ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 12 (475)

УДК 519.854

*А.И. ГОЛИКОВ, Ю.Г. ЕВТУШЕНКО*

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ ОБ АЛЬТЕРНАТИВАХ К НАХОЖДЕНИЮ НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

## 1. Введение

Численным методам решения систем уравнений и неравенств посвящена обширная литература. В приложениях часто встречается случай, когда рассматриваемые системы не имеют решений. В [1]–[4] такие задачи, названные несобственными, подробно исследованы и предложены специальные приемы коррекции для устранения несовместности. Одновременное изучение совместных и несовместных систем содержится в многочисленных книгах, статьях, посвященных теоремам об альтернативах (напр., [5]–[10]). В этих работах каждой системе линейных уравнений и неравенств ставится в соответствие альтернативная система такая, что обе системы не могут иметь решения одновременно и всегда разрешима только одна из них. Априори не известно, имеет ли данная система решение. Поэтому следует, во-первых, выяснить, разрешима ли заданная система и, во-вторых, найти ее решение, если она разрешима.

В данной работе предлагается подход к решению систем линейных уравнений и неравенств на основе конструктивного доказательства теорем об альтернативах. Обоснование предлагаемого подхода проводится на основе теории двойственности нелинейного программирования. Вводятся системы, сопряженные и альтернативные к исходной. Размерность переменных в этих системах равна числу уравнений и неравенств в исходной задаче. Решение сводится к безусловной минимизации норм невязки исходной или альтернативной к ней системы.

Если заданы исходная система и альтернативная к ней, то для нахождения решения разрешимой системы достаточно проминимизировать невязку какой-либо одной из этих двух систем. Такая задача дает более богатую информацию, чем просто решение исходной системы. Если для выбранной системы в результате безусловной минимизации получена нулевая невязка, то решение этой задачи одновременно является и решением выбранной системы. При этом можно утверждать, что вторая система не имеет решения. Если минимальная невязка выбранной системы не равна нулю, то эта система не имеет решения, а вторая система разрешима и по результатам проведенной минимизации по простым формулам вычисляется решение этой системы с минимальной нормой (нормальное решение).

Аналогично подходу, используемому в [11], формулируется задача, которая вместе с задачей безусловной минимизации нормы невязок составляют пару взаимно двойственных задач. Аппарат теории двойственности позволяет дать простое конструктивное доказательство теоремы об альтернативах.

В качестве примера предлагаемого подхода рассматриваются нетрадиционные двупараметрические условия оптимальности для задач линейного программирования [12]. Формулируется имеющая меньшую размерность несовместная система, которая является альтернативной к системе необходимых и достаточных условий оптимальности. В результате однократной безусловной минимизации гладкой кусочно-квадратичной функции с числом переменных на единицу больше числа переменных прямой задачи вычисляются по простым формулам нормальное

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, код проекта № 01-01-00804, и по программе государственной поддержки ведущих научных школ, код проекта № 00-15-96080.

решение прямой задачи и оптимальные невязки с минимальной нормой двойственной задачи линейного программирования.

Подчеркнем, что, благодаря различию размерностей переменных исходной и альтернативной систем, для численного решения заданной системы может оказаться целесообразным переход от исходной совместной системы к минимизации невязки альтернативной несовместной системы. Такая редукция может привести к задаче безусловной минимизации меньшей размерности и дает возможность определить нормальное решение исходной системы. Таким образом, в отличие от устранения несовместности в несобственных задачах [1]–[4] для нахождения нормального решения совместной системы может быть полезен переход к “решению” несовместной альтернативной системы.

## 2. Основные теоремы

Пусть $m \times n$-матрица задана в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где прямоугольные матрицы $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{21}$, $A_{22}$ имеют соответственно размерности $m_1 \times n_1$, $m_1 \times n_2$, $m_2 \times n_1$, $m_2 \times n_2$. Пусть векторы $x \in R^n$, $z, u, b \in R^m$ имеют разбиения $x^\top = [x_1^\top, x_2^\top]$, $z^\top = [z_1^\top, z_2^\top]$, $u^\top = [u_1^\top, u_2^\top]$, $b^\top = [b_1^\top, b_2^\top]$, где $x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \in R^{n_2}$, $n = n_1 + n_2$, $z_1, u_1, b_1 \in R^{m_1}$, $z_2, u_2, b_2 \in R^{m_2}$, $m = m_1 + m_2$. Введем вспомогательные множества $\Pi_x = \{[x_1, x_2] : x_1 \in R_+^{n_1},\ x_2 \in R^{n_2}\}$, $\Pi_z = \{[z_1, z_2] : z_1 \in R_+^{m_1},\ z_2 \in R^{m_2}\}$, $\Pi_u = \{[u_1, u_2] : u_1 \in R_+^{m_1},\ u_2 \in R^{m_2}\}$.

Рассмотрим систему линейных равенств и неравенств

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \geq b_1, \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, \quad x_1 \geq 0_{n_1}. \tag{I}$$

Определим *сопряженную систему* к (I)

$$A_{11}^\top z_1 + A_{21}^\top z_2 \leq 0_{n_1}, \quad A_{12}^\top z_1 + A_{22}^\top z_2 = 0_{n_2}, \quad z_1 \geq 0_{m_1}. \tag{I$'$}$$

Введем *альтернативную* к (I) систему

$$A_{11}^\top u_1 + A_{21}^\top u_2 \leq 0_{n_1}, \quad A_{12}^\top u_1 + A_{22}^\top u_2 = 0_{n_2}, \quad b_1^\top u_1 + b_2^\top u_2 = \rho, \quad u_1 \geq 0_{m_1}. \tag{II}$$

Здесь $\rho > 0$ — произвольное фиксированное положительное число. Отметим, что требование положительности $\rho$ автоматически предполагает выполнение условия $\|b\| \neq 0$.

Введем вектор $w \in R^{n+1}$, представимый в виде $w^\top = [w_1^\top, w_2^\top, w_3]$, где $w_1 \in R^{n_1}$, $w_2 \in R^{n_2}$, $w_3 \in R^1$, и вспомогательное множество $\Pi_w = \{[w_1, w_2, w_3] : w_1 \in R_+^{n_1},\ w_2 \in R^{n_2},\ w_3 \in R^1\}$.

