ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 1 (488)

УДК 519.632

*Г.И. ШИШКИН*

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НА АДАПТИВНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В области $\overline{D}$ с криволинейной границей рассматривается краевая задача для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии. Классические разностные схемы для такой задачи сходятся лишь при условии $\varepsilon \gg N_1^{-1} + N_2^{-1}$, где $\varepsilon$ — возмущающий параметр, величины $N_1$ и $N_2$ определяют число узлов сетки по осям $x_1$ и $x_2$. Исследуются схемы на прямоугольных сетках, локально сгущающихся в окрестности пограничного слоя в том случае, когда ориентация шаблона разностной схемы в области сгущения не зависит от направления нормали к границе. Показано, что в классе классических разностных аппроксимаций задачи на адаптивных "кусочно-равномерных" сетках (сгущающихся в слое) не существует схем, сходящихся $\varepsilon$-равномерно и даже при условии $\varepsilon \approx P^{-1}$, где $P$ — число узлов сеточной области. Таким образом, для построения схем, сходящихся на $\overline{D}$ при условии $\varepsilon \le P^{-1}$, использование сеток, подстраивающихся в погранслое к криволинейной границе, является необходимым. Строятся схемы, сходящиеся на $\overline{D}$ при более слабом условии, накладываемом на $\varepsilon$, чем в случае традиционных разностных схем, а также $\varepsilon$-равномерно сходящиеся схемы, однако сходящиеся вне пограничного слоя и на достаточно узких множествах, "пересекающих" пограничный слой.

## 1. Введение

При исследовании процессов тепло-массообмена в средах с малыми коэффициентами теплопроводности/диффузии возникают краевые задачи для сингулярно возмущенных уравнений в частных производных (с возмущающим параметром $\varepsilon$ — коэффициентом $\varepsilon^2$ при старших производных уравнений). Решения таких задач при малых значениях параметра $\varepsilon$ имеют особенности типа пограничных слоев.

Ошибки решений хорошо известных численных методов существенно зависят от величины параметра $\varepsilon$ и могут быть большими при малых значениях $\varepsilon$. Таким образом, актуальной является проблема разработки специальных численных методов для сингулярно возмущенных задач в областях произвольной формы. При разработке таких методов широко используются сгущающиеся в погранслоях сетки, адаптирующиеся к границе области; шаг таких "анизотропных" сеток в направлении нормали к границе области зависит от величины параметра $\varepsilon$ и для фиксированного числа узлов сеточной области стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ (см., напр., [1]–[4] и библиографию там же).

Весьма привлекательными являются сеточные методы на локально сгущающихся в окрестности погранслоя (априорно, либо апостериорно) "изотропных" сетках — сетках, близких в области сгущения к прямоугольным, имеющих соизмеримый шаг по всем направлениям и сохраняющих форму шаблона разностной схемы вне зависимости от поведения границы. Такие сетки часто применяются при уточнении сеточных решений в численных методах на основе апостериорно адаптирующихся сеток.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-01022).

В данной работе рассматриваются разностные аппроксимации для сингулярно возмущенных эллиптических уравнений реакции-диффузии в области с криволинейной границей. При построении схем используются локально сгущающиеся сетки на шаблонах, ориентация которых не связана с нормалью к границе. Строятся и исследуются разностные схемы, сходящиеся при условии, накладываемом на параметр $\varepsilon$, более слабом, чем в случае традиционных разностных схем. Обсуждаются проблемы, связанные с построением $\varepsilon$-равномерно сходящихся схем на указанных сетках.

## 2. Постановка задачи. Обоснование исследований

1. В области

$$\overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

с криволинейной границей $\Gamma = \overline{D} \setminus D$ рассмотрим краевую задачу для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии

$$Lu(x) \equiv \Big\{ \varepsilon^2 \sum_{s=1,2} a_s(x) \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} - c(x) \Big\} u(x) = f(x), \quad x \in D, \tag{2.2а}$$

$$u(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2.2б}$$

Коэффициенты и правая часть уравнения, а также граничная функция удовлетворяют условиям [1]

$$0 < a_0 \le a_s(x) \le a^0, \quad 0 < c_0 \le c(x) \le c^0, \quad x \in \overline{D}, \quad s = 1, 2;$$
$$|f(x)| \le M, \quad x \in \overline{D}; \quad |\varphi(x)| \le M, \quad x \in \Gamma;$$

параметр $\varepsilon$ принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$. Граница области и функции $a_s(x)$, $c(x)$, $f(x)$, $x \in \overline{D}$, $\varphi(x)$, $x \in \Gamma$, предполагаются достаточно гладкими. При стремлении параметра $\varepsilon$ к нулю в окрестности границы $\Gamma$ появляется пограничный слой.

2. Ошибки решений классических разностных схем при использовании в качестве базовых прямоугольных сеток зависят от величины параметра $\varepsilon$ и становятся малыми лишь при значениях параметра $\varepsilon$, существенно превышающих "эффективный" шаг сетки. Так, согласно оценкам (4.3), (4.5) классические разностные схемы (4.2), (4.1) и (4.2), (4.4) (см. § 4 ниже) сходятся при условии

$$\varepsilon \gg N_1^{-1} + N_2^{-1}, \tag{2.3}$$

где величины $N_1$ и $N_2$ определяют число узлов сеток по переменным $x_1$ и $x_2$ соответственно. При нарушении этого условия сеточные решения не сходятся к решению краевой задачи (2.2), (2.1).

Для задачи (2.2), (2.1) с использованием классических аппроксимаций краевой задачи и локально сгущающихся прямоугольных сеток требуется построить разностные схемы, сходящиеся $\varepsilon$-равномерно, либо схемы, близкие к таковым. В частности, представляют интерес схемы, сходящиеся при условии более слабом, чем условие (2.3).

