ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 2 (477)

УДК 517.929

Г.Г. ИСЛАМОВ

О ДОПУСТИМЫХ ПОМЕХАХ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Пусть управляемый процесс $x : [0,T] \to R^n$ описывается линейным уравнением

$$\dot{x}(t) + A(t)x(t) = \int_0^t K(t,s)\dot{x}(s)\,ds + B(t)u(t) + \nu(t), \quad t \in [0,T]. \tag{1}$$

Предполагается, что $n \times n$-матрица $A(t)$, $n \times k$-матрица $B(t)$ и n-мерный вектор-столбец $\nu(t)$ ("помеха") имеют квадратично суммируемые на $[0,T]$ вещественные компоненты, ядро $K(t,s)$ — $n \times n$-матричная функция с квадратично суммируемыми на $0 \le s \le t \le T$ вещественными элементами, k-мерный вектор-столбец $u(t)$ ("допустимое управление") имеет измеримые на $[0,T]$ вещественные компоненты, причем при почти всех $t \in [0,T]$ значения $u(t)$ принадлежат компакту Ω координатного пространства R^k.

Под решением системы (1) понимается n-мерный вектор-столбец $x(t)$ с производной $\dot{x}(t)$, имеющей квадратично суммируемые на $[0,T]$ компоненты.

Помеха $\nu(t)$ называется допустимой, если найдется такое допустимое управление $u(t) = u_\nu(t)$, при котором у системы (1) существует решение $x(t)$, удовлетворяющее векторному неравенству

$$\int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)\,ds + \Psi x(0) \ge \beta. \tag{2}$$

Здесь $\Phi(s)$ — $m \times n$-матрица с квадратично суммируемыми на $[0,T]$ элементами, Ψ — постоянная $m \times n$-матрица, β — m-мерный вектор-столбец. Сравнение векторов в (2) покомпонентное.

Будем говорить, что управление $u_\nu(t)$ компенсирует помеху $\nu(t)$.

Критерий разрешимости уравнения (1) с ограничением (2) при отсутствии управления ($u(t) \equiv 0$) анонсирован в [1] и доказан для точечных неравенств специального вида в [2]. Подходы к исследованию разрешимости задач с ограничениями типа неравенств для различных классов функционально-дифференциальных уравнений см. в [3]–[6].

Описание множества всех помех $\nu(t)$ системы (1), компенсируемых заданным допустимым управлением $u(t)$, дает

Теорема 1. *Пусть $Z(s)$ есть единственное $m \times n$-матричное решение с квадратично суммируемыми на $[0,T]$ элементами уравнения Вольтерра*

$$Z(s) = \int_s^T Z(\tau)[K(\tau,s) - A(\tau)]\,d\tau + \Phi(s), \quad s \in [0,T]. \tag{3}$$

Для того чтобы система (1) имела решение $x(t)$, удовлетворяющее (2), необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$\lambda(\beta - \int_0^T Z(s)\{B(s)u(s) + \nu(s)\}\,ds) \le 0 \tag{4}$$

для каждой m-мерной вектор-строки λ с неотрицательными компонентами, являющейся решением однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\lambda(\Psi - \int_0^T Z(s)A(s)\,ds) = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $f(t) = B(t)u(t) + \nu(t)$. Подстановка $x(t) = q + \int\limits_0^t y(s)\,ds$, $y(t) = \dot{x}(t)$ в систему (1) приводит к интегральному уравнению Вольтерра

$$y(t) = \int_0^t [K(t,s) - A(t)]y(s)\,ds + f(t) - A(t)q, \quad t \in [0,T].$$

Единственное квадратично суммируемое решение этого уравнения можно выразить через резольвенту $R(t,\tau)$ ядра $K(t,\tau) - A(t)$ в виде

$$y(t) = \int_0^t R(t,\tau)[f(\tau) - A(\tau)q]\,d\tau + f(t) - A(t)q, \quad t \in [0,T].$$

Замена $\dot{x}(s) = y(s),\ x(0) = q$ в неравенстве (2) дает

$$\int_0^T \Phi(s)\Big(\int_0^s R(s,\tau)[f(\tau) - A(\tau)q]\,d\tau + f(s) - A(s)q\Big)\,ds + \Psi q \geq \beta.$$

После элементарных преобразований левой части этого неравенства найдем, что постоянный n-мерный вектор-столбец q следует выбирать из условия справедливости векторного неравенства

$$\Big[\Psi - \int_0^T Z(s)A(s)\,ds\Big]q \geq \beta - \int_0^T Z(s)f(s)\,ds, \tag{6}$$

где $Z(s) = \int\limits_s^T \Phi(\tau)R(\tau,s)\,d\tau + \Phi(s)$, $s \in [0,T]$. Из последнего представления видим, что $Z(s)$ совпадает с единственным решением интегрального уравнения (3), т. к. $R(\tau,s)$ есть резольвента ядра $K(\tau,s) - A(\tau)$.

