ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 517.952

Т.Г. СУКАЧЕВА

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА НЕНУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Система уравнений

$$\begin{aligned}
&(1-\varkappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum_{m=1}^{M}\sum_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2 w_{m,s} - \nabla p + f,\\
&0 = \nabla\cdot v,\\
&\frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = v + \alpha_m w_{m,0}, \quad m=1,\dots,M,\\
&\frac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}, \quad s=1,\dots,n_m-1,\\
&\alpha_m < 0, \quad A_{m,p} > 0
\end{aligned} \tag{1}$$

моделирует динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина-Фойгта ненулевого порядка [1]. Функция $v=(v_1,\dots,v_n)$, $v_i = v_i(x,t)$ ($x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$, Ω — ограниченная измеримая область с границей $\partial\Omega$ класса $\mathfrak{C}^\infty$, $t\in\mathbb{R}$) имеет физический смысл скорости течения, функция $p=p(x,t)$ отвечает давлению жидкости. Параметры $\nu\in\mathbb{R}_+$ и $\varkappa\in\mathbb{R}$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно. Параметры $A_{m,s}$ определяют время ретардации (запаздывания) давления.

Ранее [2] нами рассматривалась задача Коши-Дирихле

$$\begin{aligned}
&v(x,0) = v_0(x), \quad w_{m,s}(x,0) = w^0_{m,s}(x) \quad \forall x\in\Omega,\\
&v(x,t) = 0, \quad w_{m,s}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}, \quad m=1,\dots,M, \quad s=0,1,\dots,n_m-1
\end{aligned} \tag{2}$$

для системы (1) в предположении, что свободный член $f=(f_1,\dots,f_n)$, характеризующий внешнее воздействие на жидкость, не зависит от времени. Подход, предложенный в [3], [4], позволяет рассмотреть задачу (1), (2) и при нестационарном свободном члене $f=f(x,t)$.

Во многих задачах гидродинамики использование градиента давления предпочтительнее рассмотрения давления, поэтому перейдем (подробное обоснование такого перехода см. в [5]) от системы (1) к системе

$$\begin{aligned}
&(1-\varkappa\nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v + \sum_{m=1}^{M}\sum_{s=0}^{n_m-1} A_{m,s}\nabla^2 w_{m,s} - \bar{\mathbf{p}} + f,\\
&0 = \nabla(\nabla\cdot v),\\
&\frac{\partial w_{m,0}}{\partial t} = v + \alpha_m w_{m,0}, \quad m=1,\dots,M,\\
&\frac{\partial w_{m,s}}{\partial t} = s w_{m,s-1} + \alpha_m w_{m,s}, \quad s=1,\dots,n_m-1, \quad \alpha_m<0, \quad A_{m,s}>0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного Фонда Дж.Сороса (грант d1320).

Нас будет интересовать локальная однозначная разрешимость задачи (2), (3). Эту задачу удобно рассматривать в рамках теории уравнений типа Соболева. Поэтому сначала мы исследуем разрешимость абстрактной задачи Коши для полулинейного нестационарного уравнения типа Соболева, а затем рассматриваем задачу Коши-Дирихле (2) для системы (3) как конкретную интерпретацию абстрактной задачи.

В данной статье обобщаются результаты [5].

1. Постановка и разрешимость абстрактной задачи

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и $M \in \mathfrak{C}^{\infty}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, функция $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{F}$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{4}$$

для полулинейного уравнения типа Соболева

$$L\dot{u} = M(u) + f. \tag{5}$$

Пусть линейный оператор $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ бирасщепляющий (т.е. его ядро $\ker L$ и образ $\operatorname{im} L$ дополняемы в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно [6]). Через $M'_{u_0} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ обозначим производную Фреше оператора M в точке $u_0 \in \mathfrak{U}$ и введем в рассмотрение цепочки M'_{u_0}-присоединенных векторов оператора L [7], которые будем выбирать из некоторого дополнения $\operatorname{coim} L = \mathfrak{U} \ominus \ker L$ к ядру $\ker L$.

Введем условие

(A1) Независимо от выбора $\operatorname{coim} L$ любая цепочка M'_{u_0}-присоединенных векторов любого собственного вектора $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ содержит точно p элементов.

