha + {}^D\nabla_\alpha{}^CX_\beta) = \frac{1}{2}(A_{(\beta}{}^CX_{\alpha)} + {}^D\Gamma^\gamma_{(\beta\alpha)}{}^CX_\gamma) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{{}^CX}{}^Dg_{ji} & \mathcal{L}_{{}^CX}{}^Dg_{j\bar i} \\ \mathcal{L}_{{}^CX}{}^Dg_{\bar j\bar i} & \mathcal{L}_{{}^CX}{}^Dg_{\bar j\bar i}\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{{}^CX}{}^Dg_{ji} = \nabla_jX_i + \nabla_iX_j,\\
&\mathcal{L}_{{}^CX}{}^Dg_{j\bar i} = -\sum_{\mu=1}^{q}(\nabla_j\nabla_{l_\mu}X_s + R_{njl_\mu s}X^n)t_{l_1\dots t\dots l_q}g^{st}g^{i_1l_1}\delta^{i_2l_2}\dots\delta^{i_ql_q},\\
&\mathcal{L}_{{}^CX}{}^Dg_{\overline{ji}} = -\sum_{\mu=1}^{q}(\nabla_i\nabla_{l_\mu}X_s + R_{nil_\mu s}X^n)t_{l_1\dots t\dots l_q}g^{st}g^{j_1l_1}\delta^{j_2l_2}\dots\delta^{j_ql_q},\\
&\mathcal{L}_{{}^CX}{}^Dg_{\bar j\bar i} = -\sum_{\mu=1}^{q}\nabla_{l_\mu}X^m\delta^{j_1}_{l_1}\dots\delta^{j_\mu}_{m}\dots\delta^{j_q}_{l_q}g^{l_1i_1}\delta^{l_2i_2}\dots\delta^{l_qi_q} +\\
&\qquad\qquad + \nabla_{l_\mu}X^m\delta^{i_1}_{l_1}\dots\delta^{i_\mu}_{m}\dots\delta^{i_q}_{l_q}g^{l_1j_1}\delta^{l_2j_2}\dots\delta^{l_qj_q}),
\end{aligned}\tag{22}$$

$$(\mathcal{L}_{{}^HX}{}^Dg_{\beta\alpha}) = ({}^D\nabla_\beta{}^HX_\alpha + {}^D\nabla_\alpha{}^HX_\beta) = \frac{1}{2}(A_{(\beta}{}^HX_{\alpha)} + {}^D\Gamma^\gamma_{(\beta\alpha)}{}^HX_\gamma) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{{}^HX}{}^Dg_{ji} & \mathcal{L}_{{}^HX}{}^Dg_{j\bar i} \\ \mathcal{L}_{{}^HX}{}^Dg_{\bar j\bar i} & \mathcal{L}_{{}^HX}{}^Dg_{\bar j\bar i}\end{pmatrix};$$

$$\begin{cases}
\mathcal{L}_{{}^HX}{}^Dg_{ji} = \nabla_jX_i + \nabla_iX_j,\\
\mathcal{L}_{{}^HX}{}^Dg_{j\bar i} = -\sum\limits_{\mu=1}^{q} R_{njm_\mu}{}^tX^nt_{m_1\dots t\dots m_q}g^{m_1i_1}\delta^{m_2i_2}\dots\delta^{m_qi_q},\\
\mathcal{L}_{{}^HX}{}^Dg_{\bar ji} = -\sum\limits_{\mu=1}^{q} R_{nim_\mu}{}^tX^nt_{m_1\dots t\dots m_q}g^{m_1j_1}\delta^{m_2j_2}\dots\delta^{m_qj_q},\\
\mathcal{L}_{{}^HX}{}^Dg_{\bar j\bar i} = 0.
\end{cases}$$

Из $\mathcal{L}_Xg_{ji} = \nabla_jX_i + \nabla_iX_j = 0$ следует ([10], с. 178), что $\nabla_i\nabla_kX_t + R_{likt}X^l = 0$. Тогда из (22) следует, что если X — киллингово векторное поле на M_n и $\nabla_jX_i = 0$, то его полный лифт ${}^CX$ на расслоение $T^0_q(M_n)$ будет также киллинговым векторным полем.

