УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2017, Т. 159, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 5–12 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.586

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ШАРОВЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

А.А. Аганин, А.И. Давлетшин

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань, 420111, Россия

Аннотация

При изучении физических явлений в пространственных областях, ограниченных сферическими или близкими к ним поверхностями широко применяются шаровые и сферические функции. При этом часто возникает задача преобразования этих функций при параллельном переносе системы координат. Такая ситуация возникает, в частности, при описании гидродинамического взаимодействия сферических или слабонесферических пузырьков газа в неограниченном объеме несжимаемой жидкости. В двумерном (осесимметричном) случае, когда роль сферических функций играют полиномы Лежандра, для осуществления такого преобразования можно воспользоваться хорошо известным компактным выражением. Аналогичные известные выражения в трехмерном случае являются довольно сложными (в них, например, используются коэффициенты Клебша – Гордана), что затрудняет их применение. В настоящей работе приводится вывод такого выражения, который естественным образом приводит к компактной форме входящих в него коэффициентов. Данные коэффициенты являются, по сути, обобщением на трехмерный случай аналогичных известных коэффициентов в двумерном (осесимметричном) случае.

Ключевые слова: шаровые функции, параллельный перенос

Введение

Теория шаровых и сферических функций является весьма мощным аппаратом для решения многих задач гидродинамики [1], квантовой механики [2], небесной механики и астродинамики [3], геофизики и геодезии [4] и т. д. Она, как правило, применяется при изучении физических явлений в пространственных областях, ограниченных сферическими или близкими к ним поверхностями. Например, метод сферических функций широко используется при моделировании гидродинамического взаимодействия сферических и слабонесферических газовых пузырьков в идеальной несжимаемой жидкости, когда потенциал скорости жидкости представляется в виде ряда по сферическим функциям [5–12]. В процессе определения коэффициентов ряда возникает задача преобразования нерегулярных шаровых функций $Y_n^m(\theta,\varphi)\, r^{-n-1}$ при переходе от системы координат с началом в центре одного пузырька к системе координат с началом в центре другого. Здесь $Y_n^m(\theta,\varphi)$, $n = 0, 1, \ldots,$ $m = -n, -n+1, \ldots, n$, – сферические функции степени n порядка m, (r,θ,φ) – сферическая система координат.

В осесимметричном случае $m = 0$, так что роль сферических функций играют полиномы Лежандра, $Y_n^0(\theta,\varphi) = P_n(\cos\theta)$. В этом случае для осуществления указанного преобразования можно воспользоваться хорошо известным в литературе выражением [13]

$$\frac{P_n(\cos\theta_k)}{r_k^{n+1}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_{n\lambda}\, \frac{s_{kj}^{n+\lambda}}{r_{kj}^{n+\lambda+1}}\, r_j^{\lambda} P_\lambda(\cos\theta_j), \tag{1}$$

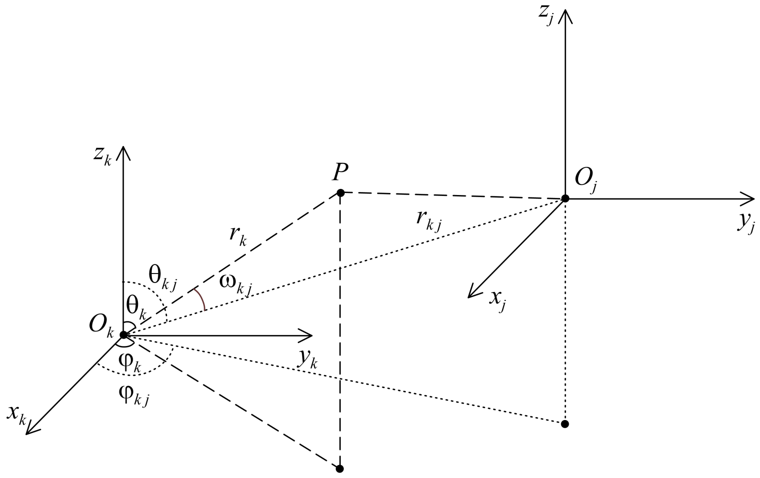

Рис. 1. Принятые обозначения

где

$$C_{n\lambda} = \frac{(-1)^n (n+\lambda)!}{n!\lambda!},$$

$(r_k, \theta_k, \varphi_k)$ – система координат k-го пузырька, $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ – система координат j-го пузырька, r_{kj} – радиальная координата центра k-го пузырька в системе координат j-го пузырька, $s_{kj} = 1$, если k-й пузырек находится на оси симметрии задачи выше j-го, иначе $s_{kj} = -1$.