Через $\widetilde{L}$ обозначим сужение оператора L на $\operatorname{coim} L$. По теореме Банаха оператор $\widetilde{L} : \operatorname{coim} L \to \operatorname{im} L$ — топлинейный изоморфизм. Построим множества $\mathfrak{U}^0_q = A^q[\mathfrak{U}^0_0]$, $q = 1, \ldots, p$, где $A = \widetilde{L}^{-1} M'_{u_0}$, $\mathfrak{U}^0_0 = \ker L$. Очевидно, $\mathfrak{U}^0_q$, $q = 1, \ldots, p$ — линейные пространства, причем $\mathfrak{U}^0_q \subset \operatorname{coim} L$. Следовательно, множество $\mathfrak{F}^0_p = M'_{u_0}[\mathfrak{U}^0_p]$ — также линейное пространство, причем $\mathfrak{F}^0_p \cap \operatorname{im} L = \{0\}$ (в силу (A1)).

Введем еще условие

(A2) $\mathfrak{F}^0_p \oplus \operatorname{im} L = \mathfrak{F}$.

Аналогично [5], [8] можно установить существование проекторов $P_q : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^0_q$ и $Q_q : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}^0_q$ ($\mathfrak{F}^0_q = M'_{u_0}[\mathfrak{U}^0_q]$) таких, что $P_q P_r = P_r P_q = \mathbb{O}$, $Q_q Q_r = Q_r Q_q = \mathbb{O}$, $q, r = 0, 1, \ldots, p$, $q \neq r$. Положим

$$\mathfrak{U}^0 = \bigoplus_{q=0}^{p} \mathfrak{U}^0_q, \quad P = \sum_{q=0}^{p} P_q,$$

$$\mathfrak{F}^0 = \bigoplus_{q=0}^{p} \mathfrak{F}^0_q, \quad Q = \sum_{q=0}^{p} Q_q.$$

Операторы $P \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$, $Q \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$ — проекторы, поэтому $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, где $\mathfrak{U}^0 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{u}^1 = \ker P$; $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, где $\mathfrak{F}^0 = \operatorname{im} Q$, $\mathfrak{F}^1 = \ker Q$. Легко показать [8], что

$$LP_q = Q_{q-1} L, \quad q = 1, \ldots, p. \tag{6}$$

Вернемся теперь к уравнению (5), которое перепишем в виде

$$L\dot{u} = M'_{u_0} u + F(u) + f, \tag{7}$$

где оператор $F = M - M'_{u_0} \in \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ по построению. Подействуем на уравнение (7) последовательно проекторами Q_q, $q = 0,1,\ldots,p$, и $I - Q$. Получим в силу (6) эквивалентную систему

$$
\begin{aligned}
&L\dot{u}_1^0 = M'_{u_0}u_0^0 + F_0(u) + f_0^0,\\
&\ldots\\
&L\dot{u}_p^0 = M'_{u_0}u_{p-1}^0 + F_{p-1}(u) + f_{p-1}^0,\\
&0 = M'_{u_0}u_p^0 + F_p(u) + f_p^0,\\
&L\dot{u}^1 = (I-Q)M(u) + f^1,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $u_q^0 \in \mathfrak{U}_q^0$, $f_q^0 \in \mathfrak{F}_q^0$, $F_q(u) = Q_qF(u) + Q_qM'_{u_0}u^1$, $q = 0,1,\ldots,p$; $u^1 \in \mathfrak{U}^1$, $f^1 \in \mathfrak{F}^1$.

Итак, справедлива

Лемма 1. *Пусть операторы* $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, *причем* L — *бирасщепляющий оператор, и выполнены условия* (A1) *и* (A2). *Тогда уравнение* (5) *эквивалентно системе* (8).

Замечание 1. В условиях леммы 1 оператор M L-ограничен в точке u_0 [3], причем ∞ — полюс порядка p оператор-функции $(\mu L - M'_{u_0})^{-1}$.

Исследуем теперь разрешимость задачи (4), (5). Под решением этой задачи будем понимать вектор-функцию $u \in \mathfrak{C}^\infty((-t_0,t_0);\mathfrak{U})$, $t_0 = t_0(u_0) > 0$, удовлетворяющую уравнению (5) и условию (4).

Известно [9]–[11], что решения задачи (4), (5) существуют не для всех $u_0 \in \mathfrak{U}$, и даже если решение задачи (4), (5) существует, то оно может быть неединственным [3]. Поэтому введем два определения.