В силу обобщения теоремы Фредгольма (напр., [7], с. 266) векторное неравенство (6) относительно $q \in R^n$ имеет решение в том и только том случае, когда скалярное неравенство

$$\lambda(\beta - \int_0^T Z(s)f(s)\,ds) \leq 0 \tag{7}$$

имеет место для всякой m-мерной вектор-строки λ с неотрицательными компонентами, являющейся решением однородной системы линейных алгебраических уравнений (5). Учитывая, что $f(s) = B(s)u(s) + \nu(s)$, видим, что (7) совпадает с (4). $\square$

Замечание 1. В действительности неравенство (4) достаточно проверить на конечном числе образующих $\lambda^1, \ldots, \lambda^l$ конуса неотрицательных решений системы (5). Для отыскания этих образующих можно применить вычислительную схему Н.В. Черниковой ([8], с. 255) либо воспользоваться модификацией симплекс-метода.

Следующее утверждение показывает, что допустимые помехи можно компенсировать управлениями, удовлетворяющими некоторому принципу максимума. Из этого принципа видно, что при формировании компенсирующего управления $u_\nu(t)$ для заданной допустимой помехи $\nu(t)$ можно ограничиться лишь крайними точками компакта Ω.

Теорема 2. *Пусть $\nu(t)$ есть допустимая помеха для задачи управления (1)–(2). Тогда для некоторого неотрицательного решения $\alpha = \lambda_\nu$ системы (5) найдется допустимое управление $u^*(t)$, удовлетворяющее при почти всех $s \in [0,T]$ принципу максимума*

$$\alpha Z(s)B(s)u^*(s) = \max_{u\in\Omega} \alpha Z(s)B(s)u \tag{8}$$

и компенсирующее помеху $\nu(t)$.

Доказательство. Пусть $\lambda^1,\dots,\lambda^l$ — образующие конуса неотрицательных решений системы (5). В силу теоремы 1 компенсирующее помеху $\nu(t)$ допустимое управление $u(t)=u_\nu(t)$ удовлетворяет системе неравенств

$$\lambda^i(\beta-\int_0^T Z(s)[B(s)u(s)+\nu(s)]\,ds)\le 0,\quad i=\overline{1,l}. \tag{9}$$

Рассмотрим конечномерные множества

$$V=\{g\in R^m:\lambda^i g\le 0,\ i=\overline{1,l}\},$$
$$W_\nu=\Big\{g\in R^m: g=\beta-\int_0^T Z(s)\nu(s)\,ds-\int_0^T Z(s)B(s)u(s)\,ds\Big\},$$

где u пробегает все измеримые управления с $u(s)\in\Omega$ при почти всех $s\in[0,T]$.

Пересечение $V\cap W_\nu$ не пусто, т. к. $\nu(s)$ — допустимая помеха. Кроме того, V и W_ν выпуклы и замкнуты, причем V — конус с непустой внутренностью $\operatorname{int}V$, а W_ν — компакт. Для первого множества это очевидно, а для установления свойств второго достаточно воспользоваться (напр., [9], с. 351) теоремой А.А. Ляпунова, из которой следует выпуклость, замкнутость и ограниченность в R^m множества значений интеграла $\int\limits_0^T Z(s)B(s)u(s)\,ds$, когда u пробегает множество всех измеримых вектор-функций с $u(s)\in\Omega$ при почти всех $s\in[0,T]$, Ω — заданный компакт в R^k.

Пусть направление $\alpha\ne 0$ является неотрицательной линейной комбинацией образующих $\lambda^1,\dots,\lambda^l$ конуса неотрицательных решений системы (5). Найдется граничная точка g^* компакта $V\cap W_\nu$ такая, что $\alpha g^*\le\alpha g$ при всех $g\in V\cap W_\nu$. Допустим, что $h\in\operatorname{int}V$ и $g^*+h\in V\cap W_\nu$. Тогда $\alpha(g^*+h)\ge\alpha g^*$ и, значит, $\alpha h\ge 0$. Однако для $h\in\operatorname{int}V$ имеем $\lambda^i h<0$, $i=\overline{1,l}$, и, следовательно, $\alpha h<0$. Возникшее противоречие показывает, что $(g^*+\operatorname{int}V)\cap V\cap W_\nu=\emptyset$. Так как $g^*\in V$, то $(g^*+\operatorname{int}V)\cap V=(g^*+\operatorname{int}V)$. Следовательно, $(g^*+\operatorname{int}V)\cap W_\nu=\emptyset$. Согласно первой теореме отделимости ([9], с. 124) открытое множество $g^*+\operatorname{int}V$ и выпуклый компакт W_ν можно разделить гиперплоскостью $\lambda_\nu g=\lambda_\nu g^*$.

Будем считать, что при всех $g\in W_\nu$

$$\lambda_\nu g^*\le\lambda_\nu g. \tag{10}$$

Тогда $\lambda_\nu(g-g^*)\le 0$ для всех $g\in(g^*+\operatorname{int}V)$ и, значит, $\lambda_\nu h\le 0$ при всех $h\in V$. По теореме Фаркаша ([7], с. 247) λ_ν есть неотрицательная линейная комбинация образующих $\lambda^1,\dots,\lambda^l$ конуса неотрицательных решений системы (5), т. е. λ_ν есть неотрицательное решение системы (5).

