ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

УДК 512.543

Ж.С. САТАРОВ

ОБРАЗУЮЩИЕ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ НАД ПОЛУЛОКАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ БЕЗ ЕДИНИЦЫ. II

Данная работа завершает исследования, начатые в [1], где были выявлены образующие и соотношения обобщенной полной линейной группы $GL^\circ(n,\Lambda)$, $n \geq 2$, над произвольным полулокальным кольцом Λ. Здесь, сохраняя порядок следования пунктов, а также нумераций формул из [1], будем доказывать полноту системы соотношений 1–6 относительно алфавита (5) из названной работы. Доказательству основного результата предпошлем три пункта.

5. Основные леммы

На множестве всех слов алфавита (5) введем отношения $\overset{i}{\tilde{\to}}$, $1 \leq i < mn : W \overset{i}{\tilde{\to}} V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны соотношением $W = X \circ V$, где X — некоторое слово, не содержащее недиагональные выражения вида (rj), $t_{rj}(\alpha)$, $r < j$, для которых $r \leq i$. Введенные отношения $\overset{i}{\tilde{\to}}$ являются рефлексивными и транзитивными. Пусть для индекса i, $1 \leq i < mn$, Q_i означает совокупность тех номеров t из $I(mn)$, для которых $i \neq t \sim i$. Рассмотрим формы $G_i = \prod\limits_{q\in Q_i} t_{iq}(\alpha_q)$ и $F_i = \prod\limits_{q\in P_i} t_{iq}(\alpha_q)$, где порядок следования сомножителей несущественен (напомним, что $P_i = \{t \in I(mn) : i < t \sim i\}$). Если в формах G_i и F_i буква $t_{ik}(\alpha_k)$ нулевая, то это будем подчеркивать как $G_i(\neq k)$ и $F_i(\neq k)$. Аналогичный смысл придается и записям $G_i(\neq k, r)$, $F_i(\neq k, r)$ и т. д. Далее, форму $\widetilde{G}_i = \prod\limits_{q\in Q_i} t_{iq}(\beta_q)$ будем называть $\equiv$-*содержащейся* в форме G_i, если для них $\beta_q \equiv \alpha_q$ и $\alpha_q = 0 \to \beta_q = 0$ при всех $q \in Q_i$ (понятие $\equiv$-содержащейся в F_i формы $\widetilde{F}_i$ очевидным образом содержится в принятом соглашении). Ниже $I(G_i)$, $I(F_i)$ будут означать длины форм G_i и F_i (т. е. числа их ненулевых букв) соответственно.

Лемма 1. *Пусть задана форма $G_i = t_{ik}(\alpha_k) \circ t_{ir}(\alpha_r) \circ \dots \circ t_{ij}(\alpha_j)$, где $I(G_i) \geq 1$, и все ее буквы отличны от нуля, $s, p, \dots, q$ — произвольная перестановка чисел $k, r, \dots, j$. Тогда для них, применяя соотношения* 2, 3a), 3c), 3d) *и* 5, *можно выполнить преобразование*

$$G_i \overset{i}{\tilde{\to}} t_{is}(\widehat{\alpha_s}) \circ t_{ip}(\widehat{\alpha_p}) \circ \dots \circ t_{iq}(\widehat{\alpha_q}) = \widetilde{G}_i$$

(т. е. сохраняя условия $\equiv$-содержимости, буквы из G_i можно переставлять каким угодно образом).

Доказательство следует из соотношений (структурной) перестановочности

$$t_{ia}(\alpha) \circ t_{ib}(\beta) = t_{ib}(\widehat{\beta}) \circ t_{ia}(\widehat{\alpha}), \tag{18}$$

являющихся следствиями от фигурировавших в формулировке соотношений. Действительно, если обе буквы $t_{ia}(\alpha)$, $t_{ib}(\beta)$ диагональны, то $\alpha \equiv \beta \equiv 0$, и они переставляются как $t_{ia}(\alpha) \circ t_{ib}(\beta) = t_{ib}(\alpha) \circ t_{ia}(\beta)$ согласно соотношению 5. Если же диагональна только одна из них, то перестановка