Для системы (II) сопряженная система имеет вид

$$A_{11}w_1 + A_{12}w_2 - b_1 w_3 \geq 0_{m_1}, \quad A_{21}w_1 + A_{22}w_2 - b_2 w_3 = 0_{m_2}, \quad w_1 \geq 0_{n_1}. \tag{II$'$}$$

Множества решений систем (I), (I$'$), (II) и (II$'$) обозначим соответственно через $X$, $Z$, $U$ и $W$. В отличие от (I) и (II) сопряженные системы (I$'$) и (II$'$) всегда имеют решения, т. к. $0_m \in Z$ и $0_{n+1} \in W$.

**Лемма.** *Системы* (I) *и* (II) *не могут быть одновременно разрешимы.*

**Доказательство.** Предположим обратное, пусть существуют решения $x^*$ и $u^*$ систем (I), (II). Подставим $x^*$ в (I) и скалярно умножим первое неравенство в (I) на $u_1^*$, второе равенство — на $u_2^*$. После сложения результатов и простейших преобразований получим

$$x_1^{*\top}(A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^*) + x_2^{*\top}(A_{12}^\top u_1^* + A_{22}^\top u_2^*) \geq b_1^\top u_1^* + b_2^\top u_2^*.$$

Согласно (II) левая часть этого неравенства неположительна, а правая часть строго положительна, т. к. $A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^* \leq 0_{n_1}$ и $b_1^\top u_1^* + b_2^\top u_2^* = \rho > 0$. Приходим к противоречию. $\square$

Ниже в теоремах 2 и 4 будут приведены простые и конструктивные доказательства того, что всегда имеет решение одна и только одна из систем: либо (I), либо (II). Поэтому эти системы называются альтернативными.

Альтернативная к альтернативной задаче (II) сводится к исходной задаче (I). Действительно, система, альтернативная к (II), имеет вид

$$A_{11}w_1 + A_{12}w_2 - b_1 w_3 \geq 0_{m_1}, \quad A_{21}w_1 + A_{22}w_2 - b_2 w_3 = 0_{m_2}, \quad \rho w_3 = \rho', \ \ w_1 \geq 0_{n_1}, \tag{1}$$

где $\rho' > 0$ — произвольное положительное число. Поэтому $w_3 = \rho'/\rho > 0$. Сделав в (1) замену $x_1 = w_1/w_3$, $x_2 = w_2/w_3$, приходим к исходной системе (I).

Проекцией точки $\overline{x}$ на непустое замкнутое множество $X$ назовем точку $x^* \in X$, если $\min\limits_{x \in X} \|\overline{x} - x\| = \|\overline{x} - x^*\|$. Обозначим $x^* = \mathrm{pr}(\overline{x}, X)$, $\mathrm{dist}(\overline{x}, X) = \|x^* - \overline{x}\|$.

Через $\mathrm{pen}(x, X)$ обозначим квадратичный штраф в точке $x$ за нарушение условия $x \in X$. Аналогично введем обозначение $\mathrm{pen}(u, U)$. Таким образом, для множеств $X$, $U$ и любых $x \in \Pi_x$ и $u \in \Pi_u$ имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{pen}(x, X) &= [\|(b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2)_+\|^2 + \|b_2 - A_{21}x_1 - A_{22}x_2\|^2]^{1/2}, \\ \mathrm{pen}(u, U) &= [\|(A_{11}^\top u_1 + A_{21}^\top u_2)_+\|^2 + \|A_{12}^\top u_1 + A_{22}^\top u_2\|^2 + (\rho - b_1^\top u_1 - b_2^\top u_2)^2]^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже для простоты считаем, что используется евклидова норма; $a_+$ есть неотрицательная часть вектора $a$, т. е. $i$-я компонента вектора $a_+$ совпадает с $i$-й компонентой вектора $a$, если она неотрицательна, и равна нулю в противном случае.

Если $x \in \Pi_x$, то $\mathrm{pen}(x, X) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in X$. Аналогично, если $u \in \Pi_u$, то $\mathrm{pen}(u, U) = 0$ тогда и только тогда, когда $u \in U$.

Для проверки разрешимости той или иной системы и нахождения соответствующего решения будем использовать методы безусловной минимизации, примененные к любой из следующих задач:

$$I_1 = \min_{x \in \Pi_x} [\mathrm{pen}(x, X)]^2/2, \tag{2}$$

$$I_2 = \min_{u \in \Pi_u} [\mathrm{pen}(u, U)]^2/2. \tag{3}$$

Строго говоря, (2) и (3) не являются задачами безусловной минимизации, т. к. в них присутствуют ограничения на знаки компонент векторов $x_1$ и $u_1$, однако поскольку большинство методов безусловной минимизации с помощью простейших модификаций могут учитывать наличие ограничений на знак переменных, то сохраним за (2) и (3) этот термин.

Введем две задачи квадратичного программирования

$$I_1^d = \max_{z \in Z} \{b^\top z - \|z\|^2/2\}, \tag{4}$$

$$I_2^d = \max_{w \in W} \{\rho w_3 - \|w\|^2/2\}. \tag{5}$$

Множества $Z$ и $W$ всегда непусты, т. к. содержат нулевые векторы. В отличие от систем (I), (II), которые могут быть разрешимы или неразрешимы, задачи (2)–(5) всегда имеют решения. При этом задачи (4) и (5) имеют единственные решения. Задачи (2) и (3) являются двойственными к задачам (4) и (5) соответственно. Ниже покажем, что задачи (4) и (5) можно назвать взаимно двойственными к (2) и (3) соответственно.

Формально задачи безусловной минимизации (2) и (3) не имеют функций Лагранжа и, следовательно, для них нельзя непосредственно построить двойственные задачи. Тем не менее с помощью введения дополнительных переменных можно построить искусственные ограничения и получить эквивалентные задачи нелинейного программирования, для которых определены двойственные задачи. Такой прием, насколько известно авторам, был впервые четко сформулирован и использован в [11].

Введем вектор дополнительных переменных $y \in R^m$, $y^\top = [y_1^\top, y_2^\top]$, где $y_1 \in R^{m_1}$, $y_2 \in R^{m_2}$, такой, что

$$y_1 = b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2, \quad y_2 = b_2 - A_{21}x_1 - A_{22}x_2.$$

Тогда задача (2) заменяется эквивалентной задачей на условный минимум

$$I_1 = \min_{[x,y] \in G} f(y), \tag{6}$$

где целевая функция и допустимое множество $G$ имеют вид

$$f(y) = \|(y_1)_+\|^2/2 + \|y_2\|^2/2,$$
$$G = \{[x,y] : A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1 = b_1,\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + y_2 = b_2,\ x \in \Pi_x\}.$$

В отличие от множества $X$ множество $G$ всегда непусто.

