ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 539.3

Ю.П. ЖИГАЛКО, М.М. ТОРОПОВА

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ УПРУГИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С ПОДКРЕПЛЕНИЯМИ ТИПА НАКЛАДОК

В [1] дана общая постановка задач динамического деформирования тонких упругих оболочек при нагрузках, распределенных по площадкам фиксированных размеров. Дальнейшее развитие предложенного в [1] подхода сделано в [2], где рассмотрена задача о совместных колебаниях тонкой упругой оболочки произвольной формы и присоединенного к ней тела. В [3] приведена общая постановка динамической контактной задачи для упругой оболочки произвольной формы. При заданной кинематике движения точек, принадлежащих фиксированной области контакта, выписано обобщенное решение задачи. В классе обобщенных функций построены точные решения ряда динамических и статических задач контактного взаимодействия тонких упругих пластин и безмоментных цилиндрических оболочек с абсолютно твердыми телами.

В настоящей работе предлагается описание нового метода решения задач о колебаниях тонких упругих оболочек с жесткими накладками. Этот метод, основанный на применении обобщенных функций, позволяет учесть массу, геометрию накладки, а также способ ее крепления к оболочке. Предлагаемый метод применяется к исследованию колебаний круговой цилиндрической оболочки с абсолютно жесткой кольцевой накладкой конечной ширины. Рассмотрены прямая и обратная постановки задачи. Найдены точные аналитические решения.

1. *Описание метода.* Представим математическую модель динамического поведения тонкой упругой оболочки с накладкой операторным уравнением

$$A\ddot{\overline{U}}(\alpha_1,\alpha_2,t)+C\overline{U}(\alpha_1,\alpha_2,t)=\overline{F}(\alpha_1,\alpha_2,t),\quad (\alpha_1,\alpha_2)\in S, \tag{1.1}$$

где A, C — соответственно инерционный и упругий операторы, определенные на классе функций, удовлетворяющих граничным условиям на краю оболочки, $\overline{U}$ — вектор-функция, определяющая кинематические величины, например, перемещения или углы поворота поперечного сечения, $\overline{F}$ — вектор-функция, определяющая внешнее воздействие на оболочку, α_1, α_2 — гауссовы координаты точек срединной поверхности, t — время, S — односвязная область, занимаемая срединной поверхностью оболочки.

Предположим, что накладка жестко прикреплена к одной из лицевых поверхностей оболочки. Предположим также, что известен закон перемещения произвольной точки накладки по пространственным координатам α_1, α_2

$$\overline{U}(\alpha_1,\alpha_2,t)=\overline{U}_0(\alpha_1,\alpha_2,t),\quad (\alpha_1,\alpha_2)\in S_\sigma, \tag{1.2}$$

где S_σ — область контакта, имеющая кусочно-гладкую границу L.

Введем линейный ограниченный оператор D, с помощью которого запишем условия непрерывности перемещений и углов поворота оболочки во всей области S, в том числе и на границе L

$$D\overline{U}(\alpha_1,\alpha_2,t)\in C^0(S). \tag{1.3}$$

После принятия условий (1.2) и (1.3) соотношение (1.1) можно использовать для определения внешней нагрузки, которая передается на оболочку через накладку и обеспечивает в области контакта перемещение оболочки по закону (1.2). Поскольку допускаются конечные разрывы высших производных вектор-функции $\overline{U}$, то дифференцирование в выражении (1.1) осуществляется по правилам пространства обобщенных функций ([4], гл. 2, § 6, с. 106). Так, общее выражение для вектор-функции $\overline{F}$ может быть представлено в виде

$$\overline{F}(\alpha_1, \alpha_2, t) = \overline{f}(\alpha_1, \alpha_2, t) + \overline{\chi}(\alpha_1^l, \alpha_2^l, t)\delta_L + \partial/\partial n(\overline{\psi}(\alpha_1^l, \alpha_2^l, t)\delta_L), \tag{1.4}$$