(18) осуществляется при помощи 2. В случае, когда обе $t_{ia}(\alpha)$, $t_{ib}(\beta)$ недиагональны, в силу 3с), 3а), 3d) получается (18) в виде

$$t_{ia}(\alpha)\circ t_{ib}(\beta)=t_{ia}(\cdot)\circ[t_{ib}(\overbrace{\ \beta\ })\circ t_{ib}(\cdot)]\circ t_{ia}(\overbrace{\ \alpha\ })=[t_{ia}(\cdot)\circ t_{ib}(\overbrace{\ \beta\ })]\circ t_{ia}(\overbrace{\ \alpha\ })=$$
$$=t_{ib}(\overbrace{\ \beta\ })\circ[t_{ia}(\cdot)\circ t_{ia}(\overbrace{\ \alpha\ })]=t_{ib}(\overbrace{\ \beta\ })\circ t_{ia}(\overbrace{\ \alpha\ }).\quad\square$$

Лемма 2. *Для любой ненулевой квазитрансвекции $t_{rq}(\beta)$, $r,q\neq i$, с выполненным неравенством $r>q$ при $r<i$ и произвольной формы $F_i(\neq r,q)$, используя соотношения* 3а), 3с), 3d), 5 *и* 2, *можно выполнить преобразование*

$$V=F_i(\neq r,q)\circ t_{rq}(\beta)\overset{i}{\widetilde{\to}}\widetilde{F}_i(\neq r,q)\circ t_{iq}(\cdot),\qquad(\neq r,q)$$

где $\widetilde{F}_i(\neq r,q)$ — некоторая $\equiv$-содержащаяся в $F_i(\neq r,q)$ форма.

Доказательство проведем индукцией по числу $\boldsymbol{n}=I(F_i(\neq r,q))$. Если $\boldsymbol{n}=0$, то $F_i(\neq r,q)=0$, и можно положить $\widetilde{F}_i(\neq r,q)=t_{iq}(\cdot)=0$, т. е. база индукции для $(\neq r,q)$ имеет место.

Пусть $\boldsymbol{n}\geq 1$ и для форм $F_i(\neq r,q)$ длины $<\boldsymbol{n}$ преобразование $(\neq r,q)$ выполнено. Используя 3с), представим рассматриваемое слово в виде

$$V=F_i(\neq r,q,a)\circ[t_{ia}(\alpha_a)\circ t_{rq}(\beta)]=F_i(\neq r,q,a)\circ t_{ra}(\boldsymbol{a})\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })\circ t_{iq}(\boldsymbol{b})\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\qquad(=)$$

(здесь $t_{ia}(\alpha_a)$ — последняя буква $F_i(\neq r,q)$ и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — некоторые радикальные элементы).

Рассмотрим сначала случай, когда в $(=)$ $p(i)=p(q)$. Ради краткости, используя вместо $\overset{i}{\widetilde{\to}}$ знак $\widetilde{\to}$ и применяя соотношения 5, 2, будем иметь

$$V=[F_i(\neq r,q,a)\circ t_{ra}(\boldsymbol{a})\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })\circ d_i(\boldsymbol{b})]\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}\ \widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{ra}(\cdot)\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a}).$$

Если в полученной записи $q>i$, то применением индукционного предположения, леммы 1 и соотношений 5, 2 преобразования продолжаются в виде

$$V\ \widetilde{\to}\ [\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{ra}(\cdot)]\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}\ [\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{ia}(\cdot)]\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}$$
$$\widetilde{\to}\ t_{ia}(\cdot)\circ\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})=t_{qa}(\cdot)\circ\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}$$
$$\widetilde{\to}\ [\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })]\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}\ [\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{iq}(\cdot)]\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}\ \widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})=$$
$$=\widetilde{F}_i(\neq r,q)\circ t_{iq}(0).$$

Если же $q<i$, то в соответствующих местах, используя 3d), 3а), индукционное предположение, а также лемму 1, будем иметь

$$V\ \widetilde{\to}\ \widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ[t_{ra}(\cdot)\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })]\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})=[\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })]\circ t_{ra}(\cdot)\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}$$
$$\widetilde{\to}\ [\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{iq}(\cdot)]\circ t_{ra}(\cdot)\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}\ t_{iq}(\cdot)\circ\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{ra}(\cdot)\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}$$
$$\widetilde{\to}\ [\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{ra}(\cdot)]\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}\ \widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ[t_{ia}(\cdot)t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})]=\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})=$$
$$=\widetilde{F}_i(\neq r,q)\circ t_{iq}(0).$$

Итак, преобразование $(\neq r,q)$ в случае $p(i)=p(q)$ имеет место.