Для задачи квадратичного программирования (6) определим вектор множителей Лагранжа $z \in \Pi_z$ и выпишем функцию Лагранжа

$$L(x,y,z) = f(y) + z_1^\top(b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2 - y_1) + z_2^\top(b_2 - A_{21}x_1 - A_{22}x_2 - y_2).$$

Преобразуем ее к виду

$$L(x,y,z) = f(y) - x_1^\top(A_{11}^\top z_1 + A_{21}^\top z_2) - x_2^\top(A_{12}^\top z_1 + A_{22}^\top z_2) + z_1^\top(b_1 - y_1) + z_2^\top(b_2 - y_2). \tag{7}$$

Введем двойственную функцию

$$F(z) = \min_{x \in \Pi_x} \min_{y \in R^n} L(x,y,z) \tag{8}$$

и рассмотрим двойственную к (6) задачу $\max\limits_{z \in \Pi_z} F(z)$.

Необходимые и достаточные условия минимума в задаче (8) имеют вид

$$L_{x_1}(x,y,z) = -A_{11}^\top z_1 - A_{21}^\top z_2 \geq 0_{n_1}, \quad D(x_1)(A_{11}^\top z_1 + A_{21}^\top z_2) = 0_{n_1}, \quad x_1 \geq 0_{n_1}, \tag{9}$$
$$L_{x_2}(x,y,z) = -A_{12}^\top z_1 - A_{22}^\top z_2 = 0_{n_2}, \tag{10}$$
$$L_{y_1}(x,y,z) = (y_1)_+ - z_1 = 0_{m_1}, \quad L_{y_2}(x,y,z) = y_2 - z_2 = 0_{m_2}. \tag{11}$$

Здесь и ниже через $D(z)$ обозначена диагональная матрица, у которой $i$-й диагональный элемент есть $i$-я компонента вектора $z$.

При $z \in \Pi_z$ из (11) имеем $z = y$. Подставим это соотношение в (7) и потребуем выполнения условия $z \in Z$. Тогда согласно (8)–(10) двойственная функция $F(z)$ принимает вид $F(z) = b^\top z - \|z\|^2/2$. Таким образом, приходим к задаче (4), которая является двойственной к (6) и, следовательно, к (2). Итак, задачу безусловной минимизации (2) и задачу квадратичного программирования (4) можно назвать взаимно двойственными. Аналогично задачи (3) и (5) являются двойственными друг к другу.

**Теорема 1.** *Всякое решение $x^*$ задачи* (2) *определяет единственное решение $z^{*\top} = [z_1^{*\top}, z_2^{*\top}]$ задачи* (4) *по формулам*

$$z_1^* = (b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*)_+, \quad z_2^* = b_2 - A_{21}x_1^* - A_{22}x_2^*, \tag{12}$$

*и справедливы следующие соотношения*:

$$\|z^*\|^2 = b^\top z^*, \tag{13}$$
$$z^* \perp Ax^*, \quad z^* \perp (b - z^*), \tag{14}$$
$$z^* = \mathrm{pr}(b, Z), \quad \|z^*\| = \mathrm{pen}(x^*, X), \quad \|b - z^*\| = \mathrm{dist}(b, Z), \tag{15}$$
$$[\mathrm{pen}(x^*, X)]^2 + [\mathrm{dist}(b, Z)]^2 = \|b\|^2. \tag{16}$$

**Доказательство.** В точке $x^*$ необходимые и достаточные условия минимума задачи (2) записываются в виде

$$\begin{gathered}
-A_{11}^\top(b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*)_+ - A_{21}^\top(b_2 - A_{21}x_1^* - A_{22}x_2^*) \geq 0_{n_1}, \\
D(x_1^*)[A_{11}^\top(b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*)_+ + A_{21}^\top(b_2 - A_{21}x_1^* - A_{22}x_2^*)] = 0_{n_1}, \quad x_1^* \geq 0_{n_1}, \\
A_{12}^\top(b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*)_+ + A_{22}^\top(b_2 - A_{21}x_1^* - A_{22}x_2^*) = 0_{n_2}.
\end{gathered} \tag{17}$$

В формулах (17) введем обозначения

$$z_1^* = (b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*)_+, \quad z_2^* = b_2 - A_{21}x_1^* - A_{22}x_2^* \tag{18}$$

и покажем, что $z^{*\top} = [z_1^{*\top}, z_2^{*\top}]$ является решением задачи (4). Условия (17) запишем в виде

$$A_{11}^\top z_1^* + A_{21}^\top z_2^* \leq 0_{n_1}, \quad A_{12}^\top z_1^* + A_{22}^\top z_2^* = 0_{n_2}, \tag{19}$$

$$D(x_1^*)(A_{11}^\top z_1^* + A_{21}^\top z_2^*) = 0_{n_1}, \quad x_1^* \geq 0_{n_1}. \tag{20}$$

Из (18) и (19) следует, что $z^* \in Z$. Умножим в (18) первое соотношение скалярно на $z_1^*$, второе — на $z_2^*$, получим

$$\begin{aligned}
&\|z_1^*\|^2 = z_1^{*\top}(b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*)_+ = z_1^{*\top}(b_1 - A_{11}x_1^* - A_{12}x_2^*) = b_1^\top z_1^* - x_1^{*\top}A_{11}^\top z_1^* - x_2^{*\top}A_{12}^\top z_1^*, \\
&\|z_2^*\|^2 = z_2^{*\top}(b_2 - A_{21}x_1^* - A_{22}x_2^*) = b_2^\top z_2^* - x_1^{*\top}A_{21}^\top z_2^* - x_2^{*\top}A_{22}^\top z_2^*.
\end{aligned}$$

Складывая эти соотношения, находим

$$\begin{aligned}
\|z^*\|^2 = \|z_1^*\|^2 + \|z_2^*\|^2 = b_1^\top z_1^* + b_2^\top z_2^* - x_1^{*\top}(A_{11}^\top z_1^* + A_{21}^\top z_2^*) - x_2^{*\top}(A_{12}^\top z_1^* + A_{22}^\top z_2^*) = \\
= (b - Ax^*)^\top z^* = b^\top z^*.
\end{aligned} \tag{21}$$

В (21) учтено, что согласно (19) и (20) $x_1^{*\top}(A_{11}^\top z_1^* + A_{21}^\top z_2^*) + x_2^{*\top}(A_{12}^\top z_1^* + A_{22}^\top z_2^*) = x^{*\top}A^\top z^* = 0$. Таким образом, доказано равенство (13) и показано, что $z^{*\top}Ax^* = 0$, т. е. векторы $z^*$ и $Ax^*$ ортогональны. Условие (13) можно переписать в виде $z^{*\top}(z^* - b) = 0$, откуда следует второе из утверждений (14).