Определение 1. Множество $\mathfrak{B}^t \subset \mathfrak{U}\times\mathbb{R}$ назовем конфигурационным пространством уравнения (5), если для любой точки $u_0 \in \mathfrak{U}$ такой, что $(u_0, 0) \in \mathfrak{B}^0$, существует единственное решение задачи (4), (5), причем $(u(t),t) \in \mathfrak{B}^t$.

Замечание 2. Если $\mathfrak{B}^t = \mathfrak{B}\times\mathbb{R}$, где $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}$, то множество $\mathfrak{B}$ называется фазовым пространством уравнения (5) [3], [9], [10].

Определение 2. Решение $u = u(t)$ задачи (4), (5) назовем квазистационарной траекторией, если $L\dot{u}^0 \equiv 0$ $\forall t \in (-t_0,t_0)$, где $u^0 = Pu$ [3].

Чтобы выделить квазистационарные траектории из множества возможных решений задачи (4), (5), введем еще два условия

(A3) $f_q^0(t) \equiv 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $q = 1,\ldots,p$;

(A4) $F_q(u) \equiv 0$ $\forall u \in \mathfrak{O}_{u_0}$, $q = 1,\ldots,p$.

Здесь $\mathfrak{O}_{u_0}$ — некоторая окрестность точки $u_0 \in \widetilde{\mathfrak{U}} = \{u \in \mathfrak{U} : u_q^0 = \mathrm{const},\ \ q = 1,\ldots,p\}$. Очевидно, $\widetilde{\mathfrak{U}}$ — полное аффинное многообразие, моделируемое подпространством $\mathfrak{U}_0^0 \oplus \mathfrak{U}^1$.

Теорема 1. *Пусть* (i) *выполнены условия леммы* 1; (ii) *точка* $(u_0,0) \in \mathfrak{B}^0$, *где* $\mathfrak{B}^t = \{(u,t) \in \widetilde{\mathfrak{U}}\times\mathbb{R} : Q_0(M(u) + f(t)) = 0\}$; (iii) *вектор-функция* $f \in \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{F})$; (iv) *выполнены условия* (A3), (A4). *Тогда существует единственное решение задачи* (4), (5), *являющееся квазистационарной траекторией, причем* $(u(t),t) \in \mathfrak{B}^t$ $\forall t \in (-t_0,t_0)$.

Доказательство. Пусть решение задачи (4), (5) найдено. Тогда из (8) в силу условий (A3), (A4) следует, что $L\dot{u}^0 \equiv 0$, т.е. решение является квазистационарной траекторией. Установим существование и единственность решения. В силу леммы 1 и условий (A3) и (A4) систему (8) в окрестности $\mathfrak{O}_{u_0}$ приведем к виду

$$
\begin{aligned}
&0 = M'_{u_0}u_0^0 + F_0(u) + f_0^0,\\
&L\dot{u}^1 = (I-Q)M(u) + f^1.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

По построению оператор $M'_{u_0} : \mathfrak{U}^0_0 \to \mathfrak{F}^0_0$ невырожден, причем $F'_{0u}|_{u=u_0} \equiv \mathbb{O}$. (Здесь через F'_{0u} обозначена производная Фреше оператора F_0 в точке u.) Следовательно, по теореме о неявной функции существуют такие окрестность $\mathfrak{O}^1_{u_0} \subset (I-P)[\mathfrak{O}_{u_0}]$ и вектор-функция $\delta \in \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{O}^1_{u_0} \times \mathbb{R}; \mathfrak{O}^0_{u_0})$, где $\mathfrak{O}^0_{u_0} = P[\mathfrak{O}_{u_0}]$, что

$$u(t) = u^0_0(t) + \sum_{q=1}^{p} u^0_q + u^1 \in \mathfrak{B}^t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $u^0_0(t) = \delta(u^1, t)$ $\forall u^1 \in \mathfrak{O}^1_{u_0}$, а $u^0_q = P_q u_0 = \mathrm{const}$ при $q = 1, \dots, p$.