Пусть теперь в $(=)$ $p(i)\neq p(q)$ (так может быть только при $\boldsymbol{a}=0$, см. формулы соотношения 3с)). Здесь применение индукционного предположения и соотношений 3а), 3d) приведет к

$$V=[\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{rq}(\overbrace{\ \beta\ })]\circ t_{iq}(\boldsymbol{b})\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})\ \widetilde{\to}\ \widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ[t_{iq}(\cdot)\circ t_{iq}(\boldsymbol{b})]\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})=$$
$$=\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ[t_{iq}(\cdot)\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})]=[\widetilde{F}_i(\neq r,q,a)\circ t_{ia}(\overbrace{\alpha_a})]\circ t_{iq}(\cdot)=\widetilde{F}_i(\neq r,q)\circ t_{iq}(\cdot),$$

т. е. преобразование $(\neq r, q)$ имеет место и в этом случае. Полученная в $(\neq r, q)$ форма $\widetilde{F}_i(\neq r, q)$ будет $\equiv$-содержащейся в $F_i(\neq r, q)$, поскольку условия такой содержимости были сохранены при каждом шаге преобразования и применениях индукционного предположения. $\square$

Лемма 3. *Пусть задана форма $F_i(\neq r)$, $r \in P_i$. Тогда для любой недиагональной буквы $t_{ri}(\alpha)$, используя соотношения 1–3 и 5, можно выполнить преобразование*

$$V = F_i(\neq r) \circ t_{ri}(\alpha) \overset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}} \widetilde{F}_i(\neq r), \qquad (\neq r)$$

где $\widetilde{F}_i(\neq r)$ — некоторая форма, $\equiv$-содержащаяся в $F_i(\neq r)$.

Доказательство. Если форма $F_i(\neq r)$ содержит диагональные буквы, то, переставляя ее сомножители так, что диагональные буквы находятся впереди всех недиагональных сомножителей (это можно сделать по лемме 1), затем удалив их из записи при помощи соотношения 5, форму $F_i(\neq r)$ в $(\neq r)$ всегда (и без потери общности) можно считать составленой только из недиагональных букв.

В основу доказательства снова будет положена индукция по числу $\boldsymbol{n} = I(F_i(\neq r))$ (≥ 0). При $\boldsymbol{n} = 0$ имеем $F_i(\neq r) = 0$, и здесь можно положить $\widetilde{F}_i(\neq r) = 0$ — а это база индукции.

Пусть $\boldsymbol{n} \geq 1$ и для длин $< \boldsymbol{n}$ преобразование $(\neq r)$ выполнено. Покажем, что оно справедливо и для формы $F_i(\neq r)$ длины $\boldsymbol{n}$. Используя соотношения (7), 2, 3d), 3a), лемму 2 (дважды), а также индукционное предположение, имеем

$$\begin{aligned} V = F_i(\neq r) \circ t_{ri}(\alpha) = F_i(\neq r, q) \circ [t_{iq}(\alpha_q) \circ t_{ri}(\alpha)] = [F_i(\neq r, q) \circ d_i(\cdot)] \circ t_{rq}(-\widehat{\alpha\alpha_q}) \circ t_{ri}(\widehat{\alpha}) \circ \\ \circ\, t_{iq}(\widehat{\alpha_q}) \overset{\sim}{\rightarrow} [\widetilde{F}_i(\neq r, q) \circ t_{rq}(-\widehat{\alpha\alpha_q})] \circ t_{ri}(\widehat{\alpha}) \circ t_{iq}(\widehat{\alpha_q}) \overset{\sim}{\rightarrow} \widetilde{F}_i(\neq r, q) \circ [t_{iq}(\cdot) \circ t_{ri}(\widehat{\alpha})] \circ t_{iq}(\widehat{\alpha_q}) = \\ = [\widetilde{F}_i(\neq r, q) \circ d_i(\cdot)] \circ [t_{rq}(\cdot) \circ t_{ri}(\widehat{\alpha})] \circ [t_{iq}(\cdot) \circ t_{iq}(\widehat{\alpha_q})] \overset{\sim}{\rightarrow} [\widetilde{F}_i(\neq r, q) \circ t_{ri}(\widehat{\alpha})] \circ t_{rq}(\cdot) \circ \\ \circ\, t_{iq}(\widehat{\alpha_q}) \overset{\sim}{\rightarrow} [\widetilde{F}_i(\neq r, q) \circ t_{rq}(\cdot)] \circ t_{iq}(\widehat{\alpha_q}) \overset{\sim}{\rightarrow} \widetilde{F}_i(\neq r, q) \circ [t_{iq}(\cdot) \circ t_{iq}(\widehat{\alpha_q})] = \widetilde{F}_i(\neq r, q) \circ t_{iq}(\widehat{\alpha_q}) = \\ = \widetilde{F}_i(\neq r). \end{aligned}$$