В настоящей работе излагается способ вывода выражения преобразования нерегулярных шаровых функций в общем пространственном случае. При использовании данного способа входящие в выражение коэффициенты принимают более компактную форму, чем, например, в [11, 14], что может быть полезно при их применении. Полученное выражение является, по сути, обобщением выражения (1).

1. Преобразование сферических функций

Рассмотрим две сферические системы координат $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$, $(r_j, \theta_j, \varphi_j)$ с началом отсчета в точках O_k и O_j соответственно и связанные с ними декартовы системы (x_k, y_k, z_k), (x_j, y_j, z_j), одноимённые оси которых параллельны и одинаково направлены (рис. 1).

Требуется получить выражение преобразования нерегулярных шаровых функций $Y_n^m(\theta,\varphi) r^{-n-1}$ при переходе от k-й системы координат к j-й в виде, аналогичном (1).

В системе координат с началом O_k имеем $Y_n^m(\theta_k,\varphi_k) r_k^{-n-1}$, где $Y_n^m(\theta_k,\varphi_k) = P_n^{|m|}(\cos\theta_k)\, e^{im\varphi_k}$, $P_n^{|m|}$ – присоединённый полином Лежандра степени n порядка $|m|$, i – мнимая единица. Согласно [13] справедливо следующее равенство

$$\frac{\partial^{n-l}}{\partial z_k^{n-l}} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \pm i \frac{\partial}{\partial y_k} \right)^l \frac{1}{r_k} = \frac{(-1)^{n-l} (n-l)!}{r_k^{n+1}} (\cos l\varphi_k \pm i \sin l\varphi_k)\, P_n^l(\cos\theta_k),$$

где $l = 0, 1, \ldots, n$. Используя данное равенство, можно получить

$$\frac{\partial^{n-l}}{\partial z_k^{n-l}} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right)^l \frac{1}{r_k} = \frac{(-1)^{n-l} (n-l)!}{r_k^{n+1}} Y_{nk}^l,$$

$$\frac{\partial^{n-l}}{\partial z_k^{n-l}}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)^l\frac{1}{r_k}=\frac{(-1)^{n-l}\,(n-l)!}{r_k^{n+1}}\,Y_{nk}^{-l},$$

или

$$\frac{Y_{nk}^m}{r_k^{n+1}}=\frac{(-1)^{n+m}}{(n-|m|)!}\frac{\partial^{n-|m|}}{\partial z_k^{n-|m|}}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}+\operatorname{sgn}(m)\,i\,\frac{\partial}{\partial y_k}\right)^{|m|}\frac{1}{r_k},\tag{2}$$

где $Y_{nk}^m=Y_n^m\left(\theta_k,\varphi_k\right)$, sgn – функция знака.

Пусть

$$\xi_{pk}=x_k-\operatorname{sgn}(p)iy_k.$$

Тогда

$$\xi_{|p|k}=x_k-iy_k,\quad \xi_{-|p|k}=x_k+iy_k,$$

и

$$x_k=\frac{1}{2}\left(\xi_{|p|k}+\xi_{-|p|k}\right),\quad y_k=\frac{i}{2}\left(\xi_{|p|k}-\xi_{-|p|k}\right).$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial}{\partial\xi_{|p|k}}=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\xi_{|p|k}}+\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial\xi_{|p|k}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}+i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_{-|p|k}}=\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial\xi_{-|p|k}}+\frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial\xi_{-|p|k}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}-i\frac{\partial}{\partial y_k}\right),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\xi_{pk}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}+\operatorname{sgn}(p)i\frac{\partial}{\partial y_k}\right).$$