*О содержании работы.* Классическая разностная схема при использовании прямоугольных сеток, являющихся прямым произведением сеток по $x_1$ и $x_2$, рассматривается в § 4. В § 5 обсуждаются проблемы, связанные с построением $\varepsilon$-равномерно сходящихся схем на локально сгущающихся прямоугольных сетках — адаптивных сетках, не согласованных с границей. Для

[1] Здесь и ниже через $M$, $M_i$ (через $m$) обозначаются достаточно большие (соответственно малые) положительные постоянные, не зависящие от $\varepsilon$ и от параметров разностных схем. Запись $L_{(j.k)}$ (соответственно $M_{(j.k)}$ $D_{h(j.k)}$) означает, что эти операторы (соответственно постоянные, сетки) введены в формуле $(j.k)$.

таких сеток в § 6 строятся схемы, сходящиеся на всей области $\overline{D}$ при условии более слабом, чем условие (2.3), а также $\varepsilon$-равномерно сходящиеся схемы, однако сходящиеся вне пограничного слоя, а также на достаточно узких множествах, пересекающих пограничный слой. В § 7 рассмотрена $\varepsilon$-равномерно сходящаяся (на всей области $\overline{D}$) схема на сетках, подстраивающихся к границе в окрестности пограничного слоя. Априорные оценки, используемые в построениях, приведены в следующем разделе.

## 3. Априорные оценки

Приведем априорные оценки решения краевой задачи (2.2), (2.1), используемые при построениях (см., напр., [1], а также [2]–[4]).

Решение задачи представим в виде суммы функций

$$u(x) = U(x) + V(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{3.1}$$

где $U(x)$ и $V(x)$ — регулярная и сингулярная части решения.

Для функций $u(x)$, $U(x)$, $V(x)$ получаются оценки

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} x_2^{k_2}}\, u(x)\right| \le M\varepsilon^{-k}, \\ &\left|\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} x_2^{k_2}}\, U(x)\right| \le M, \\ &|V(x)| \le M \exp(-m_1\varepsilon^{-1} r), \quad x \in \overline{D}, \quad k \le 4, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $r = r(x, \varGamma)$ — расстояние от точки $x$ до множества $\varGamma$, $m_1$ — произвольная постоянная из интервала $(0, m_0)$, $m_0 = \min\limits_{\overline{D}}[a^{-1}(x)c(x)]^{1/2}$.

В $\rho$-окрестности границы $\varGamma$, где $\rho \le m$, выполняется оценка

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial^k}{\partial \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2}}\, \widetilde{V}(\xi)\right| \le M\varepsilon^{-k_1} \exp\big(-m_1\varepsilon^{-1} r(\xi, \widetilde{\varGamma})\big), \\ &\xi \in \overline{\widetilde{D}}, \quad r(\xi, \widetilde{\varGamma}) \le m, \quad k \le 4, \quad m_1 = m_{1(3.2)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $\xi = \xi(x)$ — ортогональная система координат, связанная с границей $\varGamma$; $\xi_1$ — переменная вдоль нормали к границе $\varGamma$; $\widetilde{V}(\xi) = V(x(\xi))$; $\widetilde{D}$ и $\widetilde{\varGamma}$ — образы множеств $D$ и $\varGamma$; $\xi_1 = r(\xi, \widetilde{\varGamma})$.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $a_s, c, f \in C^{l+\alpha}(\overline{D})$, $\varphi \in C^{l-1+\alpha}(\varGamma)$, $\varGamma \in C^{l-1+\alpha}$, $s = 1, 2$, $l = 6$, $\alpha > 0$. *Тогда для решения краевой задачи* (2.2), (2.1) *и его компонент из представления* (3.1) *справедливы оценки* (3.2), (3.3).

## 4. Классическая разностная схема

Выпишем классическую разностную схему для задачи (2.2), (2.1) и обсудим некоторые трудности, возникающие при численном решении задачи, когда параметр $\varepsilon$ достаточно мал.

1. Рассмотрим простейшую монотонную разностную схему из ([5], с. 218). Пусть на $\mathbb{R}^2$ введена (базовая) сетка

$$\overline{D}_h^{(2)} = \omega_1 \times \omega_2, \tag{4.1а}$$

где $\omega_s$ — сетка на оси $x_s$, вообще говоря, неравномерная, $s = 1, 2$; считаем выполненным условие $h \le MN^{-1}$. Здесь $h = \max\limits_s h_s$, $h_s = \max\limits_i h_s^i$, $h_s^i = x_s^{i+1} - x_s^i$, $x_s^i, x_s^{i+1} \in \omega_s$, $N = \min\limits_s N_s$, $N_s + 1$ — минимальное число узлов сетки $\omega_s$ на отрезке единичной длины. На $\overline{D}$ введем сетку

$$\overline{D}_h = D_h \cup \varGamma_h, \quad \overline{D}_h = \overline{D}_h\big(D^{(2)}_{h(4.1\text{а})}\big) = \overline{D}_h\big(D^{(2)}_{h(4.1\text{а})};\, D_{(2.1)}\big), \tag{4.1б}$$

где $D_h = D \cap D_h^{(2)}$, множество $\Gamma_h$ образовано пересечением прямых $x_s = x_s^i$, $x_{3-s} \in \mathbb{R}$, $s = 1, 2$, проходящих через узлы сетки $D_h^{(2)}$, с границей $\Gamma$.

Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем разностной схемой ([5], с. 221)

$$\begin{aligned} &\Lambda z(x) \equiv \Big\{\varepsilon^2 \sum_{s=1,2} a_s(x)\delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}} - c(x)\Big\} z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \\ &z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $\delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}}\, z(x)$ — вторая (центральная) разностная производная на неравномерной сетке, например, $\delta_{\overline{x1}\,\widehat{x1}}\, z(x) = 2(h_1^i + h_1^{i-1})^{-1}[\delta_{x1}\, z(x) - \delta_{\overline{x1}}\, z(x)]$, $x = (x_1^i, x_2) \in D_h$, $\delta_{x1}\, z(x)$ и $\delta_{\overline{x1}}\, z(x)$ — первые разностные производные (вперед и назад).

Для разностной схемы (4.2), (4.1) справедлив принцип максимума ([5], с. 228).