А если для киллингова векторного поля X на M_n выполняется $\nabla_i\nabla_kX_h = 0$, то $R^h_{jtr}X_h = 0$ и $R_{hjm}{}^tX^h = 0$. В результате получим

Теорема 3. *Пусть M_n — риманово многообразие с метрическим тензором g и X — киллингово векторное поле на M_n. Тогда*

1) *если $\nabla_jX_i = 0$, то полный лифт ${}^CX$ векторного поля X на расслоение $T^0_q(M_n)$ будет киллинговым векторным полем для метрики ${}^Dg$.*

2) *если $\nabla_j\nabla_kX_i = 0$, то горизонтальный лифт ${}^HX$ векторного поля X на расслоение $T^0_q(M_n)$ будет киллинговым векторным полем для метрики ${}^Dg$.*

5. Геодезические на расслоении $T_q^0(M_n)$ с метрикой ${}^Dg$

Пусть C — кривая на многообразии M_n, локально определяемая уравнениями $x^h = x^h(t)$, а $w_{h_1\ldots h_q}(t)$ — тензорное поле типа $(0,q)$ вдоль C. Рассмотрим на расслоении $T_q^0(M_n)$ кривую $\widetilde{C}$, определяемую уравнениями

$$x^h = x^h(t), \quad x^{\widetilde{h}} = t_{h_1\ldots h_q} = w_{h_1\ldots h_q}(t).$$

Если вдоль кривой C выполняется

$$\frac{\delta w_{h_1\ldots h_q}}{dt} = 0, \tag{23}$$

где δ — абсолютное дифференцирование, то кривая $\widetilde{C}$ называется горизонтальным лифтом кривой C. Таким образом, при заданных начальных условиях $w_{h_1\ldots h_q}(t_0) = (w_{h_1\ldots h_q})_0$ существует единственный горизонтальный лифт кривой C.

Рассмотрим дифференциальные уравнения геодезических линий на расслоении $T_q^0(M_n)$ с метрикой ${}^Dg$. Если параметр t представляет собой длину дуги кривой $x^A = x^A(t)$ на $T_q^0(M_n)$, то в координатах $(x^i, x^{\bar{i}}) = (x^i, t_{j_1\ldots j_q})$ уравнения геодезических на $T_q^0(M_n)$ имеют хорошо известный вид

$$\frac{\delta^2 x^A}{dt^2} = \frac{d^2 x^A}{dt^2} + {}^D\Gamma^A_{CB}\frac{dx^C}{dt}\frac{dx^B}{dt} = 0. \tag{24}$$

В адаптированном репере $\{A_i, A_{\bar{i}}\}$ уравнения (24) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^\alpha}{dt}\right) + {}^D\Gamma_{\delta\beta}^{\alpha}\left(\frac{\theta^\gamma}{dt}\right)\left(\frac{\theta^\beta}{dt}\right) = 0,$$

где (2)

$$\frac{\theta^h}{dt} = \widetilde{A}^h{}_A\frac{dx^A}{dt} = \frac{dx^h}{dt}, \quad \frac{\theta^{\overline{h}}}{dt} = \widetilde{A}^{\overline{h}}{}_A\frac{dx^A}{dt} = \frac{\delta t_{h_1\ldots h_q}}{dt}.$$

Подставляя выражения (14) для коэффициентов связности на расслоении $T_q^0(M_n)$, получим

$$\begin{gathered}
\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + g^{hn}g^{m_1j_1}\delta^{m_2j_2}\ldots\delta^{m_qj_q}\sum_{\mu=1}^{q}R_{nim_\mu}{}^t t_{m_1\ldots t\ldots m_q}\frac{dx^i}{dt}\frac{dt_{j_1\ldots j_q}}{dt} = 0,\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta t_{h_1\ldots h_q}}{dt}\right) + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{q}R_{ijh_\mu}{}^n t_{h_1\ldots n\ldots h_q}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} - \sum_{\mu=1}^{q}\Gamma^n_{ih_\mu}\frac{dx^i}{dt}\frac{\delta t_{h_1\ldots n\ldots h_q}}{dt} = 0.
\end{gathered} \tag{25}$$

