ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 517.95

Ю.Т. СИЛЬЧЕНКО

ОДНА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЛАСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

1. Рассмотрим одну специальную задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v = v(t,x), \quad t \in [0,1], \quad x \in [0,2]. \tag{1}$$

Обозначим через G_1 множество (область) в плоскости переменных (t,x), ограниченное прямыми $t=0$, $t=1$, $x=0$ и кривой $x=f(t)$, а через G_2 — прямыми $t=0$, $x=2$ и кривой $x=f(t)$, где $f(t)$ — заданная гладкая монотонно возрастающая на отрезке $[0,1]$ функция, $f(0)=1$, $f(1)=2$. Простейшая краевая задача для области с подвижной границей ([1] гл. 6, § 3) состоит в нахождении функции $v=v(t,x)$ в G_1, которая удовлетворяет уравнению, начальному условию

$$v(0,x) = v_0(x), \quad x \in [0,1] \tag{2}$$

и краевым условиям

$$v(t,0) = v(t,f(t)) = 0, \quad t \in [0,1]. \tag{3}$$

Потребуем дополнительно, чтобы $v(t,x)=0$ на $\overline{G}_2$.

Будем рассматривать эту задачу в пространстве $L_2(0,2) = L_2$ и искать ее обобщенное решение [2]. Для этого умножим равенство (1) на бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi(x)$ с носителем на промежутке $(0,2)$ ($\varphi \in \overset{0}{C}{}^\infty$) и проинтегрируем по x от 0 до 2. Проведя справа интегрирование по частям, получим равенство

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}, \varphi\right) = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \varphi'\right) \tag{4}$$

((f,φ) – скалярное произведение в L_2), которое и определяет обобщенное решение уравнения (1). Положим

$$D_t = \{v(x) \in W_2^1(0,2), \ \ v(0) = v(f(t)) = 0, \ \ v(x) = 0, \ \ x \in (f(t),2], \ \ t \in [0,1]\}.$$

На этом множестве определим оператор $A(t)$, действующий по правилу $(A(t),\varphi) = -(v',\varphi')$ для любой функции $\varphi \in \overset{0}{C}{}^\infty$. Тогда задача (1)–(3) сведется к абстрактной задаче Коши

$$\frac{dv}{dt} = A(t)v, \quad t \in (0,1], \quad v(0) = v_0 \tag{5}$$

в функциональном пространстве L_2. Особенностью этой задачи является то, что D_t не является плотным в L_2 множеством и $D_\tau \subset D_t$ при $\tau \le t$.

Под решением задачи (5) понимается непрерывная на $[0,1]$ функция $v(t)$, для которой функции $v'(t)$, $A(t)v(t)$ существуют и непрерывны на $(0,1]$, и выполнены соотношения (5).

Подобная задача возникает при рассмотрении процесса таяния тонкой палочки льда, расположенной в начальный момент на отрезке $[1,2]$ оси Ox, если фронт таяния распространяется с заданной скоростью $f'(t)$ и имеет нулевую температуру.

Таким образом, будем искать функцию $v = v(t,x)$ в прямоугольнике $[0,1]\times[0,2]$, которая на G_2 равна нулю, а на части границы G_1 удовлетворяет начальному и краевым условиям (2)–(3). При этом будем считать, что $v_0(x) = 0$ на $[1,2]$.

Задача с подвижной границей такого вида рассматривалась в [3], также она сводилась к абстрактной задаче Коши (5). Однако в [3] задача (5) рассматривается в пространствах, зависящих от t, и при более жестких ограничениях на оператор $A(t)$ и гладкость границы области. В данной работе задача с подвижной границей исследуется иначе, с использованием иной теоремы о разрешимости уравнения (5), которая учитывает, что множества D_t не являются плотными.