Запишем функцию Лагранжа для задачи (4)

$$L(z, x) = b^\top z - \|z\|^2/2 - x_1^\top(A_{11}^\top z_1 + A_{21}^\top z_2) - x_2^\top(A_{12}^\top z_1 + A_{22}^\top z_2) \tag{22}$$

и приведем условия Куна–Таккера

$$L_{z_1}(z, x) = b_1 - z_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2 \leq 0_{m_1}, \tag{23}$$

$$D(z_1)(b_1 - z_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2) = 0_{m_1}, \quad z_1 \geq 0_{m_1}, \tag{24}$$

$$L_{z_2}(z, x) = b_2 - z_2 - A_{21}x_1 - A_{22}x_2 = 0_{m_2}, \tag{25}$$

$$L_{x_1}(z, x) = -(A_{11}^\top z_1 + A_{21}^\top z_2) \geq 0_{n_1}, \quad x_1 \geq 0_{m_1}, \quad D(x_1)(A_{11}^\top z_1 + A_{21}^\top z_2) = 0_{n_1}, \tag{26}$$

$$L_{x_2}(z, x) = -(A_{12}^\top z_1 + A_{22}^\top z_2) = 0_{n_2}. \tag{27}$$

Сравним необходимые и достаточные условия минимума (18)–(20) для задачи (2) с необходимыми и достаточными условиями оптимальности (23)–(27) для задачи квадратичного программирования (4). Если в условиях Куна–Таккера (23)–(27) в качестве $x$ взять вектор $x^*$, а в качестве $z$ — вектор $z^*$, определяемый в (18), то (26), (27) переходят в (19), (20). Легко видеть, что соотношения (18) обеспечивают выполнение условий (23)–(25). Таким образом, седловую точку $[z^*, x^*]$ функции Лагранжа (22) составляют вектор $z^*$ — решение задачи (4) и вектор $x^*$ — решение задачи (2), причем между этими векторами имеется связь, задаваемая формулами (12).

Из (2), (4) и (18) следует $I_1^d = \|z^*\|^2/2 = I_1 = [\text{pen}(x^*, X)]^2/2$. Отсюда получаем второе из утверждений (15).

Задачу (4) преобразуем к двум эквивалентным задачам

$$I_1^d = \max_{z \in Z}[-\|b - z\|^2 + \|b\|^2]/2 = \|b\|^2/2 - \min_{z \in Z} \|b - z\|^2/2.$$

Так как $z^*$ есть единственное решение задачи (4), то приходим к выводу, что $z^* = \mathrm{pr}(b, Z)$ и $\|b - z^*\| = \mathrm{dist}(b, Z)$, т. е. доказаны все утверждения (15).

Из (13) следует, что вектор невязки $z^*$ ортогонален вектору $b - z^*$. Поэтому три точки: начало координат в $R^m$, точки $z^*$ и $b$ образуют прямоугольный треугольник, у которого вектор $b$ определяет гипотенузу, вектор $z^*$ — катет длиной, равной $\mathrm{pen}(x^*, X)$, вектор $b - z^*$ — второй катет длиной $\mathrm{dist}(b, Z)$. Из теоремы Пифагора получим (16). $\square$

Из теоремы 1 следует, что $\|z^*\| \leq \|b\|$, $b^\top z^* \geq 0$. Вектор $z^*$ лежит в полусфере с центром в начале координат и радиусом, равным $\|b\|$, причем $z^*$ лежит в той половине сферы, где вектор $z^*$ образует острый угол с вектором $b$.

В теореме 1 утверждение (13) является следствием двойственности задач (4) и (2). Действительно, условия (12) позволяют выразить оптимальные переменные $x^*$ в задаче (2) через оптимальные переменные $z^*$ задачи (4). Тогда из условия двойственности $I_1 = I_1^d$ получаем $\|z^*\|^2 = b^\top z^*$.

Теперь можно сформулировать и доказать следующую теорему об альтернативах.

**Теорема 2.** *Пусть* $x^{*\top} = [x_1^{*\top}, x_2^{*\top}]$ *— произвольное решение задачи* (2), $z^{*\top} = [z_1^{*\top}, z_2^{*\top}]$ *— единственное решение задачи* (4).

1. *Если* $\|z^*\| = 0$, *то* $I_1 = I_1^d = 0$, $\mathrm{dist}(b, Z) = \|b\|$ *и система* (I) *разрешима, одним из ее решений является* $x^*$; *система* (II) *неразрешима.*
2. *Если* $\|z^*\| \neq 0$, *то* $I_1 = I_1^d > 0$, $\mathrm{dist}(b, Z) < \|b\|$ *и система* (I) *неразрешима*; *система* (II) *разрешима и вектор* $u^* = \rho z^*/\|z^*\|^2$ *— ее нормальное решение.*

**Доказательство.** 1. Если $\|z^*\| = 0$, то из (18) следует, что система (I) разрешима и $x^*$ — одно из решений системы (I), при этом $I_1 = I_1^d = 0$ и (16) переходит в выражение $\mathrm{dist}(b, Z) = \|b\|$. Согласно лемме система (II) не имеет решения.

2. Пусть $\|z^*\| \neq 0$. Тогда из (12) следует, что система $(I)$ неразрешима и $I_1 = I_1^d > 0$. Так как $I_1 = \mathrm{pen}(x^*, X) > 0$, то из (16) имеем $\mathrm{dist}(b, Z) < \|b\|$.