Элементу $g^*\in W_\nu$ соответствует допустимое управление $u^*(t)$ такое, что

$$g^*=\beta-\int_0^T Z(s)\nu(s)ds-\int_0^T Z(s)B(s)u^*(s)\,ds.$$

Для этого управления имеем $\lambda^i g^*\le 0$, $i=\overline{1,l}$, т. е. выполнено (9) при $u(s)=u^*(s)$ и, значит, неравенство (4). Утверждается, что $u^*(s)$ удовлетворяет принципу максимума (8) при $\alpha=\lambda_\nu$. В противном случае согласно ([10], с. 175) выберем допустимое управление $\widetilde{u}(s)$, удовлетворяющее принципу максимума

$$\lambda_\nu Z(s)B(s)\widetilde{u}(s)=\max_{u\in\Omega}\lambda_\nu Z(s)B(s)u,\quad s\in[0,T].$$

Тогда на множестве положительной меры имеем

$$\lambda_\nu Z(s)B(s)u^*(s)<\lambda_\nu Z(s)B(s)\widetilde{u}(s).$$

Отсюда для элемента $\widetilde{g}=\beta-\int\limits_0^T Z(s)\nu(s)ds-\int\limits_0^T Z(s)B(s)\widetilde{u}(s)\,ds$ из W_ν получим $\lambda_\nu\widetilde{g}<\lambda_\nu g^*$, что противоречит (10). $\square$

Из доказанных выше теорем 1 и 2 вытекает следующий критерий допустимости помехи $\nu(t)$ для задачи управления (1)–(2).

Следствие. Для того чтобы помеха $\nu(t)$ была допустимой для задачи управления (1)–(2), необходимо и достаточно, чтобы для некоторого неотрицательного решения $\alpha = \lambda_\nu$ системы (5) нашлось управление $u^*(s)$, удовлетворяющее при почти всех $s \in [0, T]$ принципу максимума (8) и при $u(s) = u^*(s)$ неравенству (4) для каждого неотрицательного решения λ системы (5).

Замечание 2. Пусть существует предел $\Phi(+0)$ и $K(\tau, +0) = 0$ при почти всех $\tau \in [0, T]$. Тогда из (3) находим, что на множестве полной меры существует предел $Z(+0)$, равный $\Phi(+0) - \int\limits_0^T Z(\tau)A(\tau)\,d\tau$, и, значит, система алгебраических уравнений (5) запишется в виде

$$\lambda(\Psi - \Phi(+0) + Z(+0)) = 0.$$

Замечание 3. Если $\Phi(s) \equiv \Phi$ — постоянная $m \times n$-матрица, то $m \times n$-матричное решение уравнения (3) представимо в виде $Z(s) = \Phi Y(s)$, где $Y(s)$ — единственное $n \times n$-матричное решение уравнения

$$Y(s) = \int_s^T Y(\tau)[K(\tau, s) - A(\tau)]\,d\tau + E_n$$

с единичной матрицей E_n порядка n.

Замечание 4. Из представления $x(T) = \int\limits_0^T \dot{x}(s)\,ds + x(0)$ для абсолютно непрерывной вектор-функции видно, что, взяв в неравенстве (2) $\Phi(s) \equiv P$ и $\Psi = P + Q$, где P, Q — постоянные $m \times n$-матрицы, получим векторное краевое неравенство $Px(T) + Qx(0) \geq \beta$.

Литература

1. Исламов Г.Г. *О разрешимости интегро-дифференциальных уравнений с краевыми неравенствами* // Тез. докл. VII Четаевской конф. Аналитическая механика. Устойчивость и управление движением. – Казань, 1997. – С. 142.
2. Исламов Г.Г. *О достижимости полиэдров пространства состояний в заданные моменты времени* // Вестн. Удмуртск. ун-та. – Ижевск, 1999. – Вып. 8. – С. 32–38.
3. Исламов Г.Г. *Критерий разрешимости уравнений с краевыми неравенствами* // Изв. отд. матем. и информатики УдГУ. – Ижевск, 1994. – Вып. 2. – С. 3–24.
4. Исламов Г.Г. *О полиэдральной разрешимости системы линейных дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 3. – С. 31–37.
5. Исламов Г.Г. *О разрешимости уравнений с краевыми неравенствами* // Краев. задачи. – Пермь, 1981. – С. 88–90.
6. Максимов В.П., Румянцев А.Н. *Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 56–71.
7. Беклемишев Д.В. *Дополнительные главы линейной алгебры.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
8. Черников С.Н. *Линейные неравенства.* – М.: Наука, 1968. – 488 с.
9. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
10. Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления.* – М.: Наука, 1972. – 476 с.

Удмуртский государственный университет

Поступила 03.03.2000