Принимая во внимание априорные оценки решения краевой задачи, находим оценку

$$|u(x) - z(x)| \le M(\varepsilon + N^{-1})^{-1}N^{-1}, \quad x \in \overline{D}_{h(4.1)}. \tag{4.3}$$

В случае сетки

$$\overline{D}_h = \overline{D}_h(D_h^{(2)}), \tag{4.4}$$

где $D_h^{(2)}$ — равномерная прямоугольная сетка, имеем оценку

$$|u(x) - z(x)| \le M(\varepsilon + N^{-1})^{-2}N^{-2}, \quad x \in \overline{D}_{h(4.4)}. \tag{4.5}$$

Из рассмотрения модельных задач вытекает, что схемы (4.2), (4.1) и (4.2), (4.4) не сходятся $\varepsilon$-равномерно.

2. Обсудим условия, при которых решение разностной схемы сходится при $N \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$, где $\varepsilon \to 0$ при $N \to \infty$.

Введем ряд определений. Пусть $z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решение некоторой разностной схемы. Скажем, что оценка

$$|u(x) - z(x)| \le M[(\varepsilon + N_1^{-1})^{-\nu_1^1}N_1^{-\nu_1} + (\varepsilon + N_2^{-1})^{-\nu_2^1}N_1^{-\nu_2}], \quad x \in \overline{D}_h,$$

где $\nu_i, \nu_i^1 \ge 0$, неулучшаема по вхождению величин $N_1$, $N_2$, $\varepsilon$, если оценка

$$|u(x) - z(x)| \le M[(\varepsilon + N_1^{-1})^{-\alpha_1^1}N_1^{-\alpha_1} + (\varepsilon + N_2^{-1})^{-\alpha_2^1}N_1^{-\alpha_2}], \quad x \in \overline{D}_h,$$

вообще говоря, неверна при выполнении условия $\alpha_i \ge \nu_i$, $\alpha_i^1 \le \nu_i^1$, причем $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1^1 - \alpha_2^1 > \nu_1 + \nu_2 - \nu_1^1 - \nu_2^1$. В случае, когда найдется функция $\mu(N_1^{-1}, N_2^{-1})$, сходящаяся к нулю $\varepsilon$-равномерно при $N \to \infty$, такая, что выполняется оценка

$$|u(x) - z(x)| \le M \min[\mu(\varepsilon^{-\nu}N_1^{-1}, \varepsilon^{-\nu}N_2^{-1}), 1], \quad x \in \overline{D}_h,$$

где $\nu > 0$ — некоторая постоянная, будем говорить, что схема сходится с дефектом $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\nu})$. Если же величина $\nu$ может быть сколь угодно малой, будем говорить, что схема сходится почти $\varepsilon$-равномерно (с дефектом сходимости $\mathcal{O}(\varepsilon^{-\nu})$). При $\nu = 0$ схема сходится $\varepsilon$-равномерно.

Оценки (4.3), (4.5) неулучшаемы по вхождению величин $N$, $\varepsilon$. В силу неулучшаемости оценок (4.3) и (4.5) порядок $\nu$ дефекта схем (4.2), (4.1) и (4.2), (4.4) неулучшаем и равен единице. Эти схемы сходятся при условии $N_1^{-1}, N_2^{-1} \ll \varepsilon$:

$$\varepsilon^{-1} = o(N_1), \quad \varepsilon^{-1} = o(N_2). \tag{4.6}$$

Условие (4.6) является необходимым и достаточным для сходимости схем (4.2), (4.1) и (4.2), (4.4).

**Теорема 4.1.** *Пусть для решения краевой задачи* (2.2), (2.1) *и его компонент из представления* (3.1) *выполняются априорные оценки* (3.2), (3.3). *В случае разностных схем* (4.2), (4.1) *и* (4.2), (4.4) *условие* (4.6) *является необходимым и достаточным для сходимости сеточных решений к решению краевой задачи* (2.2), (2.1) *при* $N \to \infty$ *и* $\varepsilon \to 0$; *дефект сходимости схем есть* $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. *Для сеточных решений выполняются оценки* (4.3), (4.5); *оценки неулучшаемы по вхождению величин* $N$, $\varepsilon$.

## 5. О построении $\varepsilon$-равномерно сходящихся схем на локально сгущающихся сетках

Заметим, что особенность типа пограничного слоя при удалении от границы $\Gamma$ экспоненциально убывает с показателем экспоненты $m\varepsilon^{-1}r(x,\Gamma)$ (см. последнюю оценку в (3.2) и оценку (3.3)). Сингулярная компонента $V(x)$ из (3.1) при $r(x,\Gamma) \geq \sigma$ не превосходит величины $M\delta$, где $\delta$ — достаточно малое число, когда $\sigma = m_1^{-1}\varepsilon \ln \delta^{-1}$, $m_1 = m_{1(3.2)}$. Невязка для разностной схемы на решении краевой задачи велика (однако $\varepsilon$-равномерно конечная) лишь в окрестности погранслоя, являющейся достаточно узкой при малых значениях параметра $\varepsilon$.

Обсудим проблемы, возникающие при построении $\varepsilon$-равномерно сходящихся схем.

1. Имея в виду использование схем на локально сгущающихся сетках при решении краевой задачи, введем некоторые характеристики схем (сеток). Через $P$ (*объем* сеточной задачи) обозначим число узлов сетки на $\overline{D}$, в которых требуется найти сеточное решение. В случае локально сгущающихся сеток будет удобно оценивать сходимость сеточных решений через величину $P^{-1/n}$, где $n = 2$ — размерность пространства.

В случае сеток (4.1) для величины $P$ выполняется оценка

$$mN_1N_2 \leq P \leq MN_1N_2.$$

Для решений схемы (4.2) на сетках (4.1) и (4.4) имеем оценки

$$|u(x) - z(x)| \leq M \min[\varepsilon^{-1}(N_1^{-1} + N_1P^{-1}), 1], \quad x \in \overline{D}_{h(4.1)};$$
$$|u(x) - z(x)| \leq M \min[\varepsilon^{-2}(N_1^{-1} + N_1P^{-1})^2, 1], \quad x \in \overline{D}_{h(4.4)}.$$

Будем говорить, что распределение узлов сетки по $x_1$ и $x_2$ сбалансировано (или короче — сетка сбалансирована), если на ней достигается оптимальный при фиксированном значении параметра $\varepsilon$ порядок скорости сходимости. Схему на сбалансированной сетке будем также называть сбалансированной.