Из (6) следует, что $QL = LP$, и, значит, оператор $L : \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{F}^1$. Обозначим через L_1 сужение оператора L на $\mathfrak{U}^1$. Можно показать [8], что оператор $L_1 : \mathfrak{U}^1 \to \mathfrak{F}^1$ непрерывно биективен. Через L^{-1} обозначим сужение оператора $\widetilde{L}^{-1}$ на $\mathfrak{F}^1$. Следовательно, система (9) на $\mathfrak{O}^1_{u_0}$ может быть приведена к виду

$$\dot{u}^1 = L^{-1}(I-Q)M(\delta(u^1,t) + (P-P_0)u_0 + u^1) + g(t) \equiv \Phi(u^1, t), \tag{10}$$

где $\Phi \in \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{O}^1_{u_0} \times \mathbb{R}; \mathfrak{U}^1)$, а $g(t) = L^{-1} f^1(t)$.

Однозначная локальная разрешимость задачи Коши $u^1(0) = (I-P)u_0$ для уравнения (10) — классический результат [12]. Искомая квазистационарная траектория имеет вид $u(t) = \delta(u^1(t), t) + u^1(t)$, где $u^1 \in \mathfrak{C}^\infty((-t_0, t_0); \mathfrak{O}^1_{u_0})$ — решение задачи Коши для уравнения (10). $\square$

Замечание 3. Из доказательства теоремы 1 следует, что в качестве начального значения можно брать не только точку u_0, но и любую точку из некоторой ее окрестности в $\mathfrak{B}^0$. Это означает, что множество $\mathfrak{B}^t$ локально является конфигурационным пространством.

Замечание 4. В [13] содержится обзор результатов о разрешимости задачи Коши (4) для линейного операторного уравнения типа Соболева $L\dot{u} = Mu$.

2. Разрешимость конкретной задачи

Редуцируем задачу (2), (3) к задаче (4), (5). Для этого положим

$$\mathfrak{U} = \overset{K}{\underset{l=0}{\oplus}} \mathfrak{U}_l, \quad \mathfrak{F} = \overset{K}{\underset{l=0}{\oplus}} \mathfrak{F}_l, \quad K = n_1 + n_2 + \dots + n_M, \tag{11}$$

где $\mathfrak{U}_0 = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi \times \mathbf{H}_p$, $\mathfrak{F}_0 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \mathbf{H}_p$ [5], $\mathfrak{U}_i = \mathbf{H}^2 \cap \overset{0}{\mathbf{H}}{}^1 = \mathbf{H}^2_\sigma \times \mathbf{H}^2_\pi$, $i = 1, \dots, K$, $\mathfrak{F}_i = \mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi$, $i = 1, \dots, K$.

Здесь $\mathbf{H}^2_\sigma$ — подпространство соленоидальных векторов пространства $\mathbf{H}^2 \cap \overset{0}{\mathbf{H}}{}^1$, $\mathbf{H}^2 = (W^2_2(\Omega))^n$, $\overset{0}{\mathbf{H}}{}^1 = (\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega))^n$, $\mathbf{H}^2_\pi$ — ортогональное (в смысле $\mathbf{L}^2 = (L^2(\Omega))^n$) дополнение к $\mathbf{H}^2_\sigma$; $\mathbf{H}_\sigma$ и $\mathbf{H}_\pi$ — замыкания подпространств $\mathbf{H}^2_\sigma$ и $\mathbf{H}^2_\pi$ в норме $\mathbf{L}^2$ соответственно; $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}_\pi$.

Обозначим через $\Sigma : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{H}_\sigma$ ортопроектор вдоль $\mathbf{H}_\pi$. Тогда $\Sigma \in \mathfrak{L}(\mathbf{H}^2 \cap \overset{0}{\mathbf{H}}{}^1)$, причем $\operatorname{im}\Sigma = \mathbf{H}^2_\sigma$, $\ker\Sigma = \mathbf{H}^2_\pi$. Элемент пространства $\mathfrak{U}$ (вектор $\vec{\mathbf{u}}(x,t)$) будет иметь вид

$$\vec{\mathbf{u}}(x,t) = (u_\sigma, u_\pi, u_p, w_{1\,0}, \dots, w_{M\,0}, w_{1\,1}, \dots, w_{1,n_1-1}, \dots, w_{M\,1}, \dots, w_{M,n_M-1}),$$

где $u_\sigma = \Sigma v$, $u_\pi = (I-\Sigma)v$, $u_p = \overline{\mathbf{p}}$.

Операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ определим формулами

$$L := \begin{pmatrix} \Sigma A_\varkappa \Sigma & \Sigma A_\varkappa \Pi & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \Pi A_\varkappa \Sigma & \Pi A_\varkappa \Pi & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & 1 & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\Pi = I - \Sigma$, $A_\varkappa = 1 - \varkappa\nabla^2$, L — матрица порядка $K+3$.

$$M(\vec{\mathbf{u}}) := \widetilde{M}\vec{\mathbf{u}} + \begin{pmatrix} \Sigma B(u_\sigma + u_\pi) \\ \Pi B(u_\sigma + u_\pi) \\ \mathbb{O} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\widetilde{M} := \begin{pmatrix}
\nu\widetilde{\Delta} & \nu\widetilde{\Delta} & \mathbb{O} & A_{1\,0}\widetilde{\Delta} & \dots & A_{M\,0}\widetilde{\Delta} & A_{1\,1}\widetilde{\Delta} & \dots & A_{1\,n_1-1}\widetilde{\Delta} & \dots & A_{M\,1}\widetilde{\Delta} & \dots & A_{M\,n_M-1}\widetilde{\Delta} \\
\nu\underset{\sim}{\Delta} & \nu\underset{\sim}{\Delta} & -I & A_{1\,0}\underset{\sim}{\Delta} & \dots & A_{M\,0}\underset{\sim}{\Delta} & A_{1\,1}\underset{\sim}{\Delta} & \dots & A_{1\,n_1-1}\underset{\sim}{\Delta} & \dots & A_{M\,1}\underset{\sim}{\Delta} & \dots & A_{M\,n_M-1}\underset{\sim}{\Delta} \\
\Sigma C & \Pi C & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
1 & 1 & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \alpha_M & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \alpha_1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_M & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \alpha_M
\end{pmatrix}, \tag{14}$$

$\widetilde{\Delta} = \Sigma\Delta$, $\underset{\sim}{\Delta} = \Pi\Delta$, $B(u_\sigma + u_\pi) := -((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi)$, $C(u_\sigma + u_\pi) := \nabla(\nabla\cdot(u_\sigma + u_\pi))$.

Лемма 2. *Пусть пространства* $\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{F}$ *определены формулами* (11), *причем* $n = 2, 3, 4$, *а операторы* $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ — *формулами* (12), (13). *Тогда* (i) *оператор* $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, *причем, если* $\varkappa^{-1} \notin \sigma(-\nabla^2)$, *то* $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{K \text{ раз}}$, $\operatorname{im} L = \mathbf{H}_\sigma \times \mathbf{H}_\pi \times \{0\} \times \mathfrak{F}_1 \times \dots \times \mathfrak{F}_K$;

(ii) *оператор* $M \in \mathfrak{C}^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Утверждение (i) леммы 2 очевидно, а утверждение (ii) проверяется непосредственно. Укажем лишь, что

$$M'_u = \widetilde{M} + \begin{pmatrix} \Sigma B_\sigma & \Sigma B_\pi & \mathbb{O} \\ \Pi B_\sigma & \Pi B_\pi & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где $\widetilde{M}$ определяется формулой (14), B_σ (B_π) — частная производная Фреше оператора B в точке $u_\sigma + u_\pi$ по u_σ (u_π). Очевидно, $\forall n \geq 3$, $\forall u \in \mathfrak{U}$ $M_u^{(n)} \equiv \mathbb{O}$.

Положим $f = (f_\sigma, f_\pi, \underbrace{0, \dots, 0}_{K+1 \text{ раз}})$, где $f_\sigma = \Sigma f$, $f_\pi = \Pi f$, и тем самым закончим редукцию задачи (2), (3) к задаче (4), (5).

Проверим теперь выполнимость условий (A1)–(A4). Обозначим через $A_{\varkappa\sigma}$ сужение оператора $\Sigma A_\varkappa \Sigma$ на $\mathbf{H}_\sigma^2$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2, *причем* $\ker A_{\varkappa\sigma} = \{0\}$. *Тогда каждый вектор* $\varphi \in \ker L \setminus \{0\}$ *имеет точно один* M'_u*-присоединенный вектор независимо от точки* $u \in \mathfrak{U}$.