С учётом последнего выражения соотношение (2) запишется в виде

$$\frac{Y_{nk}^m}{r_k^{n+1}}=\frac{(-1)^{n+m}\,2^{|m|}}{(n-|m|)!}\,\frac{\partial^{n-|m|}}{\partial z_k^{n-|m|}}\,\frac{\partial^{|m|}}{\partial\xi_{mk}^{|m|}}\,\frac{1}{r_k}.\tag{3}$$

Для дальнейших преобразований потребуются следующие соотношения:

$$\frac{\partial^m}{\partial\xi_{pk}^m}\,\frac{1}{r_k}=(-1)^m\,\frac{\partial^m}{\partial\xi_{pjk}^m}\,\frac{1}{r_k},\tag{4}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial z_k^m}\,\frac{1}{r_k}=(-1)^m\,\frac{\partial^m}{\partial z_{jk}^m}\,\frac{1}{r_k},\tag{5}$$

$$\frac{\partial^m}{\partial\xi_{pk}^m}\,\frac{\partial^m}{\partial\xi_{-pk}^m}\,\frac{1}{r_k}=\frac{(-1)^m}{2^{2m}}\,\frac{\partial^{2m}}{\partial z_k^{2m}}\,\frac{1}{r_k}.\tag{6}$$

Справедливость этих соотношений можно установить, например, методом математической индукции, воспользовавшись очевидным равенством $r_k=\sqrt{\xi_{-pk}\xi_{pk}+z_k^2}$. Используя (4) и (5), из (6) имеем

$$\frac{\partial^m}{\partial\xi_{pjk}^m}\,\frac{\partial^m}{\partial\xi_{-pjk}^m}\,\frac{1}{r_k}=\frac{(-1)^m}{2^{2m}}\,\frac{\partial^{2m}}{\partial z_{jk}^{2m}}\,\frac{1}{r_k},\tag{7}$$

где $\xi_{pjk}=\xi_{pj}-\xi_{pk}$, $z_{jk}=z_j-z_k$.

Применяя равенства (4) и (5), преобразуем соотношение (3):

$$\frac{Y_{nk}^m}{r_k^{n+1}}=\frac{(-1)^m\,2^{|m|}}{(n-|m|)!}\,\frac{\partial^{n-|m|}}{\partial z_{jk}^{n-|m|}}\,\frac{\partial^{|m|}}{\partial\xi_{mjk}^{|m|}}\,\frac{1}{r_k}.\tag{8}$$

Из треугольника O_kO_jP (рис. 1), применяя теорему косинусов, а также воспользовавшись производящей функцией для полиномов Лежандра и теоремой их сложения [13], находим

$$\frac{1}{r_k} = \frac{1}{r_{kj}\sqrt{1-2\cos\omega_{jk}\left(r_j/r_{kj}\right)+\left(r_j/r_{kj}\right)^2}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{r_j^{\lambda}P_{\lambda}\left(\cos\omega_{jk}\right)}{r_{kj}^{\lambda+1}} =$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\frac{\left(\lambda-|\mu|\right)!}{\left(\lambda+|\mu|\right)!}\frac{r_j^{\lambda}}{r_{kj}^{\lambda+1}}Y_{\lambda j}^{-\mu}Y_{\lambda jk}^{\mu}. \quad (9)$$

где $Y_{nkj}^m = Y_n^m\left(\theta_{kj},\varphi_{kj}\right)$, r_{kj}, θ_{kj}, φ_{kj} – координаты точки O_j в k-й системе (рис. 1). С учётом (3) и (9) из (8) следует