где $(\alpha_1^l, \alpha_2^l) \in L$, n — нормаль к кривой L, $\overline{f}$ - некоторая непрерывная функция гауссовых координат α_1, α_2, определяющая распределенную по области контакта нагрузку, следующие два слагаемые описываются обобщенными функциями простого и двойного слоя соответственно, определенными на поверхности оболочки, сосредоточенными на L и действующими по правилу ([4], гл. 2, § 5, с. 100, § 6, с. 118)

$$(\overline{\chi}\delta_L, \phi) = \int_L \overline{\chi}(\alpha_1^l, \alpha_2^l, t)\phi(\alpha_1^l, \alpha_2^l, t)dl, \qquad (\alpha_1^l, \alpha_2^l) \in L,$$

$$(\partial/\partial n(\overline{\psi}\delta_L), \phi) = -\int_L \overline{\psi}(\alpha_1^l, \alpha_2^l, t)\partial\phi(\alpha_1^l, \alpha_2^l, t)/\partial n dl, \quad (\alpha_1^l, \alpha_2^l) \in L,$$

здесь ϕ — пробная функция.

Векторные выражения $\overline{\chi}\delta_L$, $\partial/\partial n(\overline{\psi}\delta_L)$ обозначают соответственно силу и момент, локализованные на границе накладки. Их величина определяется значениями вектор-функций $\overline{\chi}$ и $\overline{\psi}$ на кривой L.

Соотношение (1.4) представляет выражение для вектор-функции $\overline{F}$ в самом общем виде. Исследуемый объект, внешнее нагружение, а также выбор той или иной модели влияют на то, какие слагаемые будут присутствовать в правой части (1.4). Конкретные значения $\overline{\chi}$ и $\overline{\psi}$ определяются, вообще говоря, величинами конечных разрывов частных производных вектор-функции $\overline{U}$ по координатам α_1, α_2 при переходе через границу накладки. Поскольку внутри области контакта функция $\overline{U}$ задается соотношением (1.2), то решение задачи сводится к вычислению значений соответствующих частных производных вне области контакта $S \setminus S_\sigma$, т. е. к однородному дифференциальному уравнению

$$A\ddot{\overline{U}}(\alpha_1, \alpha_2, t) + C\overline{U}(\alpha_1, \alpha_2, t) = 0, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in S \setminus S_\sigma \tag{1.5}$$

с граничными условиями (1.2)–(1.3) на кривой L.

Итак, решение краевой задачи (1.5), (1.2), (1.3) полностью определяет нагрузку $\overline{F}$, передающуюся на оболочку через накладку, а следовательно, и контактную реакцию оболочки $\overline{F}_r = -\overline{F}$ [2].

Описанная методика пригодна для решения задач вынужденных колебаний пластин и оболочек с накладками при внешних нагружениях как гармонического, так и нестационарного характера.

В нестационарных задачах применяется интегральное преобразование Лапласа по времени. В случае гармонических вынужденных колебаний с частотой ω_f параметр преобразования Лапласа p заменяется на $i\omega_f$, $i = \sqrt{-1}$, и из уравнений движения накладки выводятся уравнения резонансных частот колебаний рассматриваемой системы.

Предположим теперь, что контакт между оболочкой и накладкой осуществляется через тонкий адгезионный слой. Пусть $\overline{U}_\sigma = \overline{U}_\sigma(\alpha_1, \alpha_2, t)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in S_\sigma$ — вектор-функция, определяющая кинематические характеристики оболочки в области контакта, в данном случае $\overline{U}_\sigma \neq \overline{U}_0$. Если обозначить через ε диагональную матрицу, ненулевые элементы которой выражаются некоторым образом через малые параметры, обратно пропорциональные жесткости адгезионного слоя в направлении α_1, α_2 соответственно, то

$$\overline{U}_\sigma(\alpha_1, \alpha_2, t) = \overline{U}_0(\alpha_1, \alpha_2, t) - \varepsilon\overline{F}(\alpha_1, \alpha_2, t), \tag{1.6}$$

Тогда в области контакта S_σ для вектор-функции $\overline{F}$ справедливо дифференциальное уравнение

$$\overline{F} + \varepsilon C\overline{F} - A(\ddot{\overline{U}}_0 - \varepsilon\ddot{\overline{F}}) - C\overline{U}_0 = 0.$$

Граничные условия определяются из (1.6) в предположении, что конечные разрывы высших производных вектор-функции $\overline{U}$ исчезают с введением тонкого адгезионного слоя между оболочкой и накладкой. Это приводит к замене сингулярных слагаемых в соотношении (1.4) непрерывными функциями, зависящими от малых параметров ε_1, ε_2.