Доказательство. Пусть вектор $\varphi = (0, 0, \varphi_p, \underbrace{0, \dots, 0}_{K \text{ раз}}) \in \ker L$, $\varphi_p \neq 0$. Найдем вектор $\psi \in \mathfrak{U}$ такой, что $L\psi = M'_u\varphi$. Из (12), (15) имеем

$$\begin{aligned} A_{\varkappa\sigma}\psi_\sigma + \Sigma A_\varkappa \psi_\pi &= 0, \\ \Pi A_\varkappa \psi_\sigma + \Pi A_\varkappa \psi_\pi &= -\varphi_p. \end{aligned} \tag{16}$$

Рассуждая далее аналогично [5], получим $\psi_\sigma = -\Sigma A_\varkappa^{-1}\varphi_p$, $\psi_\pi = -\Pi A_\varkappa^{-1}\varphi_p$, компонента ψ_p вектора ψ произвольна, а остальные K компонент вектора ψ равны нулю. Наконец, $M'_u\psi \notin \operatorname{im} L$, т.к. $C\psi_\pi \neq 0$, если $\psi_\pi \neq 0$ [14]. Итак, условие (A1) выполняется, причем $p = 1$

Проверим выполнимость условия (A2). Обозначим через $A_{\varkappa\pi}$ сужение оператора $\Pi A_{\varkappa}^{-1}\Pi$ на $\mathbf{H}_{\pi}$.

Справедлива

Лемма 4 ([5]). *В условиях леммы* 3 *оператор* $A_{\varkappa\pi} : \mathbf{H}_{\pi} \to \mathbf{H}_{\pi}^2$ *— топлинейный изоморфизм.*

В силу леммы 2 оператор (12) бирасщепляющий. Положим $\mathfrak{U}_0^0 = \ker L$, $\operatorname{coim} L = \mathbf{H}_{\sigma}^2 \times \mathbf{H}_{\pi}^2 \times \{0\} \times \mathfrak{U}_1 \times \dots \times \mathfrak{U}_K$. Построим линеалы

$$\mathfrak{F}_0^0 = M'_{u_0}[\mathfrak{U}_0^0] = \{0\} \times \mathbf{H}_p \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{K \text{ раз}} =$$

$$= \{0\} \times \mathbf{H}_{\pi} \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{K \text{ раз}} \subset \operatorname{im} L,$$

$$\mathfrak{U}_1^0 = \widetilde{L}^{-1}[\mathfrak{F}_0^0] = \Sigma A_{\varkappa}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times A_{\varkappa\pi}[\mathbf{H}_p] \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{K \text{ раз}} =$$

$$= \Sigma A_{\varkappa}^{-1} A_{\varkappa\pi}^{-1}[\mathbf{H}_{\pi}^2] \times \mathbf{H}^2 \times \{0\} \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{K \text{ раз}} \subset \operatorname{coim} L$$

в силу леммы 4;

$$\mathfrak{F}_1^0 = M'_{u_0}[\mathfrak{U}_1^0] = \Sigma \widetilde{B}_0 A_{\varkappa}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \Pi \widetilde{B}_0 A_{\varkappa}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times C A_{\varkappa}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{K \text{ раз}}.$$

Пусть $\widetilde{C}$ — сужение оператора C на $\mathbf{H}_{\pi}^2$. Поскольку существует оператор $\widetilde{C}^{-1}$ [14], то в силу леммы 4

$$\mathfrak{F}_1^0 = \Sigma \widetilde{B}_0 A_{\varkappa}^{-1} A_{\varkappa\pi}^{-1} \widetilde{C}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \Pi \widetilde{B}_0 A_{\varkappa}^{-1} A_{\varkappa\pi}^{-1} \widetilde{C}^{-1}[\mathbf{H}_p] \times \mathbf{H}_p \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{K \text{ раз}} \not\subset \operatorname{im} L.$$

Здесь и выше $\widetilde{B}_0$ — производная Фреше оператора $\widetilde{B}$ в точке $u_{\sigma_0} + u_{\pi_0}$ ($\widetilde{B}(u_\sigma + u_\pi) := \nu\nabla^2(u_\sigma + u_\pi) - ((u_\sigma + u_\pi)\cdot\nabla)(u_\sigma + u_\pi)$, $u_{\sigma_0} = u_\sigma(x,0)$, $u_{\pi_0} = u_\pi(x,0)$), а оператор $\widetilde{L}^{-1}$ определен из (12).