Для решений схемы (4.2) на сбалансированных сетках (4.1) и (4.4) получаются оценки

$$|u(x) - z(x)| \leq M(\varepsilon + P^{-1/2})^{-1}P^{-1/2}, \quad x \in \overline{D}^b_{h(4.1)}; \tag{5.1}$$
$$|u(x) - z(x)| \leq M(\varepsilon^2 + P^{-1})^{-1}P^{-1}, \quad x \in \overline{D}^b_{h(4.4)}, \tag{5.2}$$

где $\overline{D}^b_h$ — сбалансированная сетка. Дефект сходимости схем (4.2), (4.1) и (4.2), (4.4) относительно величины $P^{1/2}$ на сбалансированных сетках есть величина $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ (для несбалансированных сеток дефект больше). Эти схемы сходятся при условии $P^{-1/2} \ll \varepsilon$:

$$\varepsilon^{-1} = o(P^{1/2}). \tag{5.3}$$

Это условие является необходимым и достаточным для сходимости схем.

2. Рассмотрим класс разностных схем, основанных на классических аппроксимациях краевой задачи в случае “кусочно-равномерных” сеток, а именно, на локально сгущающихся сетках, являющихся равномерными в ближайшей окрестности границы $\Gamma$ и вне некоторой несколько большей окрестности. Сетки, вообще говоря, не согласованы с границей области.

Для простоты пусть $x_1 + x_2 = 0$ есть уравнение границы $\Gamma$ в единичном круге (с центром в точке $(0,0)$) и область $\overline{D}$ содержит часть круга, для которой $x_1 + x_2 \geq 0$. Пусть каким-то образом построена сетка

$$\overline{D}_h^* = \overline{D}_h^*(\rho_1), \tag{5.4}$$

где $\rho_1 > 0$ — параметр, выбираемый ниже, который определяет распределение узлов сетки (5.4). Эта сетка равномерна на каждом из множеств $D_1 = D_1(\rho_1)$ и $D_2 = D \setminus \overline{D}_1(M\rho_1)$, где

$$D_1(\rho_1) = \{x : r(x, \Gamma) < \rho_1\}$$

— $\rho_1$-окрестность множества $\Gamma$; $\rho_1 \leq 4^{-1}$. Сетки $D_{ih} = D_i \bigcap \overline{D}^*_{h(5.4)}$ имеют шаг $h_s^i$ по оси $x_s$; $i, s = 1, 2$. Для простоты считаем, что шаблоны пятиточечных схем с центром шаблона из $D_{ih}$ являются правильными, т.е. их левые и правые, а также верхние и нижние плечи одинаковы и равны $h_1^{(i)}$ и $h_2^{(i)}$ соответственно, $i = 1, 2$.

Рассмотрим фрагменты сеточной задачи из класса разностных схем на сетках (5.4), а именно, фрагменты на множествах $\overline{D}_{1h}$ и $\overline{D}_{2h}$. Пусть $z_i(x)$, $x \in \overline{D}_{ih}$, — решение задачи

$$\begin{aligned} \Lambda_{(4.2)} z_i(x) = f(x), \quad & x \in D_{ih}, \\ z_i(x) = u(x), \quad & x \in \Gamma_{ih}, \qquad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $u(x)$, $x \in \overline{D}$, — решение задачи (2.2), (2.1).

Для функций $z_i(x)$, $x \in \overline{D}_{ih}$, имеем оценки

$$|u(x) - z_1(x)| \leq M[(\varepsilon + h_1^{(1)})^{-2}(h_1^{(1)})^2 + (\varepsilon + h_2^{(1)})^{-2}(h_2^{(1)})^2], \quad x \in \overline{D}_{1h}; \tag{5.6а}$$

$$\begin{aligned} |u(x) - z_2(x)| \leq M\{ & [(\varepsilon + h_1^{(2)})^{-2}(h_1^{(2)})^2 + (\varepsilon + h_2^{(2)})^{-2}(h_2^{(2)})^2] \times \\ & \times \max_{\Gamma_{2h}} |V(x)| + (h_1^{(2)})^2 + (h_2^{(2)})^2\}, \quad x \in \overline{D}_{2h}, \end{aligned} \tag{5.6б}$$

где $V(x) = V_{(3.1)}(x)$ — сингулярная компонента решения; оценки (5.6а) и (5.6б) неулучшаемы по вхождению величин $h_1^{(1)}$, $h_2^{(1)}$, $\varepsilon$ и $h_1^{(2)}$, $h_2^{(2)}$, $\varepsilon$ соответственно.

Анализ ошибок $u(x) - z_i(x)$, $x \in \overline{D}_{ih}$, при $\rho_1 \approx \varepsilon$ показывает, что для сбалансированных схем не существует кусочно-равномерных сеток $\overline{D}^*_{h(5.4)}$, на которых решения задач (5.5) сходятся $\varepsilon$-равномерно к решению задачи (2.2), (2.1). В случае задач (5.5), (5.4) не существует сеток, на которых дефект сходимости есть $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$. Подобное поведение ошибок для сеточных решений сохраняется и в случае семейства сеток

$$\overline{D}_h^*, \tag{5.7}$$

являющихся прямоугольными и равномерными в $\rho$-окрестности конечного участка границы $\Gamma$, где $\rho = \rho(\varepsilon, P)$, причем $\varepsilon^{-1}\rho \to \infty$ при $P \to \infty$.

**Теорема 5.1.** *Для краевой задачи* (2.2), (2.1) *в классе сбалансированных разностных схем, строящихся на основе классических аппроксимаций краевой задачи на локально сгущающихся сетках вида* (5.7) (*не согласованных с границей* $\Gamma$), *не существует* $\varepsilon$*-равномерно сходящихся схем*; *более того, не существует схем, дефект сходимости которых есть* $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$.

**Замечание 1.** Условие $P^{-1} \ll \varepsilon$:

$$\varepsilon^{-1} = o(P), \tag{5.8}$$

вообще говоря, не достаточно для сходимости схемы, если сетка не согласована с границей области.