2. Абстрактная задача (5) исследована в [4] методами теории полугрупп. При каждом $t \in [0,1]$ рассмотрим оператор-функцию $T_t(\tau) = \exp[-\tau A(t)]$, обладающую свойствами

1° $T_t(\tau)$ — линейный ограниченный оператор из E в D_t, ($\tau > 0$, E — банахово пространство, в котором рассматривается задача (5));

2° $T_t(\tau)T_t(s) = T_t(\tau + s)$;

3° $\lim\limits_{\tau\to+0} T_t(\tau)v = v$ для $v \in D_t$;

4° $T_t(\tau)$ дифференцируема по τ ($\tau > 0$) и $\frac{d}{d\tau}T_t(\tau) = A(t)T_t(\tau)$;

5° $T_t(\tau)$ коммутирует с $A(t)$ на D_t;

6° выполнены оценки

$$\|T_t(\tau)\| \le c\tau^{-\alpha}\exp(-\rho\tau), \quad \|T_t'(\tau)\| \le c\tau^{-\beta}\exp(-\rho\tau) \tag{6}$$

при некоторых $\rho > 0$, $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 1$.

Оператор-функцию $T_t(\tau)$ будем называть полугруппой, порожденной оператором $A(t)$.

В [4] установлена

Теорема. *Пусть выполнены условия*

1° *при каждом* $t \in [0,1]$ *существует ограниченный обратный оператор* $A^{-1}(t)$ *и* $D_\tau \subset D_t$ *при* $\tau \le t$;

2° *при каждом* $t \in [0,1]$ *существует полугруппа* $\exp[-\tau A(t)]$, *порожденная оператором* $A(t)$, *и оценки* (6) *выполнены при некоторых* $\rho > 0$, $\alpha + 1 \le \beta < 2$;

3° *при* $t \ge \tau$ *и некотором* $\varepsilon \in (\beta-1, 1]$ *выполнены неравенства* $\|[A(t)-A(\tau)]A^{-1}(\tau)\| \le c(t-\tau)^\varepsilon$, $\|A^{-1}(t)[A(t) - A(\tau)]v\| \le c(t-\tau)^\varepsilon\|v\|$ *для любого* $v \in D_\tau$;

4° $v_0 \in D(A^\delta(0))$ *при некотором* $\delta \in \left(\min\{2\alpha, \frac{\beta-1}{\beta-\alpha}\}, 1\right]$.

Тогда существует определенная при $0 \le \tau < t \le 1$ *оператор-функция* $U(t,\tau) : E \to D_t$, *называемая разрешающим оператором и обладающая свойствами*

1° $U(t,\tau)$ *непрерывна по совокупности переменных* $0 \le \tau < t \le 1$;

2° $U(t,\tau)$ *непрерывно дифференцируема по* t *при* $t > \tau$ *и*

$$\frac{\partial U(t,\tau)}{\partial t} = A(t)U(t,\tau);$$

3° $U(t,s)U(s,\tau) = U(t,\tau)$, $0 \le \tau < s < t \le 1$;

4° *выполнены оценки* $\|U(t,\tau)\| \le c(t-\tau)^{-\alpha}$, $\|A(t)U(t,\tau)A^{-1}(\tau)\| \le c(t-\tau)^{-\alpha}$.

Решение задачи (5) существует, единственно и задается формулой $v(t) = U(t,0)v_0$.

3. Покажем теперь, что для задачи (1)–(3) выполнены условия теоремы. Заметим, что для гладких функций $v(x)$

$$A(t)v(x) = \begin{cases} v''(x), & 0 \le x \le f(t); \\ 0, & f(t) < x \le 2, \end{cases}$$

$$[A(t) - A(\tau)]v(x) = \begin{cases} v''(x), & x \in [f(\tau), f(t)]; \\ 0, & x \in [0, f(\tau)) \cup (f(t), 2]. \end{cases}$$

У оператора $A(t)$ существует ограниченный обратный оператор

$$A^{-1}(t)g(t) = \begin{cases} \int\limits_0^x (x-s)g(s)ds - \frac{x}{f(t)} \int\limits_0^{f(t)} [f(t)-s)]g(s)ds, & 0 \le x \le f(t); \\ 0, & f(t) < x \le 2. \end{cases}$$

Поэтому при $t \ge \tau$ $[A(t)-A(\tau)]A^{-1}(\tau)v = 0$, $A^{-1}(t)[A(t)-A(\tau)]v = 0$ и, следовательно, выполнены условия 1° и 3° теоремы.