Применение описанного метода к решению конкретных задач колебаний упругих оболочек с накладками рассмотрено в следующих разделах на примере круговой цилиндрической безмоментной оболочки с кольцевой накладкой. Использование стержневой модели позволило найти точные аналитические решения этих задач.

2. *Продольные колебания цилиндрической оболочки с накладкой.* В работе [1] в рамках стержневой модели рассмотрены осесимметричные продольные колебания безмоментной круговой цилиндрической оболочки под действием нагрузки, приложенной к абсолютно жесткой кольцевой накладке конечной ширины. Предполагается, что накладка жестко скреплена с оболочкой, их безотрывный контакт осуществляется на интервале $a \le x \le b$, где x — продольная осевая координата, a, b — координаты границ накладки. Для случая вынужденных гармонических колебаний с частотой ω_f найдено выражение контактной реакции в безразмерной форме (торцы оболочки жестко закреплены)

$$q(\xi) \equiv q(\xi,\omega) = u_0[\omega^2 - \omega\,\mathrm{ctg}(\omega\xi_1)\delta(\xi-\xi_1) - \omega\,\mathrm{ctg}(\omega(1-\xi_2))\delta(\xi-\xi_2)], \quad \xi_1 \le \xi \le \xi_2, \tag{2.1}$$

где $\xi = x/l$, $u_0 = s_0/l$, $\xi_1 = a/l$, $\xi_2 = b/l$, $\omega = \omega_f(\rho l^2/E)^{1/2}$, s_0 — амплитуда перемещения накладки, l — длина оболочки, ρ — плотность, E — модуль упругости материала оболочки, а символом δ обозначена обобщенная функция, определенная на прямой.

В этой же работе получены три спектра частот

$$\mathrm{tg}(\omega\xi_1) = 0, \quad \mathrm{tg}[\omega(1-\xi_2)] = 0, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{ctg}(\omega\xi_1) + \mathrm{ctg}[\omega(1-\xi_2)] - (\xi_2 - \xi_1 + \mu)\omega = 0, \tag{2.3}$$

где μ — относительная масса накладки.

Уравнения (2.2) определяют резонансные частоты незагруженных частей оболочки по обе стороны от накладки. Уравнение (2.3) определяет частоты системного резонанса (оболочка–накладка). С увеличением относительной массы накладки значения корней уравнения (2.3) уменьшаются. Так как функция ctg имеет бесконечное число точек разрыва второго рода, то значения корней уравнения (2.3), начиная со второго, находятся близко от значений корней уравнений (2.2).

Предположим теперь, что между накладкой и оболочкой имеется тонкий адгезионный слой. Пусть s_σ — перемещение оболочки в области контакта, $u_\sigma = s_\sigma/l$. Тогда (1.6) принимает вид

$$u_\sigma(\xi) = u_0 - \varepsilon_\xi q(\xi),$$

где ε_ξ — малый параметр, обратно пропорциональный сдвиговой жесткости адгезионного слоя.

Контактная реакция находится после решения краевой задачи

$$q''(\xi) - q(\xi)\frac{1-\varepsilon_\xi\omega^2}{\varepsilon_\xi} = \frac{\omega^2 u_0}{\varepsilon_\xi}, \tag{2.4}$$

$$\frac{dq(\xi_1)}{d\xi} = -\frac{1}{\varepsilon_\xi}\frac{du(\xi_1)}{d\xi}, \quad \frac{dq(\xi_2)}{d\xi} = -\frac{1}{\varepsilon_\xi}\frac{du(\xi_2)}{d\xi}, \tag{2.5}$$

где u — перемещение оболочки вне области контакта. Выражения, стоящие в правых частях соотношений (2.5), известны из решения задачи жесткого контакта оболочки и накладки

$$\frac{du(\xi_1)}{d\xi} = -\omega \operatorname{ctg}(\omega\xi_1)u_0, \quad \frac{du(\xi_2)}{d\xi} = \omega \operatorname{ctg}(\omega(1-\xi_2))u_0.$$

Решение краевой задачи (2.4)–(2.5) имеет вид

$$q(\xi,\varepsilon_\xi) = u_0\Big[\frac{\omega^2}{1-\varepsilon_\xi\omega^2} - \omega \operatorname{ctg}(\omega\xi_1)X_1(\xi,\varepsilon_\xi) - \omega \operatorname{ctg}(\omega(1-\xi_2))X_2(\xi,\varepsilon_\xi)\Big], \tag{2.6}$$