**Замечание 2.** Как следует из приведенных построений, использование локально сгущающихся сеток не позволяет существенно ослабить условие (4.6) сходимости классических разностных схем. Применением достаточно общих локально сгущающихся сеток, однако не согласованных с границей, невозможно уменьшить уже в два раза порядок $\nu = 1$ дефекта сходимости классических схем.

**Замечание 3.** Для построения $\varepsilon$-равномерно сходящихся на $\overline{D}$ разностных схем на основе классических аппроксимаций краевой задачи использование сеток, ориентация шаблонов которых в погранслое согласована с направлением нормали к границе области, является необходимым. Более того, такие согласованные сетки необходимо использовать и для построения схем, сходящихся при условии не слабее, чем (5.8).

## 6. Разностные схемы на сетках, не согласованных с границей

Как следует из результатов § 5, разностные схемы на прямоугольных сетках, в том числе локально сгущающихся, в случае, когда сетки не согласованы с границей, не позволяют получать решения, сходящиеся $\varepsilon$-равномерно на всей сеточной области $\overline{D}_h$. В этой связи возникает проблема построения разностных схем, сходящихся $\varepsilon$-равномерно на подмножествах из $\overline{D}$, в частности, на "сечениях" множества $\overline{D}$ — на связных подмножествах, проходящих через пограничный слой.

1. Рассмотрим область сходимости разностной схемы (4.2), (4.4). Пусть $v(x)$, $x \in \overline{D}$, — достаточно гладкая функция. Через $v^h(x)$, $x \in \overline{D}_h$, где $\overline{D}_h = \overline{D}_{h(4.1)}$, обозначим решение задачи

$$\begin{aligned}\Lambda_{(4.2)} z(x) = f(x), \quad x \in D_h,\\ z(x) = v(x), \quad x \in \Gamma_h,\end{aligned}$$

где $f(x) = L_{(2.2)}\, v(x)$.

Для компонент $U^h(x)$, $V^h(x)$, $x \in \overline{D}_h$, отвечающих компонентам $U(x)$, $V(x)$, $x \in \overline{D}$, из представления (3.1), имеем оценки

$$|U(x) - U^h(x)| \le M[N_1^{-2} + N_2^{-2}], \quad x \in \overline{D}_h; \tag{6.1}$$

$$\left.\begin{matrix}|V(x)|\\ |V^h(x)|\end{matrix}\right\} \le M[\exp(-m_1(\varepsilon + N_1^{-1})^{-1} r_1) + \exp(-m_2(\varepsilon + N_2^{-1})^{-1} r_2)], \quad x \in \overline{D}_h,$$

где $r_s = r_s(x, \Gamma)$ — расстояние, измеряемое вдоль оси $x_s$, между точкой $x$ и множеством $\Gamma$, $s = 1, 2$; $m_1, m_2$ — достаточно малые постоянные, $m_1, m_2 < 2^{-1/2} m_{1(3.2)}$. Из оценок (6.1) вытекает $\varepsilon$-равномерная сходимость решений схемы (4.2), (4.4) вне $\rho_1$–окрестности множества $\Gamma$

$$|u(x) - z(x)| \le M[N_1^{-2} + N_2^{-2}], \quad x \in \overline{D}_h, \ \ r(x, \Gamma) \ge \rho_1, \tag{6.2}$$

где

$$\begin{gathered}\rho_1 = \rho_1(\varepsilon, N_1, N_2) = \min\{M_1[(\varepsilon + N_1^{-1}) \ln N_1 + (\varepsilon + N_2^{-1}) \ln N_2], m\},\\ M_1 = 2(m_1^{-1} + m_2^{-1}), \quad m_i = m_{i(6.1)}.\end{gathered} \tag{6.3}$$

При условии $\varepsilon \ll \ln^{-1} N_1 + \ln^{-1} N_2$, $N_1, N_2 \to \infty$ величина $\rho_1$ стягивается к нулю.

2. Построим разностную схему, сходящуюся при условии более слабом, чем условие (5.3). Через $z_0(x)$, $x \in \overline{D}_h$, обозначим решение задачи (4.2), (4.4). Пусть

$$D_1 \tag{6.4а}$$

— $\rho_1$-окрестность множества $\Gamma$; $\rho_1 = \rho_{1(6.3)}$. На множестве $\overline{D}_1$ строим равномерную прямоугольную сетку

$$\overline{D}_{1h} = \overline{D}_{(4.1б)}(D_h^{(2)};\, D_1), \tag{6.4б}$$

где $D^{(2)}_{h(6.4б)}$ — равномерная сетка с шагом $h^{(2)}_s$ по оси $x_s$, определяемым соотношением $h^{(2)}_1 = h^{(2)}_2 = \rho_1^{1/2} N_1^{-1/2} N_2^{-1/2}$. Заметим, что для числа узлов сетки $\overline{D}_{1h}$ выполняется оценка $P(\overline{D}_{1h}) \le M N_1 N_2$.

На сетке $\overline{D}_{1h}$ решаем задачу

$$\begin{gathered}\Lambda_{(4.2)} z_1(x) = f(x), \quad x \in D_{1h}, \\ z_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \mathit{\Gamma}_{1h} \bigcap \mathit{\Gamma}; \\ \overline{z}_0(x), & x \in \mathit{\Gamma}_{1h} \setminus \mathit{\Gamma}, \end{cases}\end{gathered} \tag{6.4в}$$

где $\overline{z}_0(x)$, $x \in \overline{D}$, — некоторый интерполянт, строящийся по значениям $z_0(x)$, $x \in \overline{D}_h$. При построении $\overline{z}_0(x)$ минимальный многоугольник $\overline{D}^{(m)}_h$, содержащий узлы сетки $\overline{D}_h$, разбивается прямыми $x_1 = x_1^i$ и $x_2 = x_2^j$, $(x_1^i, x_2^j) \in \overline{D}^{(2)}_{h(4.4)}$ на ячейки. На прямоугольных ячейках функция $\overline{z}_0(x)$ есть билинейный интерполянт. Непрямоугольные ячейки триангулируются. Функция $\overline{z}_0(x)$ на таких треугольных ячейках является линейной. Так построенные билинейные и линейные функции $\overline{z}_0(x)$ продолжаются на ближайшие “криволинейные” элементы из множества $\overline{D} \setminus \overline{D}^{(m)}_h$. Функция $\overline{z}_0(x)$ непрерывна на $\overline{D}$.