В процессе доказательства предыдущей теоремы было показано, что вектор $z^*$ удовлетворяет сопряженной однородной системе (I$'$). Поэтому вектор $u^* = \rho z^*/\|z^*\|^2$ также удовлетворяет системе (I$'$). По сравнению с (I$'$) в (II) добавлено одно неоднородное уравнение. Подставляя $u^*$ в это уравнение, убеждаемся с учетом (13), что вектор $u^* \in U$. Покажем, что $u^*$ — нормальное решение системы (II), т. е. является решением задачи

$$\min_{u \in U} \|u\|^2/2. \tag{28}$$

Двойственной к (28) является задача

$$\max_{\hat{x}_1 \in R_+^{n_1}} \max_{\hat{x}_2 \in R^{n_2}} \max_{\hat{x}_3 \in R^1} [\rho \widehat{x}_3 - \|(b_1 \widehat{x}_3 - A_{11}\widehat{x}_1 - A_{12}\widehat{x}_2)_+\|^2/2 - \|b_2 \widehat{x}_3 - A_{21}\widehat{x}_1 - A_{22}\widehat{x}_2\|^2/2]. \tag{29}$$

Запишем функцию Лагранжа для задачи (28)

$$L(u, \widehat{x}) = \|u\|^2/2 + \widehat{x}_1^\top (A_{11}^\top u_1 + A_{21}^\top u_2) + \widehat{x}_2^\top (A_{12}^\top u_1 + A_{22}^\top u_2) + \widehat{x}_3(\rho - b_1^\top u_1 - b_2^\top u_2)$$

и приведем условия Куна–Таккера, вычисленные в седловой точке $[\widetilde{u}^*, \widehat{x}^*]$, где $\widetilde{u}^{*\top} = [\widetilde{u}_1^{*\top}, \widetilde{u}_2^{*\top}]$

— решение задачи (28) и $\widehat{x}^{*\top} = [\widehat{x}_1^{*\top}, \widehat{x}_2^{*\top}]$ — решение задачи (29),

$$\widetilde{u}_1^* + A_{11}\widehat{x}_1^* + A_{12}\widehat{x}_2^* - b_1\widehat{x}_3^* \geq 0_{m_1}, \tag{30}$$

$$D(\widetilde{u}_1^*)(\widetilde{u}_1^* + A_{11}\widehat{x}_1^* + A_{12}\widehat{x}_2^* - b_1\widehat{x}_3^*) = 0_{m_1}, \quad \widetilde{u}_1^* \geq 0_{m_1}, \tag{31}$$

$$\widetilde{u}_2^* + A_{21}\widehat{x}_1^* + A_{22}\widehat{x}_2^* - b_2\widehat{x}_3^* = 0_{m_2}, \tag{32}$$

$$A_{11}^\top \widetilde{u}_1^* + A_{21}^\top \widetilde{u}_2^* \leq 0_{n_1}, \quad D(\widehat{x}_1^*)(A_{11}^\top \widetilde{u}_1^* + A_{21}^\top \widetilde{u}_2^*) = 0_{n_1}, \quad \widehat{x}_1^* \geq 0_{n_1}, \tag{33}$$

$$A_{12}^\top \widetilde{u}_1^* + A_{22}^\top \widetilde{u}_2^* = 0_{n_2}, \tag{34}$$

$$\rho - b_1^\top \widetilde{u}_1^* - b_2^\top \widetilde{u}_2^* = 0. \tag{35}$$

Из (30)–(32) получаем, что решение $\widetilde{u}^*$ задачи (28) связано с решением $\widehat{x}^*$ задачи (29) соотношениями

$$\widetilde{u}_1^* = (b_1\widehat{x}_3^* - A_{11}\widehat{x}_1^* - A_{12}\widehat{x}_2^*)_+, \quad \widetilde{u}_2^* = b_2\widehat{x}_3^* - A_{21}\widehat{x}_1^* - A_{22}\widehat{x}_2^*.$$

Используя эти соотношения, из равенств оптимальных значений целевых функций прямой задачи (28) и двойственной (29) имеем $\|\widetilde{u}^*\|^2 = \rho\widehat{x}_3^*$. Отсюда следует $\widehat{x}_3^* > 0$.

Сделав в (30)–(34) замену $\widetilde{u}^* = \widehat{x}_3^* z^*$, $\widehat{x}_1^* = \widehat{x}_3^* x_1^*$, $\widehat{x}_2^* = \widehat{x}_3^* x_2^*$ и сократив эти выражения на положительную величину $\widehat{x}_3^*$, приходим к условиям Куна–Таккера (23)–(27) для задачи (2), выполненным в точке $[z^*, x^*]$. Подставляя $\widetilde{u}^* = \widehat{x}_3^* z^*$ в (35), с учетом (13) получаем

$$\rho/\widehat{x}_3^* - b^\top z^* = \rho/\widehat{x}_3^* - \|z^*\|^2.$$

Отсюда при $\widehat{x}_3^* = \rho/\|z^*\|^2$ получаем, что нормальное решение системы (II) выражается через решение задачи (2) по формуле $\widetilde{u}^* = \rho z^*/\|z^*\|^2$. □

Анализ задач (3) и (5) аналогичен приведенному для задач (2), (4), однако есть некоторые отличительные стороны. Поэтому о свойствах задач (3), (5) приведем две теоремы, аналогичные теоремам 1, 2. Введем вектор $r \in R^{n+1}$, заданный в виде $r^\top = [0_n^\top, \rho]$, и матрицу $\widehat{A} = [-A \mid b]$.

**Теорема 3.** *Пусть $u^{*\top} = [u_1^{*\top}, u_2^{*\top}]$ — произвольное решение задачи* (3). *Тогда решение $w^{*\top} = [w_1^{*\top}, w_2^{*\top}, w_3^*]$ задачи* (5) *выражается через решение $w^*$ задачи* (3) *по формулам*

$$w_1^* = (A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^*)_+, \quad w_2^* = A_{12}^\top u_1^* + A_{22}^\top u_2^*, \quad w_3^* = \rho - b_1^* u_1^* - b_2^\top u_2^*, \tag{36}$$

*причем вектор $w^*$ обладает следующими свойствами:*

$$\|w^*\|^2 = \rho w_3^*; \tag{37}$$

$$w^* \perp \widehat{A}^\top u^*, \quad w^* \perp (r - w^*), \tag{38}$$

$$w^* = \mathrm{pr}(r, W), \quad \|w^*\| = \mathrm{pen}(u^*, U), \quad \|r - w^*\| = \mathrm{dist}(r, W), \tag{39}$$

$$[\mathrm{pen}(u^*, U)]^2 + [\mathrm{dist}(r, W)]^2 = \|r\|^2, \tag{40}$$

$$\|w^*\| \leq \rho, \quad 0 \leq w_3^* \leq \rho, \quad \|w_1^*\|^2 + \|w_2^*\|^2 \leq \rho^2/4. \tag{41}$$