где

$$X_1(\xi,\varepsilon_\xi) = \frac{\operatorname{ch}\lambda(\xi_2-\xi)}{\varepsilon_\xi\lambda \operatorname{sh}[\lambda(\xi_2-\xi_1)]}, \quad X_2(\xi,\varepsilon_\xi) = \frac{\operatorname{ch}\lambda(\xi_1-\xi)}{\varepsilon_\xi\lambda \operatorname{sh}[\lambda(\xi_2-\xi_1)]},$$

$\lambda = ((1-\varepsilon_\xi\omega^2)/\varepsilon_\xi)^{1/2}$, если $1-\varepsilon_\xi\omega^2 \geq 0$ и

$$X_1(\xi,\varepsilon_\xi) = \frac{\cos\lambda(\xi_2-\xi)}{\varepsilon_\xi\lambda \sin[\lambda(\xi_2-\xi_1)]}, \quad X_2(\xi,\varepsilon_\xi) = \frac{\cos\lambda(\xi_1-\xi)}{\varepsilon_\xi\lambda \sin[\lambda(\xi_2-\xi_1)]},$$

$\lambda = ((\varepsilon_\xi\omega^2-1)/\varepsilon_\xi)^{1/2}$, если $1-\varepsilon_\xi\omega^2 \leq 0$.
Функции X_1 и X_2, непрерывные на отрезке $[\xi_1,\xi_2]$, обладают следующим свойством: при $\varepsilon_\xi \to 0$

$$X_1(\xi,\varepsilon_\xi) \to \begin{cases} \infty, & \xi=\xi_1; \\ 0, & \xi\in(\xi_1,\xi_2], \end{cases} \qquad X_2(\xi,\varepsilon_\xi) \to \begin{cases} \infty, & \xi=\xi_2; \\ 0, & \xi\in[\xi_1,\xi_2), \end{cases}$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} X_1(\xi,\varepsilon_\xi)d\xi \to 1, \qquad \int_{\xi_1}^{\xi_2} X_2(\xi,\varepsilon_\xi)d\xi \to 1,$$

кроме того, для любой функции $g\in C^1[\xi_1,\xi_2]$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} X_1(\xi,\varepsilon_\xi)g(\xi)d\xi = g(\xi_1)\frac{1}{1-\varepsilon_\xi\omega^2} + O\Big(\sqrt{\frac{\varepsilon_\xi}{1-\varepsilon_\xi\omega^2}}\Big) \to g(\xi_1),$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} X_2(\xi,\varepsilon_\xi)g(\xi)d\xi = g(\xi_2)\frac{1}{1-\varepsilon_\xi\omega^2} + O\Big(\sqrt{\frac{\varepsilon_\xi}{1-\varepsilon_\xi\omega^2}}\Big) \to g(\xi_2).$$

Таким образом, $X_1(\xi,\varepsilon_\xi)$ и $X_2(\xi,\varepsilon_\xi)$ являются ε_ξ-приближениями обобщенных функций $\delta(\xi-\xi_1)$ и $\delta(\xi-\xi_2)$ соответственно, а контактная реакция (2.6) при $\varepsilon_\xi \to 0$ стремится в интегральном смысле к решению (2.1) задачи жесткого контакта оболочки и накладки.

3. *Прямая задача.* В случае нестационарных колебаний изображение по Лапласу контактной реакции при начальных нулевых условиях принимает вид

$$q^L(\xi,p) = v_0(p)(-p^2 - p\operatorname{cth}(p\xi_1)\delta(\xi-\xi_1) - p\operatorname{cth}[p(1-\xi_2)]\delta(\xi-\xi_2)), \tag{3.1}$$

где $v_0(p)$ — изображение по Лапласу функции перемещения накладки $u_0(\tau)$, $\tau = t(E\rho l^2)^{1/2}$, t — время. Из уравнения движения накладки, записанного в пространстве изображений,

$$\mu p^2 v_0(p) = P^L(p) + \int_{\xi_1}^{\xi_2} q^L(\xi,p)d\xi,$$

где P^L — образ по Лапласу величины $P(\tau) = P_a(\tau)l(ES)^{-1}$, S — площадь поперечного сечения оболочки, $P_a(\tau)$ — активная сила, приложенная к накладке, получаем

$$v_0(p) = \frac{P^L(p)}{p^2(\mu+\xi_2-\xi_1) + p\operatorname{cth}(p\xi_1) + p\operatorname{cth}[p(1-\xi_2)]}. \tag{3.2}$$

Рассмотрим четыре варианта нагрузки:

1. $P(\tau) = \delta(\tau)$ или $P^L(p) = 1$,
2. $P(\tau) = H(\tau)$ или $P^L(p) = 1/p$,
3. $P(\tau) = \tau$ или $P^L(p) = 1/p^2$,
4. $P(\tau) = \tau^2/2$ или $P^L(P) = 1/p^3$.