Функцию

$$z^*(x) = \left\{ \begin{array}{ll} z_1(x), & x \in \overline{D}_{1h}, \\ z_0(x), & x \in \overline{D}_{h(4.4)} \setminus \overline{D}_1 \end{array} \right\}, \quad x \in \overline{D}^*_h, \tag{6.4г}$$

где

$$\overline{D}^*_h = \overline{D}_{1h} \bigcup \{ \overline{D}_{h(4.4)} \setminus \overline{D}_1 \}, \tag{6.4д}$$

назовем решением разностной схемы (4.2), (4.4), (6.4).

Для решения этой схемы получается оценка

$$\begin{gathered}|u(x) - z^*(x)| \le M \big( \varepsilon^2 + N_1^{-1} N_2^{-1} ( N_1^{-1} \ln N_1 + N_2^{-1} \ln N_2 ) \big)^{-1} \times \\ \times \left[ \varepsilon N_1^{-1} N_2^{-1} ( \ln N_1 + \ln N_2 ) + N_1^{-1} N_2^{-1} ( N_1^{-1} \ln N_1 + N_2^{-1} \ln N_2 ) \right], \quad x \in \overline{D}^*_h. \end{gathered} \tag{6.5}$$

На сбалансированной сетке $\overline{D}^{*b}_h$ имеем оценку

$$|u(x) - z^*(x)| \le M (\varepsilon^{-2} + P^{-3/2} \ln P)^{-1} [\varepsilon P^{-1} \ln P + P^{-3/2} \ln P], \quad x \in \overline{D}^{*b}, \tag{6.6}$$

где $P$ — число узлов сетки $\overline{D}^{*b}_h$. Для сбалансированной схемы (4.2), (4.4), (6.4) дефект сходимости схемы есть $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2/3} \ln^{1/3} \varepsilon^{-1})$. Схема сходится при условии $P^{-1/2} \ll \varepsilon^{2/3} \ln^{-1/3} \varepsilon$:

$$\varepsilon^{-1} = o(P^{3/4} \ln^{-1/2} P) \tag{6.7}$$

— более слабом, чем условие (5.3). Условие (6.7) неулучшаемо; при нарушении его схема (4.2), (4.4), (6.4) на сбалансированных сетках, вообще говоря, не сходится.

**Теорема 6.1.** *Пусть выполняется условие теоремы* 4.1. *В случае разностной схемы* (4.2), (4.4), (6.4) *на сбалансированных сетках условие* (6.7) *является необходимым и достаточным для сходимости сеточного решения к решению краевой задачи* (2.2), (2.1); *дефект сходимости схемы есть* $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2/3} \ln^{1/3} \varepsilon^{-1})$. *Для сеточных решений выполняются оценки* (6.5), (6.6); *оценка* (6.6) *неулучшаема по вхождению величин* $P$, $\varepsilon$.

3. Построим разностную схему, сходящуюся $\varepsilon$-равномерно на некотором подмножестве из $\overline{D}$, проходящем через пограничный слой. Для простоты будем считать, что в единичном круге, имеющем центром точку $(0, 0)$, расположенную на границе $\mathit{\Gamma}$, единичная (внутренняя) нормаль

к границе $n = n(x) = (n_1, n_2)$ удовлетворяет условию $n_1 \geq m_0$. На множестве $D$ из единичного круга рассмотрим множества

$$D_2 \ \text{ и } \ D_2^0 \tag{6.8а}$$

— соответственно $\rho_2$- и $2^{-1}\rho_2$-окрестности оси $x_1$; здесь

$$\rho_2 = \rho_2(\varepsilon, N_1, N_2) = \min[m,\, 4m_1^{-1}\varepsilon \ln N], \quad m_1 = m_{1(3.2)}; \tag{6.8б}$$

$N_1$, $N_2$ определяют число узлов сетки $\overline{D}_{h(4.1\text{а})}$, $N = \min[N_1, N_2]$. Пусть

$$D_h = \omega_1 \times \omega_2 \tag{6.8в}$$

— кусочно-равномерная сетка на плоскости $\mathbb{R}^2$; шаг сетки $\omega_2$ постоянен и равен $h_2 = \rho_2 N_2^{-1}$, шаг сетки $\omega_1$ постоянен при $x_1 < \sigma$ и при $x_1 > \sigma$ и равен $h_1^{(1)} = 4\sigma N_1^{-1}$ и $h_1^{(2)} = 2N_1^{-1}$ соответственно; $\sigma = \sigma(\varepsilon, N_1, N_2) = \min[m, \rho_3 + m_0(1-m_0^2)^{-1/2}\rho_2]$, $\rho_3 = \min[m,\, 2m_1^{-1}\varepsilon \ln N_1]$. На множестве $\overline{D}_{2(6.8\text{а})}$ строим сетку

$$\overline{D}_{2h} = \overline{D}_{h(4.1\text{б})}(D_{h(6.8\text{в})};\, D_{2(6.8\text{а})}). \tag{6.8г}$$

Краевую задачу (2.2) на множестве $\overline{D}_2$ аппроксимируем разностной схемой

$$\begin{aligned} \Lambda_{(4.2)} z_2(x) &= f(x), \quad x \in D_{2h}, \\ z_2(x) &= \begin{cases} \varphi(x), & x \in \mathit{\Gamma}_{2h} \bigcap \mathit{\Gamma}; \\ \overline{z}_0(x), & x \in \mathit{\Gamma}_{2h} \setminus \mathit{\Gamma}, \end{cases} \end{aligned} \tag{6.8д}$$

где $z_0(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решение задачи (4.2), (4.4).

Далее введем функцию

$$z^*(x) = \left\{ \begin{array}{ll} z_2(x), & x \in \overline{D}_{2h}, \\ z_0(x), & x \in \overline{D}_{h(4.4)} \setminus \overline{D}_2 \end{array} \right\}, \quad x \in \overline{D}_h^{\,*}, \tag{6.8е}$$

где

$$\overline{D}_h^* = \overline{D}_{2h} \bigcup \{\overline{D}_{h(4.4)} \setminus \overline{D}_2\},$$

которую назовем решением разностной схемы (4.2), (4.4), (6.8).