$$\frac{Y_{nk}^m}{r_k^{n+1}} = \frac{(-1)^m\,2^{|m|}}{(n-|m|)!}\frac{\partial^{n-|m|}}{\partial z_{jk}^{n-|m|}}\frac{\partial^{|m|}}{\partial\xi_{mjk}^{|m|}}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\frac{\left(\lambda-|\mu|\right)!}{\left(\lambda+|\mu|\right)!}r_j^{\lambda}Y_{\lambda j}^{-\mu}\frac{Y_{\lambda jk}^{\mu}}{r_{kj}^{\lambda+1}} =$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}r_j^{\lambda}Y_{\lambda j}^{-\mu}\frac{(-1)^{m+\lambda+\mu}\,2^{|m|+|\mu|}}{(n-|m|)!\left(\lambda+|\mu|\right)!}\frac{\partial^{n+\lambda-|m|-|\mu|}}{\partial z_{jk}^{n+\lambda-|m|-|\mu|}}\frac{\partial^{|m|}}{\partial\xi_{mjk}^{|m|}}\frac{\partial^{|\mu|}}{\partial\xi_{\mu jk}^{|\mu|}}\frac{1}{r_k}. \quad (10)$$

Для всевозможных комбинаций индексов m и μ можно получить четыре выражения входящей в (10) производной.

1. Если $m\cdot\mu\geq 0$ и $m,\,\mu\geq 0$, то

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial\xi_{mjk}^{|m|}}\frac{\partial^{|\mu|}}{\partial\xi_{\mu jk}^{|\mu|}}\frac{1}{r_k} = \frac{\partial^{m}}{\partial\xi_{mjk}^{m}}\frac{\partial^{\mu}}{\partial\xi_{\mu jk}^{\mu}}\frac{1}{r_k} = \frac{\partial^{m+\mu}}{\partial\xi_{m+\mu jk}^{m+\mu}}\frac{1}{r_k};$$

2. Если $m\cdot\mu\geq 0$ и $m,\,\mu<0$, то

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial\xi_{mjk}^{|m|}}\frac{\partial^{|\mu|}}{\partial\xi_{\mu jk}^{|\mu|}}\frac{1}{r_k} = \frac{\partial^{-m}}{\partial\xi_{mjk}^{-m}}\frac{\partial^{-\mu}}{\partial\xi_{\mu jk}^{-\mu}}\frac{1}{r_k} = \frac{\partial^{-(m+\mu)}}{\partial\xi_{m+\mu jk}^{-(m+\mu)}}\frac{1}{r_k};$$

3. Если $m\cdot\mu<0$ и $m\geq 0$, $\mu<0$, то

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial\xi_{mjk}^{|m|}}\frac{\partial^{|\mu|}}{\partial\xi_{\mu jk}^{|\mu|}}\frac{1}{r_k} = \frac{\partial^{m}}{\partial\xi_{mjk}^{m}}\frac{\partial^{-\mu}}{\partial\xi_{\mu jk}^{-\mu}}\frac{1}{r_k} =$$
$$= \frac{\partial^{m+\mu}}{\partial\xi_{mjk}^{m+\mu}}\frac{\partial^{-\mu}}{\partial\xi_{mjk}^{-\mu}}\frac{\partial^{-\mu}}{\partial\xi_{\mu jk}^{-\mu}}\frac{1}{r_k} = \frac{(-1)^{-\mu}}{2^{-2\mu}}\frac{\partial^{-2\mu}}{\partial z_{jk}^{-2\mu}}\frac{\partial^{m+\mu}}{\partial\xi_{m+\mu jk}^{m+\mu}}\frac{1}{r_k};$$

4. Если $m\cdot\mu<0$ и $m<0$, $\mu\geq 0$, то

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial\xi_{mjk}^{|m|}}\frac{\partial^{|\mu|}}{\partial\xi_{\mu jk}^{|\mu|}}\frac{1}{r_k} = \frac{\partial^{-m}}{\partial\xi_{mjk}^{-m}}\frac{\partial^{\mu}}{\partial\xi_{\mu jk}^{\mu}}\frac{1}{r_k} =$$
$$= \frac{\partial^{m+\mu}}{\partial\xi_{\mu jk}^{m+\mu}}\frac{\partial^{-m}}{\partial\xi_{mjk}^{-m}}\frac{\partial^{-m}}{\partial\xi_{\mu jk}^{-m}}\frac{1}{r_k} = \frac{(-1)^{-m}}{2^{-2m}}\frac{\partial^{-2m}}{\partial z_{jk}^{-2m}}\frac{\partial^{m+\mu}}{\partial\xi_{m+\mu jk}^{m+\mu}}\frac{1}{r_k}.$$