Здесь δ — импульсная функция Дирака, H — ступенчатая функция Хевисайда.

Положим вначале $P(\tau) = \delta(\tau)$. Это означает, что на оболочку через накладку действует мгновенный начальный импульс.

Из (3.2) $u_0(\tau)$ может быть найдена двумя способами.

Если представить v_0 в виде экспоненциального разложения

$$v_0(p) = \frac{2}{p(pm+2)^2}(1 - \exp^{-2p\xi_1} - \exp^{-2p(1-\xi_2)}) + \frac{2}{p(pm+2)^3}(4\exp^{-2p(\xi_1+1-\xi_2)} - \exp^{-4p\xi_1} - \\ - \exp^{-4p(1-\xi_2)}) - \frac{2}{p(pm+2)^4}(4\exp^{-2p\xi_1-4p(1-\xi_2)} + 4\exp^{-4p\xi_1-2p(1-\xi_2)} + \exp^{-6p\xi_1} + \exp^{-6p(1-\xi_2)}) \cdots, \quad (3.3)$$

где $m = \mu + \xi_2 - \xi_1$, то, применяя к (3.3) обратное преобразование Лапласа почленно, получаем

$$u_0(\tau) = 0.5(1 - \exp^{-2\tau/m}(1 + 2\tau/m))H(\tau) + H(\tau - 2\xi_1)[-0.5 + \exp^{-2(\tau-2\xi_1)/m}(0.5 + (\tau - 2\xi_1)/m)] + \\ + H(\tau - 2(1-\xi_2))[-0.5 + \exp^{-2(\tau-2(1-\xi_2))/m}(0.5 + (\tau - 2(1-\xi_2))/m)] + \\ + H(\tau - 2\xi_1 - 2(1-\xi_2))[1 - \exp^{-2(\tau-2\xi_1-2(1-\xi_2))/m}(1 + \\ + 2(\tau - 2\xi_1 - 2(1-\xi_2))/m) + 2(\tau - 2\xi_1 - 2(1-\xi_2))^2/m^2] + \cdots. \quad (3.4)$$

Решение u_0 — непрерывная функция, содержащая бесконечное число слагаемых, но на каждом конечном интервале времени лишь конечное их число отлично от нуля.

Другим способом перемещение u_0 можно найти после разложения функции $v_0(p)$ на простейшие дроби. Для этого необходимо определить особые точки функции $v_0(p)$ в комплексной p-плоскости. Исследования показывают, что функция $v_0(p)$ — мероморфная, имеющая счетное число полюсов, лежащих на мнимой оси, $p_i = x_i + \imath y_i$, $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2 \ldots$. Значения y_i определяются из трансцендентного уравнения (2.3), если в нем произвести замену $\omega = y_i$.

Таким образом,

$$u_0(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \sin(y_i \tau), \quad (3.5)$$

$$c_i = 2\,\mathrm{res}_{y_i}\, v_0(p) = \frac{2}{y_i(\xi_1 \operatorname{ctg}^2(y_i\xi_1) + (1-\xi_2)\operatorname{ctg}^2(y_i(1-\xi_2)) + \mu + 1)}.$$

Если $P(\tau) = H(\tau)$, то

$$u_0(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i[1 - \cos(y_i\tau)]/y_i. \quad (3.6)$$

Если $P(\tau) = \tau$, то

$$u_0(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i[\tau - \sin(y_i\tau)/y_i]/y_i. \quad (3.7)$$

Если $P(\tau) = 0.5\tau^2$, то

$$u_0(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i[0.5\tau^2 - [1 - \cos(y_i\tau)]/y_i^2]/y_i. \quad (3.8)$$

Коэффициенты c_i убывают быстрее, чем $1/i$ при $i \to \infty$, поэтому функциональные ряды (3.5), (3.6)–(3.8) сходятся достаточно быстро для всех $\tau \in [0, \infty)$.