Конечные члены полученной цепочки показывают на правильность преобразования $(\neq r)$. И здесь форма $\widetilde{F}_i(\neq r)$ является $\equiv$-содержащейся в $F_i(\neq r)$, т. к. оба условия $\equiv$-содержимости были соблюдены при всех преобразованиях и гарантированы при применениях индукционного предположения. $\square$

6. Трансформационные преобразования

Этот пункт также является подготовительным и составляет один из основных моментов при доказательстве главного утверждения работы. Введем формы $f_i = F_i(\neq s) \circ (is)$, $s \geq i$, $1 \leq i < mn$ (ясно, что при $s = i$ $F_i(\neq s)$ — это обычная форма F_i). Введенные слова f_i будем называть *горизонтальными формами ступени i*.

Теорема 1 (трансформации букв). *Пусть f_i — произвольная ненулевая горизонтальная форма ступени i, $1 \leq i < mn$, и x означает либо диагональную букву $d_k(\varepsilon)$, либо недиагональную квазитрансвекцию $t_{rj}(\alpha)$, для которой при $r < j$ считается выполненным условие $r \geq i$. Для них, применяя соотношения 1–6, можно выполнить преобразование*

$$V = f_i \circ x \overset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}} \widetilde{f}_i, \qquad (\overset{i}{\overset{\sim}{\rightarrow}})$$

где $\widetilde{f}_i$ — некоторая горизонтальная форма ступени i.

Доказательство. Как в лемме 3, и здесь (не теряя общности) все буквы подформы $F_i(\neq s)$ из $f_i = F_i(\neq s) \circ (is)$ будем считать недиагональными. Для простоты всюду ниже под $\overset{\sim}{\rightarrow}$ и здесь будем понимать $\overset{i}{\tilde{\to}}$. Приводимое доказательство является комбинаторным и относительно слова $V = F_i(\neq s) \circ (is) \circ x$ различает следующие случаи.

I. $x = d_k(\varepsilon)$. Если $s = i$, то преобразование $(\overset{i}{\tilde{\to}})$ при помощи соотношения 2 выполняется как $V = F_i \circ x = x \circ \widetilde{F}_i \tilde{\to} \widetilde{F}_i$, и оно выше уже многократно использовано. При $s > i$, применяя разложение (8) и только что разобранный случай $s = i$, получаем требуемую форму как $V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ x] = [F_i(\neq s) \circ x] \circ (is) \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i$.

II. $x = t_{rj}(\alpha)$, $s = i$. Здесь рассматриваемое слово имеет вид $V = F_i \circ t_{rj}(\alpha)$, и для него возможны следующие подслучаи.

a) $r = i$. Если $j < i$, то в силу леммы 1 $V \tilde{\to} t_{ij}(\overset{\frown}{\alpha}) \circ \widetilde{F}_i \tilde{\to} \widetilde{F}_i$. При $j > i$, применяя лемму 1 и 3a), будем иметь $V \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq j) \circ [t_{ij}(*) \circ t_{ij}(\alpha)] = \widetilde{F}_i(\neq j) \circ t_{ij}(*) = \widetilde{F}_i$.

b) $r > i \neq j$. Здесь, используя лемму 1, 3b) и (уже разобранный) п. I, находим

$$V \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r) \circ [t_{ir}(*) \circ t_{rj}(\alpha)] = [\widetilde{F}_i(\neq r) \circ d_r(\cdot)] \circ t_{ij}(*) \circ t_{rj}(\overset{\frown}{\alpha}) \circ t_{ir}(*) \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r) \circ t_{ij}(*) \circ t_{rj}(\overset{\frown}{\alpha}) \circ t_{ir}(*).$$