Два последних выражения выведены с использованием соотношения (7). Все четыре выражения можно обобщить в виде соотношения

$$\frac{\partial^{|m|}}{\partial\xi_{mjk}^{|m|}}\frac{\partial^{|\mu|}}{\partial\xi_{\mu jk}^{|\mu|}}\frac{1}{r_k} = \frac{(-1)^{f(m,\mu)}}{2^{2f(m,\mu)}}\frac{\partial^{2f(m,\mu)}}{\partial z_{jk}^{2f(m,\mu)}}\frac{\partial^{|m+\mu|}}{\partial\xi_{m+\mu jk}^{|m+\mu|}}\frac{1}{r_k}, \quad (11)$$

где

$$f(m,\mu)=\begin{cases}0, & m\cdot\mu\geq 0\\ \min\left(|m|,|\mu|\right), & m\cdot\mu<0\end{cases}.$$

Нетрудно проверить, что

$$f(m,\mu)=(|m|+|\mu|-|m+\mu|)/2. \tag{12}$$

Подставляя (11) в (10) и воспользовавшись соотношением (3), получим

$$\frac{Y_{nk}^{m}}{r_k^{n+1}}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} r_j^{\lambda}Y_{\lambda j}^{-\mu}\,\frac{(-1)^{m+\lambda+\mu+f(m,\mu)}\,2^{|m+\mu|}}{(n-|m|)!\,\big(\lambda+|\mu|\big)!}\,\frac{\partial^{n+\lambda-|m+\mu|}}{\partial z_{jk}^{n+\lambda-|m+\mu|}}\,\frac{\partial^{|m+\mu|}}{\partial\xi_{m+\mu jk}^{|m+\mu|}}\,\frac{1}{r_k}=$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} r_j^{\lambda}Y_{\lambda j}^{-\mu}\,\frac{(-1)^{m+\lambda+\mu+f(m,\mu)}\,2^{|m+\mu|}}{(n-|m|)!\,\big(\lambda+|\mu|\big)!}\,\frac{(-1)^{n+\lambda+m+\mu}\,(n+\lambda-|m+\mu|)!}{2^{|m+\mu|}}\,\frac{Y_{n+\lambda jk}^{m+\mu}}{r_{jk}^{n+\lambda+1}}$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\frac{(-1)^{n+f(m,\mu)}\,(n+\lambda-|m+\mu|)!}{(n-|m|)!\,\big(\lambda+|\mu|\big)!}\,\frac{Y_{n+\lambda jk}^{m+\mu}}{r_{jk}^{n+\lambda+1}}\,r_j^{\lambda}Y_{\lambda j}^{-\mu}=$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}\frac{(-1)^{n+f(m,-\mu)}\,(n+\lambda-|m-\mu|)!}{(n-|m|)!\,\big(\lambda+|\mu|\big)!}\,\frac{Y_{n+\lambda jk}^{m-\mu}}{r_{jk}^{n+\lambda+1}}\,r_j^{\lambda}Y_{\lambda j}^{\mu}.$$

Окончательно, принимая во внимание (12), находим

$$\frac{Y_n^m(\theta_k,\varphi_k)}{r_k^{n+1}}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}C_{n\lambda}^{m\mu}\,\frac{Y_{n+\lambda}^{m-\mu}(\theta_{jk},\varphi_{jk})}{r_{jk}^{n+\lambda+1}}\,r_j^{\lambda}Y_{\lambda}^{\mu}(\theta_j,\varphi_j), \tag{13}$$

где

$$C_{n\lambda}^{m\mu}=\frac{(-1)^{n+(|m|+|\mu|-|m-\mu|)/2}\,(n+\lambda-|m-\mu|)!}{(n-|m|)!\,\big(\lambda+|\mu|\big)!}.$$