Из (3.1) видно, что изображение по Лапласу контактной реакции q^L состоит из слагаемых, сосредоточенных в точках ξ_1 и ξ_2 (обозначим их соответственно P_1^L, P_2^L), а также из слагаемого, представляющего распределенную по участку $[\xi_1, \xi_2]$ функцию (обозначим ее P_q^L).

Пусть $P(\tau) = \delta(\tau)$. Учитывая соотношения (3.1) и (3.2), представим P_1^L в виде экспоненциального разложения

$$P_1^L(p) = \frac{1}{pm+2} + \frac{2}{(pm+2)^2}[(pm+1)\exp^{-2p\xi_1} - \exp^{-2p(1-\xi_2)}] + \\ + \frac{2pm}{(pm+2)^3}[(pm+1)\exp^{-4p\xi_1} - \exp^{-4p(1-\xi_2)} - 2\exp^{-2p\xi_1-2p(1-\xi_2)}] + \cdots . \quad (3.9)$$

Применяя к (3.9) обратное преобразование Лапласа почленно, имеем

$$P_1(\tau) = \frac{1}{m}\left[H(\tau)\exp^{-2\tau/m} + H(\tau-2\xi_1)\exp^{-2(\tau-2\xi_1)/m}\left[1 - \frac{\tau-2\xi_1}{m}\right] + \right. \\ \left. + H(\tau - 2(1-\xi_2))\frac{2(\tau-2(1-\xi_2))}{m}\exp^{-2(\tau-2(1-\xi_2))/m} + \cdots\right], \quad (3.10)$$

или, используя разложение на простые дроби,

$$P_1(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i \operatorname{ctg}(y_i\xi_1)\sin(y_i\tau). \quad (3.11)$$

Оригинал $P_2(\tau)$ определяется формулой (3.10), если в ней произвести замену ξ_1 на $1-\xi_2$.

Используя вычеты, находим

$$P_2(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i \operatorname{ctg}(y_i(1-\xi_2))\sin(y_i\tau). \quad (3.12)$$

Выражение, стоящее в правой части (3.10), представляет собой функцию, имеющую конечные разрывы в точках $\tau = 2n\xi_1$, где n — натуральные числа. Эти значения τ соответствуют моментам времени, в которые упругие волны приходят к краю накладки, отражаясь от торцов оболочки. Величина конечных разрывов постоянна и обратно пропорциональна сумме относительной массы и относительной длины накладки.

Частичные суммы функционального ряда (3.11) являются приближением функции в правой части (3.10) везде, кроме малых окрестностей точек ее разрыва, в которых наблюдается эффект Гиббса ([5], гл. 2, § 9, с. 105). Аналогично ведет себя функциональный ряд (3.12).

Учитывая соотношения (3.1), (3.2), также находим экспоненциальное разложение для функции P_q^L, которая принадлежит пространству изображений по Лапласу обобщенных функций([5], гл. 6, § 2, с. 258)

$$P_q^L(p) = \frac{p}{pm+2} - \frac{2p}{(pm+2)^2}[\exp^{-2p\xi_1} + \exp^{-2p(1-\xi_2)}] + \\ + \frac{2p}{(pm+2)^2}[4\exp^{-2p\xi_1-2p(1-\xi_2)} - pm\exp^{-4p\xi_1} - pm\exp^{-4p(1-\xi_2)}] + \cdots .$$

Проводя обратное преобразование Лапласа в пространстве обобщенных функций, получаем

$$P_q(\tau) = \frac{1}{m}\delta(\tau) - \frac{2}{m^2}[H(\tau)\exp^{-2\tau/m} + \exp^{-2(\tau-2\xi_1)/m}]\left[1 - \frac{2(\tau-2\xi_1)}{m}\right]H(\tau-2\xi_1) + \\ + \exp^{-2(\tau-(1-\xi_2))/m}\left[1 - \frac{2(\tau-2(1-\xi_2))}{m}H(\tau-2(1-\xi_2)) + \cdots\right] \quad (3.13)$$

или

$$P_q(\tau) = \delta(\tau)\sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i - \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i^2 \sin(y_i\tau). \tag{3.14}$$

Из (3.13), (3.14) видно, что контактная реакция, распределенная по области контакта $[\xi_1, \xi_2]$, состоит из мгновенного начального импульса и разрывной функции $P_c(\tau) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i y_i^2 \sin(y_i\tau)$, точки разрыва которой совпадают с точками разрыва функций P_1, P_2, причем величина мгновенного начального импульса $\sum\limits_{i=1}^{\infty} = 1/(\mu + \xi_2 - \xi_1)$ обратно пропорциональна сумме отношений массы накладки к массе оболочки и длины накладки к длине оболочки, а величина конечных разрывов постоянна и равна $2/(\mu + \xi_2 - \xi_1)^2$.