Если в этой записи $j > i$, то применением п. IIa), (16), 3a) и леммы 2 преобразования продолжаются следующим образом:

$$V \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r, j) \circ [t_{ij}(*) \circ t_{rj}(\overset{\frown}{\alpha})] \circ t_{ir}(*) = [\widetilde{F}_i(\neq r, j) \circ t_{rj}(\overset{\frown}{\alpha})] \circ t_{ij}(*) \circ t_{ir}(*) \tilde{\to}$$
$$\tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r, j) \circ [t_{ij}(\cdot) \circ t_{ij}(*)] \circ t_{ir}(*) = \widetilde{F}_i(\neq r, j) \circ t_{ij}(*) \circ t_{ir}(*) = \widetilde{F}_i,$$

т. е. получаем требуемую форму.

Если же $j < i$, то, используя п. IIa), будем иметь $V \tilde{\to} [\widetilde{F}_i(\neq r) \circ t_{ij}(*)] \circ t_{rj}(\overset{\frown}{\alpha}) \circ t_{ir}(*) \tilde{\to} [\widetilde{F}_i(\neq r) \circ t_{rj}(\overset{\frown}{\alpha})] \circ t_{ir}(*) \tilde{\to} \cdots \tilde{\to} t_{rj}(\overset{\frown}{\alpha}) \circ \widetilde{F}_i \tilde{\to} \widetilde{F}_i$.

c) $r > i = j$. В этом случае, применяя леммы 1, 2, п. I, а также соотношение 4, найдем

$$V \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r) \circ [t_{ir}(*) \circ t_{ri}(*)] = [\widetilde{F}_i(\neq r) \circ d_{ir}(*, *)] \circ t_{ri}(*) \circ \begin{bmatrix} t_{ir}(*) \\ (ir) \end{bmatrix} \tilde{\to}$$
$$\tilde{\to} [\widetilde{F}_i(\neq r) \circ t_{ri}(*)] \circ \begin{bmatrix} t_{ir}(*) \\ (ir) \end{bmatrix} \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r) \circ \begin{bmatrix} t_{ir}(*) \\ (ir) \end{bmatrix} = \widetilde{f}_i$$

(напомним, что $d_{ir}(*, *)$ означает некоторое слово вида $d_i(*) \circ d_r(*)$).

d) $r < i$. По условию теоремы этот случай рассматривается только при $j < r$, и здесь из леммы 2, п. IIa) получается нужная форма $V = F_i \circ t_{rj}(\alpha) = F_i(\neq r, j) \circ t_{rj}(\alpha) \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r, j) \circ t_{ij}(\cdot) \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq r, j) = \widetilde{F}_i$.

III. $x = t_{rj}(\alpha)$, $s > i$. В этом случае рассматриваемое слово примет вид $V = F_i(\neq s) \circ (is) \circ t_{rj}(\alpha)$. Здесь возможны такие подслучаи.

a) $\{i, s\} = \{r, j\}$. Если $r = i (\to j = s)$, то, применяя разложение (9), п. I, а также лемму 3, будем иметь $V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ t_{is}(\alpha)] = [F_i(\neq s) \circ d_{is}(*, *)] \circ t_{si}(*) \circ (is) \tilde{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{si}(*)] \circ (is) \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i$. Если же $r = s (\to j = i)$, то разложение (10), п. I и лемма 3 требуемую форму дают в виде

$$V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ t_{si}(\alpha)] = [F_i(\neq s) \circ d_{is}(*, *)] \circ t_{si}(*) \circ \begin{bmatrix} t_{is}(*) \\ (is) \end{bmatrix} \tilde{\to}$$
$$\tilde{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{si}(*)] \circ \begin{bmatrix} t_{is}(*) \\ (is) \end{bmatrix} \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ \begin{bmatrix} t_{is}(*) \\ (is) \end{bmatrix} = \widetilde{f}_i.$$

b) множества $\{i, s\}$ и $\{r, j\}$ пересекаются по одному элементу. Если $r = i (\to j \neq s)$, то применение разложения (11), пп. I, IIb), IIa) дает

$$V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ t_{ij}(\alpha)] = [F_i(\neq s) \circ d_{is}(\cdot, \cdot)] \circ t_{sj}(*) \circ t_{ij}(\cdot) \circ (is) \tilde{\to}$$
$$\tilde{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{sj}(*)] \circ t_{ij}(\cdot) \circ (is) \tilde{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{ij}(\cdot)] \circ (is) \tilde{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i.$$