Как видно, данное выражение преобразования нерегулярных шаровых функций в общем пространственном случае по форме аналогично выражению (1). В частном осесимметричном случае, когда оси z_k и z_j рассматриваемых систем координат (рис. 1) лежат на одной прямой, $m=\mu=0$ и $Y_n^0(\theta,\varphi)=P_n(\cos\theta)$. При этом, учитывая, что $C_{n\lambda}^{00}=C_{n\lambda}$ и $r_{jk}=r_{kj}$, из выражения (13) будем иметь

$$\frac{P_n(\cos\theta_k)}{r_k^{n+1}}=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda}C_{n\lambda}\,\frac{P_{n+\lambda}(\cos\theta_{jk})}{r_{kj}^{n+\lambda+1}}r_j^{\lambda}P_{\lambda}(\cos\theta_j).$$

Возможны два случая: $\theta_{jk}=0$ и $\theta_{jk}=\pi$. Первому соответствует $s_{kj}=1$, второму – $s_{kj}=-1$. В первом случае $P_{n+\lambda}(\cos\theta_{jk})=1$, во втором $P_{n+\lambda}(\cos\theta_{jk})=(-1)^{n+\lambda}$, то есть $P_{n+\lambda}(\cos\theta_{jk})=s_{kj}^{n+\lambda}$, так что выражение (13) сводится к (1).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 17-11-01135).

Литература

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.-Л.: ОГИЗ. Гостехтеориздат, 1947. – 928 с.

2. *Ферми Э.* Квантовая механика (конспект лекций). – М.: Мир, 1965. – 367 с.

3. *Дубошин Г.Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1976. – 864 с.

4. *Идельсон Н.И.* Теория потенциала и её приложения к вопросам геофизики. – М.: ГТТИ, 1932. – 350 с.

5. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности // Матем. моделирование. – 2009. – Т. 21, № 9. – С. 89–98.

6. *Аганин А.А., Гусева Т.С.* Эффект слабой сжимаемости жидкости при взаимодействии пузырьков в сильных акустических полях // Изв. РАН. МЖГ. – 2010. – № 3. – С. 3–16.

7. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Взаимодействие сферических пузырьков с центрами на одной прямой // Матем. моделирование. – 2013. – Т. 25, № 12. – С. 3–18.

8. *Аганин А.А., Давлетшин А.И., Топорков Д.Ю.* Динамика расположенных в линию кавитационных пузырьков в интенсивной акустической волне // Вычисл. технологии. – 2014. – Т. 19, № 1. – С. 3–19.

9. *Davletshin A.I., Khalitova T.F.* Equations of spatial .hydrodynamic interaction of weakly nonspherical gas bubbles in liquid in an acoustic field // J. Phys.: Conf. Series. – 2016. – V. 669. – Art. 012008, P. 1–4. – doi: 10.1088/1742-6596/669/1/012008.

10. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Уточненная модель. пространственного взаимодействия сферических газовых пузырьков // Изв. УНЦ РАН. – 2016. – № 4. – С. 9–13.

11. *Doinikov A.A.* Mathematical model for. collective bubble dynamics in strong ultrasound fields // J. Acoust. Soc. Amer. – 2004. – V. 116, No 2. – P. 821–827. – doi: 10.1121/1.1768255.

12. *Takahira H., Akamatsu T., Fujikawa S.* Dynamic.s of a cluster of bubbles in a liquid (theoretical analysis) // JSME Int. J. Ser. B. – 1994. – V. 37, No 2. – P. 297-305.

13. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 476 с.

14. *Steinborn E.O., Ruedenberg K.* Rotation and translation of regular and irregular solid spherical harmonics // Adv. Quantum Chem. – 1973. – V. 7. – P. 1–81. – doi: 10.1016/S0065-3276(08)60558-4.