**Доказательство.** Задача строго выпуклого квадратичного программирования (5) является задачей нахождения проекции вектора $[0_n, \rho]$ на непустое множество $W$, заданное системой линейных равенств и неравенств (II′). Эта задача всегда имеет единственное решение, для нее существует вектор множителей Лагранжа $u \in R^n$, а функция Лагранжа имеет вид

$$L(w, u) = \rho w_3 - \|w\|^2/2 - u_1^\top (b_1 w_3 - A_{11}w_1 - A_{12}w_2) - u_2^\top (b_2 w_3 - A_{21}w_1 - A_{22}w_2).$$

Запишем необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Куна–Таккера) для задачи (5), вычисленные в седловой точке $[w^*, u^*]$,

$$-w_1^* + A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^* \leq 0_{n_1}, \quad D(w_1^*)(-w_1^* + A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^*) = 0_{n_1}, \quad w_1^* \geq 0_{n_1}, \tag{42}$$

$$-w_2^* + A_{12}^\top u_1^* + A_{22}^\top u_2^* = 0_{n_2}, \tag{43}$$

$$\rho - w_3^* - b_1^\top u_1^* - b_2^\top u_2^* = 0, \tag{44}$$

$$A_{11} w_1^* + A_{12} w_2^* - b_1 w_3^* \geq 0_{m_1}, \quad D(u_1^*)(A_{11} w_1^* + A_{12} w_2^* - b_1 w_3^*) = 0_{m_1}, \quad u_1^* \geq 0_{m_1}, \tag{45}$$

$$A_{21} w_1^* + A_{22} w_2^* - b_2 w_3^* = 0_{m_2}. \tag{46}$$

Из условий (42)–(44) следуют формулы (36) для определения вектора $w^*$. Подставляя их в условия (45), (46), приходим к соотношениям

$$\begin{gathered}
A_{11}(A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^*)_+ + A_{12}(A_{12}^\top u_1^* + A_{22}^\top u_2^*) - b_1(\rho - b_1^\top u_1^* - b_2^\top u_2^*) \geq 0_{m_1}, \\
D(u_1^*)[A_{11}(A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^*)_+ + A_{12}(A_{12}^\top u_1^* + A_{22}^\top u_2^*) - b_1(\rho - b_1^\top u_1^* - b_2^\top u_2^*)] = 0_{m_1}, \quad u_1^* \geq 0_{m_1}, \\
A_{21}(A_{11}^\top u_1^* + A_{21}^\top u_2^*)_+ + A_{22}(A_{12}^\top u_1^* + A_{22}^\top u_2^*) - b_2(\rho - b_1^\top u_1^* - b_2^\top u_2^*) = 0_{m_2}.
\end{gathered}$$

Эти соотношения совпадают с необходимыми и достаточными условиями оптимальности задачи (3), вычисленными в точке $u^*$. Итак, из условий Куна–Таккера и условий оптимальности задачи (3) следует, что в седловой точке $[w^*, u^*]$ вектор $w^*$ — решение задачи (5) и $u^*$ — решение задачи (3). Эти решения связаны соотношениями (36).

Из равенства целевых функций прямой (5) и двойственной (3) задач с учетом соотношений (36) получаем (37).

Доказательство соотношений (38)–(40) аналогично доказательству соотношений (14)–(16) в теореме 1.

При $\|w^*\| \neq 0$ из (37) следует, что $w_3^* > 0$. Рассмотрим (37) как квадратное уравнение относительно $w_3^*$

$${w_3^*}^2 - \rho w_3^* + \|w_1^*\|^2 + \|w_2^*\|^2 = 0. \tag{47}$$

Из того, что $\|r\| = \rho$ и вектор $w^*$ есть проекция $r$ на $W$, следует первое неравенство в (41). Вторая оценка в (41) следует из условия неотрицательности свободного члена квадратного уравнения $w_3^*(\rho - w_3^*) = \|w_1^*\|^2 + \|w_2^*\|^2 \geq 0$, а третья — из условия неотрицательности детерминанта квадратного уравнения (47). $\square$

**Теорема 4.** *Пусть* $u^{*\top} = [u_1^{*\top}, u_2^{*\top}]$ *— произвольное решение задачи* (3), $w^{*\top} = [w_1^{*\top}, w_2^{*\top}, w_3^*]$ *— решение задачи* (5), *определяемое по формулам* (36).

1. *Если* $\|w^*\| = 0$, *то* $I_2 = I_2^d = 0$, *система* (II) *разрешима, одним из ее решений является* $u^*$, *система* (I) *неразрешима.*
2. *Если* $\|w^*\| \neq 0$, *то* $w_3^* > 0$, $I_1 = I_1^d > 0$, *система* (II) *неразрешима*; *система* (I) *разрешима и вектор* $x_1^* = w_1^*/w_3^*$, $x_2^* = w_2^*/w_3^*$ *— ее решение с минимальной евклидовой нормой.*

**Доказательство.** 1. Если $w^* = 0_{n+1}$, то из (36) следует, что система (II) разрешима и одним из ее решений является вектор $u^*$. Согласно лемме система (I) не может быть разрешима.

2. Пусть $w^* \neq 0_{n+1}$. Тогда из (36) следует, что система (II) неразрешима и $I_2 = I_2^d > 0$. При этом из условия (37) получаем $w_3^* > 0$. Из условий (45), (46) следует, что $x_1^* = w_1^*/w_3^*$, $x_2^* = w_2^*/w_3^*$ является решением системы (I) и имеет минимальную евклидову норму, т. е. является решением задачи

$$\min_{x \in X} \|x\|^2. \tag{48}$$

Приведем функцию Лагранжа для этой задачи

$$L(x, \widetilde{u}) = \|x\|^2/2 + \widetilde{u}_1^\top (b_1 - A_{11} x_1 - A_{12} x_2) + \widetilde{u}_2^\top (b_2 - A_{21} x_1 - A_{22} x_2)$$

и условия Куна–Таккера, вычисленные в седловой точке $[x^*, \widetilde{u}^*]$, где $x^{*\top} = [x_1^{*\top}, x_2^{*\top}]$ — решение задачи (48), $\widetilde{u}^{*\top} = [\widetilde{u}_1^{*\top}, \widetilde{u}_2^{*\top}]$ — оптимальный вектор множителей Лагранжа в задаче (48),

$$x_1^* - A_{11}^\top \widetilde{u}_1^* - A_{21}^\top \widetilde{u}_2^* \geq 0_{n_1}, \quad D(x_1^*)(x_1^* - A_{11}^\top \widetilde{u}_1^* - A_{21}^\top \widetilde{u}_2^*) = 0_{n_1}, \quad x_1^* \geq 0_{n_1},$$
$$x_2^* - A_{12}^\top \widetilde{u}_1^* - A_{22} \widetilde{u}_2^* = 0_{n_2},$$
$$b_1 - A_{11} x_1^* - A_{12} x_2^* \leq 0_{m_1}, \quad D(\widetilde{u}_1^*)(b_1 - A_{11} x_1^* - A_{12} x_2^*) = 0_{m_1}, \quad \widetilde{u}_1^* \geq 0_{m_1},$$
$$b_2 - A_{21} x_1^* - A_{22} x_2^* = 0_{m_2}.$$