Если же $r = s(\to j \neq i)$, то, используя разложение (12), пп. I, IIa), IIb), будем иметь

$$V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ t_{sj}(\alpha)] = [F_i(\neq s) \circ d_{is}(\cdot,\cdot)] \circ t_{ij}(*) \circ t_{sj}(\cdot) \circ (is) \overset{\sim}{\to}$$
$$\overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{ij}(*)] \circ t_{sj}(\cdot) \circ (is) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{sj}(\cdot)] \circ (is) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i.$$

Пусть $j = i(\to r \neq s)$. Применяя разложение (13), разобранные пп. I, IIb), IIc) и лемму 1, находим

$$V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ t_{ri}(\alpha)] = [F_i(\neq s) \circ d_{is}(\cdot,\cdot)] \circ t_{rs}(*) \circ t_{ri}(\cdot)(is) \overset{\sim}{\to}$$
$$\overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{rs}(*)] \circ t_{ri}(\cdot) \circ (is) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i \circ t_{ri}(\cdot)] \circ (is) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i \circ (is) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{is}(\beta) \circ (is).$$

Если в полученной записи $\beta = 0$, то требуемая форма уже получена. В противном случае применение разложения $t_{is}(\beta) \circ (is) = d_{is}(*,*) \circ (is) \circ t_{si}(*)$ (оно следует из (9) взятием квазиобратного от обеих частей и последующего применения 2) и пп. I, IIIa) дает

$$V \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ d_{is}(*,*)] \circ (is) \circ t_{si}(*) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is)] \circ t_{si}(*) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ \begin{bmatrix} t_{is}(*) \\ (is) \end{bmatrix} = \widetilde{f}_i.$$

Осталось разобрать случай, когда $j = s(\to r \neq i)$. Здесь на соответствующих местах, используя разложение (14), пп. I, IIb), IIc) и соотношение 3d), будем иметь

$$V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ t_{rs}(\alpha)] = [F_i(\neq s) \circ d_{is}(\cdot,\cdot)] \circ [t_{ri}(*) \circ t_{rs}(\cdot)] \circ (is) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{rs}(\cdot)] \circ$$
$$\circ\, t_{ri}(*) \circ (is) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{ri}(*)] \circ (is) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s, r) \circ \begin{bmatrix} t_{ir}(*) \\ (ir) \end{bmatrix} \circ (is).$$

В первом случае снова имеем требуемую форму $V \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s, r) \circ t_{ir}(*)] \circ (is) = \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i$. Второй случай приведет к

$$V \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s, r) \circ (ir) \circ (is).$$

Покажем, что последнее преобразование можно продолжить как $V \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq r) \circ (ir) = \widetilde{f}_i$. Действительно, если матрица (is) имеет вид $(i < s)$, то, используя результаты (разобранных) случаев $j = i(\to r \neq s)$ и $r = i(\to j \neq s)$, из IIIb) приходим к $V \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s, r) \circ (ir) \circ t_{si}(\pi)] \circ t_{is}(\chi) \circ t_{si}(\eta) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s, r) \circ (ir) \circ t_{is}(\chi)] \circ t_{si}(\eta) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s, r) \circ (ir) \circ t_{si}(\eta) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s, r) \circ (ir) = \widetilde{f}_i$. Случай, когда (is) имеет вид $(s > i)$, точно так же приводит к $V \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq r) \circ (ir) = \widetilde{f}_i$.

c) $\{i, s\} \cap \{r, j\} = \emptyset$. Используя разложение (15), п. I и соответствующие случаи из п. II, будем иметь