Поступила в редакцию
27.01.17

Аганин Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *aganin@kfti.knc.ru*

Давлетшин Анас Ильгизович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: *anas.davletshin@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 1, pp. 5–12

Transformation of Irregular Solid Spherical Harmonics at Parallel Translation of the Coordinate System

*A.A. Aganin**, *A.I. Davletshin***

Institute of Mechanics and Engineering,
Kazan Science Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, 420111 Russia
E-mail: **aganin@kfti.knc.ru*, ***anas.davletshin@gmail.com*

Received January 27, 2017

Abstract

When studying physical phenomena in spatial regions bounded by spherical or slightly non-spherical surfaces, spherical functions and solid spherical harmonics are widely used. A problem of transformation of those functions and harmonics with translation of the coordinate system frequently arises. Such a situation occurs, in particular, when the hydrodynamic interaction of spherical or slightly non-spherical gas bubbles in an unbounded volume of incompressible fluid is described. In the two-dimensional (axisymmetric) case, when the role of spherical functions is played by the Legendre polynomials, such a transformation can be performed using a well-known compact expression. Similar known expressions in the three-dimensional case are rather complex (they, for example, include the Clebsch–Gordan coefficients), which makes their application more complicated. The present paper contains derivation of such an expression, naturally leading to a compact form of its coefficients. Those coefficients are, in fact, a generalization to the three-dimensional case of the analogous known coefficients in the two-dimensional (axisymmetric) case.

Keywords: solid spherical harmonics, parallel translation

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01135).

Figure Captions

Fig. 1. Agreed notations.

References

1. Lamb H. Hydrodynamics. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1916. 728 p.
2. Fermi E. Notes on Quantum Mechanics: A Course Given by Enrico Fermi at the University of Chicago. Chicago, Univ. of Chicago Press, 1961. 171 p.
3. Duboshin G.N. Handbook for Celestial Mechanics and Astrodynamics. Moscow, Nauka, 1976. 864 p. (In Russian)
4. Idelson N.I. Potential Theory and Its Application to Geophysical Problems. Moscow, GTTI, 1932. 350 p. (In Russian)
5. Aganin A.A., Davletshin A.I. Simulation of interaction of gas bubbles in a liquid with allowing for their small asphericity. *Mat. Model.*, 2009, vol. 21, no. 9, pp. 89–98. (In Russian)

6. Aganin A.A., Guseva T.S. Effect of weak compressibility of a fluid on bubble-bubble interaction in strong acoustic fields. *Fluid Dyn.*, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 343–354. doi: 10.1134/S0015462810030014.

7. Aganin A.A., Davletshin A.I. Interaction of spherical bubbles with centers located on the same line. *Mat. Model.*, 2013, vol. 25, no. 12, pp. 3–18. (In Russian)

8. Aganin A.A., Davletshin A.I., Toporkov D.Yu. Dynamics of a line of cavitation bubbles in an intense acoustic wave. *Vychisl. Tekhnol.*, 2014, vol. 19, no. 1, pp. 3–19. (In Russian)

9. Davletshin A.I., Khalitova T.F. Equations of spatial hydrodynamic interaction of weakly nonspherical gas bubbles in liquid in an acoustic field. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2016, vol. 669, artic. 012008, pp. 1–4. doi: 10.1088/1742-6596/669/1/012008.

10. Aganin A.A., Davletshin A.I. A refined model of spatial interaction of spherical gas bubbles. *Izv. Ufim. Nauchn. Tsentra Ross. Akad. Nauk*, 2016, no. 4, pp. 9–13. (In Russian)

11. Doinikov A.A. Mathematical model for. collective bubble dynamics in strong ultrasound fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2004, vol. 116, no. 2, pp. 821–827. doi: 10.1121/1.1768255.

12. Takahira H., Akamatsu T., Fujikawa S. Dynamic.s of a cluster of bubbles in a liquid (theoretical analysis). *JSME Int. J., Ser. B.*, 1994, vol. 37, no. 2, pp. 297–305.

13. Hobson E.W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1931. 500 p. (In Russian)

14. Steinborn E.O., Ruedenberg K. Rotation and translation of regular and irregular solid spherical harmonics. *Adv. Quantum Chem.*, 1973, vol. 7, pp. 1–81. doi: 10.1016/S0065-3276(08)60558-4.

***Для цитирования*:** *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Преобразование нерегулярных шаровых функций при параллельном переносе системы координат // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 1. – С. 5–12.

***For citation*:** Aganin A.A., Davletshin A.I. Transformation of irregular solid spherical harmonics at parallel translation of the coordinate system. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 1, pp. 5–12. (In Russian)