Если $P(\tau) = H(\tau)$, то

$$P_1(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \operatorname{ctg}(y_i\xi_1)[1 - \cos(y_i\tau)], \tag{3.15}$$

$$P_2(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \operatorname{ctg}(y_i(1-\xi_2))[1 - \cos(y_i\tau)], \tag{3.16}$$

$$P_q(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i \cos(y_i\tau). \tag{3.17}$$

Отметим, что функциональные ряды (3.11), (3.12), (3.14) получаются почленным дифференцированием функциональных рядов (3.15)–(3.17) соответственно. Это возможно, т. к. в пространстве обобщенных функций дифференцирование является линейной непрерывной операцией.

Соотношения (3.4), (3.10), (3.13) показывают, что на начальном отрезке времени $\tau < \min(2\xi_1, 2(1-\xi_2))$ в каждом из рассмотренных случаев нагружения величина перемещения накладки, а также составляющие контактной реакции определяются суммой относительных массы и длины накладки и не зависят от отдельных значений ξ_1, ξ_2, μ.

4. *Обратная задача.* Определим нагрузку, обеспечивающую перемещение накладки, например, с постоянной скоростью v_1. В этом случае $v_0 = v_1 p^{-2}$ и, используя обозначения работы [3], находим

$$F_x(\xi,\tau) = v_1\Biggl[\delta(\tau) + \delta(\xi-\xi_1)\Bigl[1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} H(\tau - 2i\xi_1)\Bigr] + \\ + \delta(\xi-\xi_2)\Bigl[1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} H(\tau - 2i(1-\xi_2))\Bigr]\Biggr] \quad (\xi_1 \le \xi \le \xi_2). \tag{4.1}$$

Или, переходя к размерным величинам,

$$X(x,t) = \rho h v_1\Biggl[\delta(t) + \delta(x-x_1)v_s\Bigl[1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} H(t - 2ix_1/v_s)\Bigr] + \\ + \delta(x-x_2)v_s\Bigl[1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} H(t - 2i(1-x_2)/v_s)\Bigr]\Biggr] \quad (x_1 \le x \le x_2). \tag{4.2}$$

Здесь $x_1 = l\xi_1$, $x_2 = l\xi_2$, $v_s = (E\rho^{-1})^{1/2}$ — скорость распространения продольных упругих волн в оболочке. Из (4.1) или (4.2) следует, что накладка будет перемещаться с постоянной скоростью v_1, если к ней приложить мгновенный начальный импульс, равный $m_1 v_1$ ($m_1 = 2\pi R l_1 \rho h$ — масса накладки, $l_1 = x_2 - x_1$, R — радиус оболочки) и разрывную во времени нагрузку, приложенную к краям накладки, точки разрыва которой совпадают с моментами времени, когда упругая волна, порожденная начальным импульсом и отраженная от торца оболочки, возвращается к краю накладки. Величина конечного разрыва равна $2m_1 v_1 v_s / l_1$.

Литература

1. Жигалко Ю.П. *Обратные задачи изгиба упругих пластин и оболочек при локальном динамическом нагружении* // Изв. вузов. Математика. – 1986. – № 5. – С. 29–37.
2. Жигалко Ю.П. *Колебания тонкой упругой оболочки с присоединенным твердым телом* // Изв. вузов. Математика. – 1987. – № 5. – С. 41–46.
3. Жигалко Ю.П., Торопова М.М. *Обобщенные решения контактных задач для упругих пластин и оболочек* // Изв. АН СССР. Механ. тверд. тела. – 1989. – № 2. – С. 109–114.
4. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1976. – 528 с.
5. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т 2. – М.: Мир, 1965. – 537 с.
6. Шварц Л. *Математические методы для физических наук.* – М.: Мир, 1965. – 412 с.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 17.01.1996
окончательный вариант 17.12.1996