Заметим, что функция (6.8е), вообще говоря, не сходится $\varepsilon$-равномерно на $\overline{D}_h^{\,*}$, однако сходится $\varepsilon$-равномерно на подмножестве $\overline{D}_h^{*0}$ из $\overline{D}_h^*$, где

$$\overline{D}_h^{*0} = \{\overline{D}_2^{\,0} \bigcup \{\overline{D}_{(2.1)} \setminus D_{1(6.4\text{а})}\}\} \bigcap \overline{D}_h^*. \tag{6.9}$$

С использованием техники работы [1] устанавливается оценка

$$|u(x) - z^*(x)| \leq M[N_1^{-2} \ln^2 N_1 + N_2^{-2} \ln^2 N_2], \quad x \in \overline{D}_h^{*0}. \tag{6.10}$$

**Теорема 6.2.** *Пусть выполняется условие теоремы* 4.1. *Тогда решение разностной схемы* (4.2), (4.4), (6.8) *сходится на множестве* $\overline{D}_{h(6.9)}^{*0}$ *$\varepsilon$-равномерно. Для сеточного решения справедлива оценка* (6.10).

**Замечание.** "Суммарная" ширина всех перемычек, соединяющих внешность погранслоя с границей, на которых можно достичь $\varepsilon$-равномерную сходимость сеточных решений, стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

## 7. Разностные схемы на шаблоне, подстраивающемся в погранслое к границе области

В [1] в случае областей с криволинейной границей построены схемы, сходящиеся $\varepsilon$-равномерно. При построении схем исходная область разбивалась на перекрывающиеся подобласти. Подходящей заменой координат граница области (на подобласти разбиения) переводилась в прямую (в случае двумерной области) и строилась прямоугольная кусочно-равномерная сетка, сгущающаяся в погранслое. Таким образом, локально сгущающаяся сетка подстраивалась к границе на $m$-окрестности границы $\Gamma$. Получающаяся сеточная задача решалась методом Шварца. Недостатком таких разностных схем является необходимость использования итераций при решении сеточных задач.

Представляют определенный интерес безытерационные разностные схемы, сходящиеся $\varepsilon$-равномерно. Приведем такую схему.

1. Решение задачи (4.2), (4.4) на множестве $\overline{D}_h \backslash D_{1(6.4\text{a})}$ сходится $\varepsilon$-равномерно с оценкой (6.2). Чтобы уточнить решение задачи в погранслое, построим на $\overline{D}_{1(6.4\text{a})}$ согласованную с границей сетку и соответствующую разностную схему.

В $\overline{D}_1$ каждой точке $x$ соответствует некоторое расстояние до границы $\Gamma$ — величина $r(x,\Gamma)$ и длина дуги (по контуру границы $\Gamma$) от некоторой фиксированной точки до основания нормали (к границе), проходящей через точку $x$, — величина $l(x)$. Перейдем в $\overline{D}_1$ к переменным $X = X(x)$:

$$X_1 = r(x,\Gamma), \quad X_2 = l(x). \tag{7.1}$$

В этих переменных граница $\Gamma$ переходит в прямую. Вторая часть границы множества $D_1$, а именно, множество $\Gamma_1 \setminus \Gamma$ также переходит в прямую. Считаем, что множество $\overline{D}_1$ достаточно узкое и система (7.1) разрешима относительно $x_1$, $x_2$. Через $X^{-1}(x)$ обозначим отображение, обратное $X(x)$.

Для функций $v(x)$, $W(X)$ и подобластей $D^0 \subseteq \overline{D}_1$ будем использовать обозначения

$$v(x(X)) = v_X(X) = \{v(x)\}_X, \quad W(X(x)) = W_{X^{-1}}(x),$$
$$D^0_X = X(D^0) = \{X : X^{-1}(x) \in D^0\}.$$

Полагаем

$$\widetilde{D}_{X^{-1}} = X^{-1}(\widetilde{D}) = \{x : X(x) \in \widetilde{D}\},$$

где $\widetilde{D}$ — некоторое подмножество из $\mathbb{R}^2$ такое, что $\widetilde{D}_{X^{-1}} \subseteq \overline{D}_1$. Множество $\overline{D}_{1X}$ есть вертикальная полоса.

Задача (2.2), (6.4a), имеющая вид

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in D_1,$$
$$u(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Gamma_1 \bigcap \Gamma; \\ u^*(x), & x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma, \end{cases} \tag{7.2}$$

где $u^*(x)$ — решение задачи (2.2), (2.1) при $x \in \Gamma_1 \setminus \Gamma$, в новых переменных переходит в задачу

$$L_X U(X) = F(X), \quad X \in D_{1X},$$
$$U(X) = \begin{cases} \Phi(X), & X \in \Gamma_{1X} \bigcap \Gamma_X; \\ U^*(X), & X \in \Gamma_{1X} \setminus \Gamma_X. \end{cases} \tag{7.3}$$

Здесь $L_X \equiv \varepsilon^2 L_X^2 + L_X^0$, $L_X^0 = -C(X)$, $L_X^2 \equiv \sum\limits_{s,k=1,2} A_{sk}(X)\frac{\partial^2}{\partial X_s\,\partial X_k} + \sum\limits_{s=1,2} B_s(X)\frac{\partial}{\partial X_s}$. Коэффициенты $A_{sk}$, $B_s$ определяются по формулам

$$A_{sk}(X) = \left\{ a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}X_s\,\frac{\partial}{\partial x_1}X_k + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2}X_s\,\frac{\partial}{\partial x_2}X_k \right\}_X, \quad s,k = 1,2;$$

$$B_s(X) = \left\{ a_1(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\,X_s + a_2(x)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\,X_s \right\}_X, \quad s = 1,2.$$

Функции $C$, $F$, $\Phi$, $U^*$, $U$ определяются соотношением $V(X) = v_X(X)$. Задача (7.3) является периодической на множестве $\overline{D}_{1X}$ с периодом $l_0$.