Так как тензор кривизны $R_{jim}{}^m$ антисимметричен по индексам i и j, то в уравнениях (25) $R_{jih}{}^m\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt} = 0$. Таким образом, кривая $x^i = x^i(t)$, $t_{h_1\ldots h_q} = t_{h_1\ldots h_q}(t)$ на расслоении $T_q^0(M_n)$ с метрикой ${}^Dg$ является геодезической тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнениям

$$\begin{gathered}
\text{(a)}\quad \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + g^{hn}g^{m_1j_1}\delta^{m_2j_2}\ldots\delta^{m_qj_q}\sum_{\mu=1}^{q}R_{nim_\mu}{}^t t_{m_1\ldots t\ldots m_q}\frac{dx^i}{dt}\frac{dt_{j_1\ldots j_q}}{dt} = 0,\\
\text{(b)}\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta t_{h_1\ldots h_q}}{dt}\right) - \sum_{\mu=1}^{q}\Gamma^n_{ih_\mu}\frac{dx^i}{dt}\frac{\delta t_{h_1\ldots n\ldots h_q}}{dt} = 0.
\end{gathered} \tag{26}$$

Если кривая, удовлетворяющая уравнениям (26), лежит в слое расслоения $T_q^0(M_n)$, определяемом уравнениями $x^h = \mathrm{const}$, то уравнение (24 (b)) сводится к уравнению

$$\frac{d^2 t_{h_1\ldots h_q}}{dt^2} = 0,$$

произвольное решение которого имеет вид $t_{h_1\ldots h_q} = a_{h_1\ldots h_q}t + b_{h_1\ldots h_q}$, где $a_{h_1\ldots h_q}$ и $b_{h_1\ldots h_q}$ постоянные. Таким образом, получается

Теорема 4. *Геодезическая линия* $x^h = x^{h(t)}$, $t_{h_1\ldots h_q} = t_{h_1\ldots h_q}(t)$, *лежащая в слое расслоения* $T_q^0(M_n)$ *с метрикой* ${}^Dg$, *имеет следующие уравнения*: $x^h = c^h$, $t_{h_1\ldots h_q} = a_{h_1\ldots h_q}t + b_{h_1\ldots h_q}$, *где* $a_{h_1\ldots h_q}$, $b_{h_1\ldots h_q}$ *и* c^h *— константы.*

Как следствие уравнений (23) и (26) получаем следующий результат.

Теорема 5. *Всякий горизонтальный лифт геодезической линии риманова многообразия* (M_n, g) *является геодезической линией на расслоении* $T_q^0(M_n)$ *с метрикой* ${}^Dg$.

Литература

1. Салимов А.А. *Новый метод в теории лифтов тензорных полей на тензорное расслоение* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 3. – P. 69–75.
2. Salimov A.A. *The generalized Yano–Ako operator and the complete lift of tensor fields* // Tensor. N.S. Japan. – 1994. – V. 55. – № 2. – P. 142–146.
3. Salimov A.A., Magden A. *Complete lifts of tensor fields on a pure cross-section in the tensor bundle* $T_q^1(M_n)$ // Note Di Matematica. – 1998. – V. 18. – № 1. – P. 27–37.
4. Sasaki S. *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds* // Tohoku Math. J. – 1958. – V. 10. – P. 338–354.
5. Yano K., Ishihara S. *Tangent and cotangent bundles.* – New York: Marcel Dekker Inc., 1973. – 423 p.
6. Cordero L.A., Dodson C.T.J., de Leon M. *Differential geometry of frame bundles.* – Kluwer Acad. Publ., 1989. – 234 p.
7. Cengiz N., Salimov A.A. *Diagonal lift in the tensor bundle and its application* // Appl. Math. and Comput. – 2003. – V. 142. – P. 309–319.
8. Cengiz N., Salimov A.A. *Complete lifts of derivations to tensor bundles* // Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 2002. – V. 8. – № 3. – P. 75–82.
9. Ledger A., Yano K. *Almost complex structures on tensor bundles* // J. Dif. Geom. – 1976. – V. 1. – P. 355–368.
10. Yano K. *The theory of Lie derivatives and its applications.* – Amsterdam, 1957. – 298 p.

Университет Ататюрка
Эрзурум (Турция)

Поступила
07.12.2002