Решая резольвентное уравнение $-v'' + \lambda v = w(x)$, $v(0) = v(f(t)) = 0$, $v(x) = 0$ для $x \in [f(t), 2]$, получим

$$\begin{aligned}(\lambda I - A(\tau))^{-1}w(x) = \frac{\exp(x\sqrt{\lambda})}{2\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}(f(\tau)\sqrt{\lambda})} \int_0^{f(\tau)} w(s)\,\mathrm{sh}[(f(\tau)-s)\sqrt{\lambda}]ds - \\ - \frac{\exp[(x-f(\tau))\sqrt{\lambda}]}{2\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}(f(\tau)\sqrt{\lambda})} \int_0^{f(\tau)} w(s)\,\mathrm{sh}(s\sqrt{\lambda})ds + \\ + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^x w(s)\exp[(s-x)\sqrt{\lambda}]ds + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_x^{f(\tau)} w(s)\exp[(x-s)\sqrt{\lambda}]ds\end{aligned}$$

для $x \in [0, f(\tau)]$ и $[\lambda I - A(\tau)]^{-1}w(x) = 0$ для $x \in (f(\tau), 2]$.

Собственные значения оператора $A(\tau)$ суть корни уравнения $\mathrm{sh}(f(\tau)\sqrt{\lambda}) = 0$ и наибольшее собственное значение есть $-\frac{\pi^2}{f^2(\tau)}$. Оценивая теперь выражение для резольвенты, получим неравенство

$$\|[\lambda I - A(\tau)]^{-1}\| \le c(1+|\lambda|)^{-1}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > -\frac{\pi^2}{f^2(\tau)}.$$

Поэтому оператор $A(t)$ при каждом t порождает аналитическую полугруппу, и оценки (6) выполнены с $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Поэтому выполнено и условие 2° теоремы. Так как $\alpha = 0$, $\beta = 1$, то последнее условие этой теоремы требует, чтобы $v_0(x) \in D(A^\delta(0))$ при $\delta > 0$. Однако поскольку полугруппа является аналитической, то свойство $\lim\limits_{\tau \to +0} T_t(\tau)v = v$ выполнено для любого v. Поэтому достаточно, чтобы $v_0(x) \in L_2(0,1)$ и $v_0(x) = 0$ для $x \in [1, 2]$.

Из сказанного выше вытекает существование обобщенного решения задачи (1)–(3).

Замечание 1. Если задача неоднородная с правой частью $F(t, x)$, то она разрешима [4], если выполнено условие Гёльдера $\|F(t+\Delta t, x) - F(t,x)\|_{L_2} \le ct^{-\mu}|\Delta t|^\nu$ при некоторых $\nu > 0$, $\mu \in [0, 1)$ и $F(t, x) = 0$ на G_2.

Замечание 2. При доказательстве использовалась лишь непрерывность функции $f(t)$, задающей границу раздела областей G_1 и G_2.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1977. – 736 с.
2. Михлин С.Г. *Курс математической физики.* – М.: 1968. – 576 с.
3. Крейн С.Г., Лаптев Г.И. *Абстрактная схема рассмотрения параболических задач в нецилиндрических областях* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 8. – С. 1458–1469.
4. Сильченко Ю.Т. *Эволюционные уравнения с неплотно заданным операторным коэффициентом* // Сиб. матем. журн. – 1993. – Т. 34. – № 2. – С. 166–169.

Воронежский государственный университет

Поступили
первый вариант 11.08.1995
окончательный вариант 02.04.1997