Эти условия Куна–Таккера для задачи (48) получаются из (42), (43), (45), (46), если положить $x_1^* = w_1^*/w_3^*$, $x_2^* = w_2^*/w_3^*$, $\widetilde{u}_1^* = u_1^*/w_3^*$, $\widetilde{u}_2^* = u_2^*/w_3^*$. $\square$

Возможны различные варианты представления альтернативной системы (II). Как следует из приведенных теорем, система, альтернативная к (I), получается из сопряженной системы (I$'$) путем добавления условия, исключающего возможность тривиального решения. Например, можно потребовать для решений сопряженной системы (I$'$) выполнения условия $b^\top u > 0$ (как в лемме Фаркаша [6]) либо условия $b^\top u = 1$ (как в теореме Гейла [5]), либо наложить нелинейное условие $\|u\|^2 = \rho$, где $\rho > 0$ — произвольная фиксированная величина, и т. д.

Приведем геометрическую интерпретацию полученных результатов. Пусть $b^\perp$ обозначает проекцию вектора $b$ на множество $Z$. Тогда ортогональный к нему вектор будет $b^\| = b - b^\perp$, соотношения (15) запишутся в виде

$$z^* = b^\perp = \mathrm{pr}(b, Z), \quad \|b^\perp\| = \mathrm{pen}(x^*, X), \quad \|b^\|\| = \mathrm{dist}(x^*, X).$$

В этих обозначениях соотношения (13) и (16) становятся очевидными: $\|b^\perp\|^2 = \|b^\perp\|^2$, $\|b^\perp\|^2 + \|b^\|\|^2 = \|b\|^2$. Аналогично в теореме 3 имеем

$$w^* = r^\perp = \mathrm{pr}(r, W), \quad \|r^\perp\| = \mathrm{pen}(u^*, U), \quad r^\| = r - r^\perp, \quad \|r^\|\| = \mathrm{dist}(r, W).$$

Очевидно, векторы $r^\perp$ и $r^\|$ лежат внутри шара радиуса $\rho$ с центром в начале координат.

## 3. Приложение к линейному программированию

Применим приведенные выше результаты к задачам линейного программирования (ЛП). Пусть прямая задача ЛП задана в каноническом виде

$$\min_{x \in X} c^\top x, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, \ x \geq 0_n\}. \tag{P}$$

Здесь и ниже $A$ — $m \times n$-матрица ранга $m$, $m < n$, дефект матрицы $A$, равный $n - m$, обозначим через $\nu$, векторы $c, x \in R^n$, $b \in R^m$.

Ниже вместо традиционных необходимых и достаточных условий оптимальности для задач ЛП воспользуемся условиями из [12]. Для этого введем матрицу $K$ размера $\nu \times n$. В качестве $K$ можно использовать любую матрицу, $\nu$ строк которой образуют базис нуль-пространства матрицы $A$. Таким образом, $\mathrm{im}\, K^\top$ является ортогональным дополнением к пространству $\mathrm{im}\, A^\top$. Поэтому

$$\mathrm{im}\, K^\top = \ker A, \quad AK^\top = 0_{m\nu}, \quad R^n = \mathrm{im}\, A^\top \oplus \mathrm{im}\, K^\top. \tag{49}$$

Здесь через $0_{ij}$ обозначена $i \times j$-матрица с нулевыми элементами.

Если матрицу $A$ представить в блочном виде $A = [B \mid N]$, где $B$ невырождена, то матрицу $K$ можно записать в виде $K = [-N^\top (B^{-1})^\top \mid I_\nu]$. Если с помощью преобразований Гаусса–Жордана матрицу $A$ привести к виду $A = [I_m \mid N]$, тогда матрица $K$ представима в виде $K = [-N^\top \mid I_\nu]$. В ряде случаев построение матрицы $K$ упрощается. Например, пусть задача ЛП имеет ограничения типа неравенств $Nz \geq b$, где $N$ — $m \times \nu$-матрица, $z \in R^\nu_+$. Вводя дополнительные переменные $\xi \in R^m_+$, вектор $x \in R^n$ представим как объединение векторов $z$, $\xi$, т. е. $x^\top = [z^\top, \xi^\top]$. Поэтому допустимое множество запишется в том же виде, что и в задаче (P), где матрица $A = [N \mid -I_m]$. Тогда $K = [I_\nu \mid N^\top]$.

Определим вектор $d = Kc \in R^\nu$ и вектор невязок

$$v = c - A^\top u. \tag{50}$$

Введем два аффинных множества

$$\overline{X} = \{x \in R^n : Ax = b\}, \quad \overline{V} = \{v \in R^n : Kv = d\}.$$

Всюду ниже через $\overline{x}$ и $\overline{v}$ будем обозначать произвольные фиксированные $n$-мерные векторы, удовлетворяющие соответственно условиям $\overline{x} \in \overline{X}$, $\overline{v} \in \overline{V}$. Заметим, что некоторые компоненты векторов $\overline{x}$, $\overline{v}$ могут быть отрицательными. В простейшем варианте можно взять $\overline{v} = c$. В силу того, что матрица $A$ имеет ранг $m$ и $n > m$, всегда $\overline{X} \neq \emptyset$ и $\overline{V} \neq \emptyset$. Для нахождения вектора $\overline{v} \in \overline{V}$ достаточно взять произвольный вектор $\overline{u} \in R^m$ и положить $\overline{v} = c - A^\top \overline{v}$. Принимая во внимание (49) и (50), приходим к выводу, что $\overline{v} \in \overline{V}$.