На множестве $\overline{D}_{1X}$ строим равномерную сетку

$$\overline{D}_{1Xh} = \overline{\omega}_{1X1} \times \omega_{1X2}\ , \tag{7.4}$$

где $\overline{\omega}_{1X1}$ и $\omega_{1X2}$ — сетки по переменным $X_1$ и $X_2$ с шагом $h_{X1} = \rho_1 N_{X1}^{-1}$ и $h_{X2} = l_0 N_{X2}^{-1}$ соответственно. Для задачи (7.3) строим разностную схему

$$\Lambda_X Z(X) \equiv \Big\{ \varepsilon^2 \Big\{ \sum_{s=1,2} A_{ss}(X)\delta_{\overline{Xs}\,\widehat{Xs}} + [A_{12}^+(X)(\delta_{X1\,X2} + \delta_{\overline{X1}\,\overline{X2}}) + A_{12}^-(X)(\delta_{X1\,\overline{X2}} + \delta_{\overline{X1}\,X2})] +$$

$$+ \sum_{s=1,2} [B_s^+(X)\delta_{Xs} + B_s^-(X)\delta_{\overline{Xs}}] \Big\} - C(X) \Big\} Z(X) = F(X), \quad X \in D_{1Xh}, \tag{7.5}$$

$$Z(X) = \begin{cases} \Phi(X), & X \in \mathit{\Gamma}_{1Xh} \bigcap \mathit{\Gamma}_X; \\ \overline{Z}_0(X), & X \in \mathit{\Gamma}_{1Xh} \setminus \mathit{\Gamma}_X, \end{cases}$$

где $\overline{Z}_0(X) = \{\overline{z}_0(x)\}_X$, $z_0(x)$, $x \in \overline{D}_h$, — решение задачи (4.2), (4.4).

Возвращаясь к переменным $x = (x_1, x_2)$, получаем разностную схему

$$\begin{gathered} \Lambda z(x) = f(x), \quad x \in D_{1XhX^{-1}}, \\ z(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \mathit{\Gamma}_{1XhX^{-1}} \bigcap \mathit{\Gamma}; \\ \overline{z}_0(x), & x \in \mathit{\Gamma}_{1XhX^{-1}} \setminus \mathit{\Gamma}. \end{cases} \end{gathered} \tag{7.6}$$

Заметим, что сетка

$$\overline{D}_{1XhX^{-1}} \tag{7.7}$$

— сетка на $\overline{D}_1$, вообще говоря, не является ни прямоугольной, ни равномерной.

Введем функцию

$$z^*(x) = \left\{ \begin{array}{ll} z_{(7.6)}(x), & x \in \overline{D}_{1XhX^{-1}}, \\ z_0(x), & x \in \overline{D}_{h(4.4)} \setminus \overline{D}_1 \end{array} \right\}, \quad x \in \overline{D}_h^*, \tag{7.8}$$

где

$$\overline{D}_h^* = \overline{D}_{1XhX^{-1}} \bigcup \{\overline{D}_{h(4.4)} \setminus \overline{D}_1\},$$

которую назовем решением разностной схемы (4.2), (4.4), (7.6), (7.7).

Заметим, что разностная схема (4.2), (4.4), (7.6), (7.7), аппроксимирующая краевую задачу (2.2), (2.1), является безытерационной. При ее построении используются локально в области погранслоя сгущающиеся сетки; шаблон схемы (сетка) подстраивается к границе области.

2. Рассмотрим схему (4.2), (4.4), (7.6), (7.7). Для простоты будем предполагать выполненным условие

$$a_1(x) = a_2(x) = a(x), \quad x \in \overline{D}, \quad r(x, \mathit{\Gamma}) \le m, \tag{7.9}$$

т. е. коэффициенты при вторых производных в уравнении (2.2a) в $m$-окрестности границы $\Gamma$ одинаковы.

Заметим, что схема (7.4), (7.5) (схема (7.6), (7.7)) — схема на девятиточечном шаблоне, вообще говоря, не является монотонной. Условие

$$\left.\begin{aligned} A_{11}(X)(h_{X1})^{-1} - |A_{12}(X)|(h_{X2})^{-1} \\ A_{22}(X)(h_{X2})^{-1} - |A_{12}(X)|(h_{X1})^{-1} \end{aligned}\right\} \geq 0, \qquad X \in D_{1Xh}, \tag{7.10}$$

является достаточным для $\varepsilon$-равномерной монотонности схемы (7.4), (7.5). Это условие будет выполняться, например, в том случае, когда величина $m$ в $\rho_{1(6.3)}$ ($\rho_1$ определяет множество $\overline{D}_{1(6.4\mathrm{a})}$) достаточно мала. Далее предполагаем выполненным условие (7.10).

Для простоты полагаем

$$N_{X1} = N_{X2} = N, \tag{7.11}$$

где $N_{Xs} = N_{Xs\,(7.4)}$. С использованием техники мажорантных функций (см., напр., [1]) устанавливается оценка

$$|u(x) - z^*(x)| \leq MN^{-2}\ln^2 N, \qquad x \in \overline{D}_h^*. \tag{7.12}$$

Таким образом, разностная схема (4.2), (4.4), (7.6), (7.7) при условиях (7.9)–(7.11) сходится $\varepsilon$-равномерно.

**Теорема 7.1.** *Пусть выполняется условие теоремы* 4.1, *а также условие* (7.9). *Тогда решение разностной схемы* (4.2), (4.4), (7.6), (7.7) *при условии* (7.10) *сходится* (*при* $N_1, N_2, N_{X1}, N_{X2} \to \infty$) *$\varepsilon$-равномерно. При дополнительном условии* (7.11) *для сеточных решений справедлива оценка* (7.12).

## Литература


1. Шишкин Г.И. *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.* – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 233 с.
2. Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. *Fitted numerical methods for singular perturbation problems.* – Singapore: World Scientific, 1996. – 166 p.
3. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations*: *convection–diffusion and flow problems.* – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 348 p.
4. Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. *Robust computational techniques for boundary layers.* – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2000. – 254 p.
5. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.



*Институт математики и механики Уральского отделения Российской Академии наук*



*Поступила*
30.10.2001