Построим операторы

$$P_0 = \left(\begin{array}{cc}\begin{matrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \Pi & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} K \\ \text{строк} \end{matrix}\end{array}\right), \quad P_1 = \left(\begin{array}{cc}\begin{matrix} \mathbb{O} & P_1^{1\,2} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Pi & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} K{+}1\end{array}\right), \tag{17}$$

где $P_1^{1\,2} = \Sigma A_{\varkappa}^{-1} A_{\varkappa\pi}^{-1}\Pi$;

$$Q_0 = \left(\begin{array}{cc}\begin{matrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ Q_0^{2\,1} & \Pi & Q_0^{2\,3} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} K{+}1 \\ \text{строка} \end{matrix}\end{array}\right), \quad Q_1 = \left(\begin{array}{cc}\begin{matrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & Q_1^{1\,3} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & Q_1^{2\,3} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \Pi & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \dots & \mathbb{O} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} K\end{array}\right), \tag{18}$$

где $Q_1^{1\,3} = \Sigma\widetilde{B}_0 A_{\varkappa}^{-1} A_{\varkappa\pi}^{-1} \widetilde{C}^{-1}\Pi$, $Q_1^{2\,3} = \Pi\widetilde{B}_0 A_{\varkappa}^{-1} A_{\varkappa\pi}^{-1} \widetilde{C}^{-1}\Pi$, $Q_0^{2\,1} = -\Pi A_{\varkappa} A_{\varkappa\sigma}^{-1}\Sigma$, $Q_0^{2\,3} = -Q_0^{2\,1} Q_1^{1\,3} - Q_1^{2\,3}$.

Легко проверить, что операторы $P_k \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_k \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F})$, $k = 0, 1$, определенные в (17), (18), — проекторы, причем $\operatorname{im} P_k = \mathfrak{U}_k^0$, $\operatorname{im} Q_k = \mathfrak{F}_k^0$, $k = 0, 1$ и $P_0 P_1 = P_1 P_0 = \mathbb{O}$, $Q_0 Q_1 = Q_1 Q_0 = \mathbb{O}$. Кроме этого, $\ker Q_1 = \operatorname{im} L$, и, следовательно, $\mathfrak{F}_1^0 \oplus \operatorname{im} L = \mathfrak{F}$, т.е. условие (A2) выполнено.

Условие (A3) также, очевидно, выполняется, поскольку

$$Q_1 f = Q_1(f_\sigma, f_\pi, \underbrace{0, \ldots, 0}_{K+1 \text{ раз}}) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{K+3}).$$

Для проверки условия (A4) построим множество $\widetilde{\mathfrak{U}} = \{u \in \mathfrak{U} : P_1 u = \mathrm{const}\} = \{u \in \mathfrak{U} : u_\pi = \mathrm{const}\}$. В нашем случае условие (A4) состоит из единственного равенства

$$Q_1 M(u) = \begin{pmatrix} Q_1^{1\,3} C(u_\sigma + u_\pi) \\ Q_1^{2\,3} C(u_\sigma + u_\pi) \\ C(u_\sigma + u_\pi) \\ \mathbb{O} \end{pmatrix} = \left(\left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \right)_{\substack{K+3 \\ \text{строк}}},$$

которое выполняется тождественно [14], если $u_\pi = 0$. Таким образом, если положить $\widetilde{\mathfrak{U}} = \{u \in \mathfrak{U} : u_\pi = 0\}$, то условие (A4) выполняется.

Построим множество $\mathfrak{B}^t$. По теореме 1 $\mathfrak{B}^t = \{(u,t) \in \widetilde{\mathfrak{U}} \times \mathbb{R} : Q_0(M(u) + f(t)) = 0\}$. Поскольку

$$Q_0 \left(M \begin{pmatrix} u_\sigma \\ 0 \\ u_p \\ u_1 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_\sigma(t) \\ f_\pi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow (Q_0^{2\,1}\Sigma + \Pi)\widetilde{B}(u_\sigma) - u_p + Q_0^{2\,1} f_\sigma(t) + f_\pi(t) = 0$$

и

$$Q_0^{2\,1}\Sigma + \Pi = A_{\varkappa\pi}^{-1}\Pi A_\varkappa^{-1}\Sigma + A_{\varkappa\pi}^{-1}\Pi A_\varkappa^{-1}\Pi = A_{\varkappa\pi}^{-1}\Pi A_\varkappa^{-1}, \tag{19}$$