Следуя [12], необходимые и достаточные условия минимума в задаче (P) запишем в виде системы линейных уравнений с неотрицательными переменными

$$\begin{bmatrix} A & 0_{mn} \\ 0_{\nu n} & K \\ \overline{v}^\top & \overline{x}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \\ \overline{x}^\top \overline{v} \end{bmatrix}, \quad x \geq 0_n, \quad v \geq 0_n. \tag{51}$$

Если задача ЛП (P) имеет решение, то система (51) совместна и, решив ее, находим решение прямой задачи (P) и сопряженной задачи ЛП

$$\min_{v \in V} \overline{x}^\top v, \quad V = \{v \in R^n : Kv = d,\ v \geq 0_n\}. \tag{C}$$

Система (51) состоит из $n+1$ условий равенств, $2n$ неравенств и содержит $2n$ переменных. Из-за высокой размерности ее непосредственное решение может оказаться затруднительным. Поэтому перейдем к альтернативной системе, которая имеет меньше переменных, чем система (51), и состоит из $2n$ линейных неравенств и одного равенства с $n+1$ переменными

$$\begin{bmatrix} A^\top & 0_{n\nu} & \overline{v} \\ 0_{nm} & K^\top & \overline{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ \alpha \end{bmatrix} \leq 0_{2n}, \quad b^\top p + d^\top q + \overline{x}^\top \overline{v} \alpha = \rho. \tag{52}$$

Здесь $\rho > 0$ — произвольная фиксированная константа, $p \in R^m$, $q \in R^\nu$, $\alpha \in R^1$.

Так как система (51) совместна, то альтернативная система (52) несовместна. Это позволяет на основании теорем 3, 4 из безусловной минимизации невязок системы (52) получить нормальные решения задач (P) и (C). Задача (3) в данном случае записывается в виде

$$\min_{p \in R^m} \min_{q \in R^\nu} \min_{\alpha \in R^1} [\|(A^\top p + \overline{v}\alpha)_+\|^2 + \|(K^\top q + \overline{x}\alpha)_+\|^2 + (\rho - b^\top p - d^\top q - \overline{x}^\top \overline{v}\alpha)^2]/2. \tag{53}$$

В результате решения этой задачи находятся оптимальные векторы $p^*$, $q^*$, $\alpha^*$, по которым вычисляются невязки несовместной системы

$$w_x^* = (A^\top p^* + \overline{v}\alpha^*)_+, \quad w_v^* = (K^\top q^* + \overline{x}\alpha^*)_+, \quad w_3^* = \rho - b^\top p^* - d^\top q^* - \overline{x}^\top \overline{v}\alpha^*.$$

С помощью этих формул в соответствии с теоремой 4 определяются нормальные решения системы (51)

$$\widetilde{x}^* = w_x^*/w_3^*, \quad \widetilde{v}^* = w_v^*/w_3^*, \tag{54}$$

где $w_3^* > 0$ в силу (37), т. е. получены нормальные решения задач (P) и (C).

Решение задачи ЛП, таким образом, свелось к однократной безусловной минимизации выпуклой дифференцируемой кусочно-квадратичной функции от $n+1$ переменной.

Ранее (см. формулы (29) в [12]) были введены необходимые и достаточные условия оптимальности задачи ЛП, которые в обозначениях этой статьи записываются в виде системы

$$A^\top p - \overline{v} \leq 0_n, \quad K^\top q - \overline{x} \leq 0_n, \quad d^\top q + b^\top p = \overline{x}^\top \overline{v}. \tag{55}$$

Найдя произвольное решение этой системы, по формулам

$$x = \overline{x} - K^\top q, \quad v = \overline{v} - A^\top p$$

получаем решение задач (P) и (C).

Очевидно, если положить $\alpha = -1$, $\rho = 0$, то (52) переходит в систему (55). Принципиальное отличие (52) от (55) состоит в том, что система (55) совместна, а система (52) не совместна. При минимизации невязки в системе (52) приходится проводить безусловную минимизацию по переменным, число которых на единицу больше, чем при минимизации невязки в (55). Зато в результате минимизации невязки несовместной системы (52) получаются единственные, нормальные решения задач (P) и (C), в то время как из минимизации невязки системы (55) получаются какие-либо из возможных решений (P) и (C).

В [12] для отыскания нормальных решений задач (P) и (C) предлагалось использовать решение задачи

$$\min_{p\in R^m} \min_{q\in R^\nu} \min_{\alpha\in R^1}[\|(A^\top p - \overline{v}\alpha)_+\|^2 + \|(K^\top q - \overline{x}\alpha)_+\|^2 - b^\top p - d^\top q + \overline{x}^\top \overline{v}\alpha]. \tag{56}$$

Пусть $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, $\widehat{\alpha}$ — решения этой задачи. Из необходимых и достаточных условий оптимальности задачи (56) следуют формулы для нормального решения системы (51)

$$\widetilde{x}^* = (A^\top \widehat{p} - \overline{v}\widehat{\alpha})_+, \quad \widetilde{v}^* = (K^\top \widehat{q} - \overline{x}\widehat{\alpha})_+.$$

Сравнивая эти выражения с (54), приходим к формулам $\widehat{p} = p^*/w_3^*$, $\widehat{q} = q^*/w_3^*$, $\widehat{\alpha} = -\alpha^*/w_3^*$.

Таким образом, оба подхода весьма близки. В варианте (53) дополнительно появляется произвольный положительный параметр $\rho$, несущественно изменяющий метод.

## Литература


1. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука, 1983. – 335 с.
2. Еремин И.И. *Противоречивые модели оптимального планирования.* – М.: Наука, 1988. – 160 с.
3. Еремин И.И. *Теория линейной оптимизации.* – Екатеринбург: Изд-во "Екатеринбург", 1999. – 247 с.
4. Еремин И.И. *Двойственность в линейной оптимизации.* – Екатеринбург: УрО РАН, 2001. – 179 с.
5. Гейл Д. *Теория линейных экономических моделей.* – М.: Ин. лит., 1963. – 418 с.
6. Mangasarian O.L. *Nonlinear programming.* – Philadelphia: SIAM, 1994. – 220 p.
7. Разумихин Б.С. *Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике.* – М.: Наука, 1975. – 304 с.
8. Dax A. *The relationship between theorems of the alternative, least norm problems, steepest descent directions and degeneracy: a review* // Annals of Operations Research. – 1993. – V. 46. – № 1. – P. 11–60.
9. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. *Линейное программирование.* – М.: Факториал, 1998. – 176 с.
10. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования.* – М.: Мир, 1991. – 360 с.
11. Еремин И.И. *О квадратичных и полноквадратичных задачах выпуклого программирования* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 12. – С. 22–28.
12. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. *Отыскание нормальных решений в задачах линейного программирования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40. – № 12. – С. 1766–1786.



*Вычислительный центр*
*Российской Академии наук*



*Поступила*
29.06.2001