то

$$\mathfrak{B}^t = \{(u,t) \in \widetilde{\mathfrak{U}} \times \mathbb{R} : A_{\varkappa\pi}^{-1}\Pi A_\varkappa^{-1}(\widetilde{B}(u_\sigma) + f_\sigma(t) + f_\pi(t)) = u_p,$$
$$u_\pi = 0,\ \ u_\sigma = \mathbf{H}_\sigma^2,\ \ u_i \in \mathbf{H}_\sigma^2 \times \mathbf{H}_\pi^2,\ \ i = 1, \ldots, K\}. \tag{20}$$

Для доказательства (19) заметим, что

$$\Pi A_\varkappa^{-1} A_{\varkappa\sigma}\Sigma + \Pi A_\varkappa^{-1}\Pi A_\varkappa \Sigma = \Pi A_\varkappa^{-1}(\Sigma A_\varkappa + \Pi A_\varkappa)\Sigma = \mathbb{O}.$$

Отсюда

$$\Pi A_\varkappa^{-1} A_{\varkappa\sigma}\Sigma = -A_{\varkappa\sigma}\Pi A_\varkappa \Sigma \Longrightarrow A_{\varkappa\pi}^{-1}\Pi A_\varkappa^{-1} A_{\varkappa\sigma}\Sigma = -\Pi A_\varkappa \Sigma \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow A_{\varkappa\pi}^{-1}\Pi A_\varkappa^{-1}\Sigma = -\Pi A_\varkappa A_{\varkappa\sigma}^{-1}\Sigma = Q_0^{2\,1}\Sigma.$$

Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 3. *Пусть* $f \in \mathfrak{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{L}^2)$, *а* $(u_0, 0) \in \mathfrak{B}^0$ (20). *Тогда для некоторого* $t_0 = t_0(u_0)$ *существует единственное решение* $\vec{\mathbf{u}} = (u_\sigma, 0, \overline{p}, w_{1\,0}, \ldots, w_{M\,0}, w_{1\,1}, \ldots, w_{1\,n_1-1}, \ldots, w_{M\,1}, \ldots, w_{M\,n_M-1}) \in \mathfrak{C}^\infty((-t_0, t_0); \mathfrak{B}^t)$ *задачи* (2), (3), *являющееся квазистационарной траекторией.*

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность $\boxed{\text{А.П. Осколкову}}$ за постановку задачи, Г.А. Свиридюку за полезные советы, Ю.Г. Борисовичу за интерес к данным исследованиям и поддержку.

Литература

1. Осколков А.П. *Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 179. – С. 126–164.
2. Сукачева Т.Г. *Исследование фазовых пространств полулинейных сингулярных уравнений динамического типа*: Дис.... канд. физ.-матем. наук. – Новгород, 1990. – 112 с.
3. Свиридюк Г.А. *Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 318. – № 4. – С. 828–831.
4. Свиридюк Г.А. *Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57. – № 3. – С. 192–207.
5. Свиридюк Г.А. *Об одной модели динамики слабосжимаемой вязкоупругой жидкости* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 62–70.
6. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. *Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера* // УМН. – 1977. – Т. 32. – № 4. – С. 3–54.
7. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.
8. Свиридюк Г.А. *Исследование полулинейных уравнений типа Соболева в банаховых пространствах*: Дис.... докт. физ.-матем. наук. – Челябинск, 1992. – 213 с.
9. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. *Фазовые пространства одного класса операторных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 2. – С. 250–258.
10. Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. *Задача Коши для одного класса полулинейных уравнений типа Соболева* // Сиб. матем. журн. – 1990. – Т. 31. – № 5. – С. 109–119.
11. Levine H.A. *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Du_t = -Au + F(u)$ // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1973. – V. 51. – № 5. – P. 371–386.
12. Ленг С. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий.* – М.: Мир, 1967. – 328 с.
13. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. – 1994. – Т. 49. – № 4. – С. 47–74.
14. Капитанский Л.В., Пилецкас К.Н. *О некоторых задачах векторного анализа* // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1984. – Т. 138. – С. 65–85.

Новгородский государственный университет

Поступила 13.03.1995