$$V = F_i(\neq s) \circ [(is) \circ t_{rj}(\alpha)] = [F_i(\neq s) \circ d_{is}(\cdot,\cdot)] \circ t_{rj}(*) \circ t_{ri}(\cdot) \circ t_{rs}(\cdot) \circ t_{sj}(\cdot) \circ t_{ij}(\cdot) \circ (is) \overset{\sim}{\to}$$
$$\overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{rj}(*)] \circ t_{ri}(\cdot) \circ t_{rs}(\cdot) \circ t_{sj}(\cdot) \circ t_{ij}(\cdot) \circ (is) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{ri}(\cdot)] \circ t_{rs}(\cdot) \circ t_{sj}(\cdot) \circ t_{ij}(\cdot) \circ$$
$$\circ\, (is) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{rs}(\cdot)] \circ t_{sj}(\cdot) \circ t_{ij}(\cdot) \circ (is) \overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{sj}(\cdot)] \circ t_{ij}(\cdot) \circ (is) \overset{\sim}{\to}$$
$$\overset{\sim}{\to} [\widetilde{F}_i(\neq s) \circ t_{ij}(\cdot)] \circ (is) \overset{\sim}{\to} \widetilde{F}_i(\neq s) \circ (is) = \widetilde{f}_i.$$

Итак, во всех случаях преобразование $(\overset{i}{\overset{\sim}{\to}})$ при помощи соотношений 1–6 действительно выполняется. □

7. Представимость в стандартном виде

Предложенный здесь метод использует стандартные (канонические) формы элементов группы $GL^\circ(n, \Lambda)$. Их введем следующим образом. Для индексов i, $1 \leq i < mn$, наряду с формами f_i рассмотрим *вертикальные формы* $g_i = \prod_{q \in P_i} t_{qi}(\beta_q)$ (ступени i). В качестве *стандартных форм* в $GL^\circ(n, \Lambda)$ объявляем всевозможные комбинации алфавита (5) вида

$$g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_{mn-1} \circ d_1(\varepsilon_1) \circ d_2(\varepsilon_2) \circ \cdots \circ d_{mn}(\varepsilon_{mn}) \circ f_{mn-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1. \qquad (sf)$$

Очевидно, представление матриц из $GL^\circ(n,\Lambda)$ в виде (sf) (вообще говоря) не однозначно. В этом пункте покажем, что всякое слово алфавита (5) можно преобразовать к стандартному виду (sf), используя соотношения 1–6.

Рассмотрим сначала подалфавит

$$t_{ij}(\alpha),\quad \alpha\in\Lambda_{r(i),r(j)},\quad 1\le j<i\le mn,\quad i\sim j;\quad d_k(\varepsilon),\quad \varepsilon\in\Lambda_k^\circ,\quad 1\le k\le mn,$$

алфавита (5). В этом подалфавите вводим отношения $\underset{i}{\overset{\sim}{\to}}$, $1\le i<mn$: $W\underset{i}{\overset{\sim}{\to}}V$ тогда и только тогда, когда эти слова связаны соотношением $W=V\circ Y$, где Y — некоторое слово, не содержащее недиагональные квазитрансвекции вида $t_{pq}(\alpha)$, $p>q$, $q\le i$. Отношения $\underset{i}{\overset{\sim}{\to}}$ также являются рефлексивными и транзитивными.

Дальнейшие рассуждения используют преобразования

$$t_{rj}(\alpha)\circ g_i(\ne j,r)\underset{i}{\overset{\sim}{\to}}t_{ri}(\cdot)\circ\widetilde{g}_i(\ne j,r),\quad r>j>i, \tag{$r>j>i$}$$

где $\widetilde{g}_i(\ne j,r)$ — некоторая вертикальная форма ступени i (это преобразование следует из 3c), 3a), 3d) и 5, 2, (16)) и

$$t_{rj}(\alpha)\circ g_i(\ne j)\underset{i}{\overset{\sim}{\to}}\widetilde{g}_i(\ne j),\quad r>j>i \tag{19}$$

($\widetilde{g}_i(\ne j)$ — также некоторая вертикальная форма ступени i, это преобразование следует из 3c), 3d), 3a), (16) и преобразования $(r>j>i)$). Преобразование $(r>j>i)$, как в лемме 2, обосновывается индукцией по числу $I\ (g_i(\ne j,r))$ и применением указанных там соотношений. Преобразование же (19) легко следует из $(r>j>i)$ и отмеченных соотношений левыми рассуждениями из леммы 3. Эти повторяющиеся (дуальные) подробности опускаем.

Теорема 2. *Пусть задана вертикальная форма* $g_i=\prod\limits_{q\in P_i}t_{qi}(\beta_q)$ *ступени* i, $1\le i<mn$, y *означает либо диагональную букву* $d_k(\varepsilon)$, *либо же недиагональную квазитрансвекцию* $t_{rj}(\alpha)$, $r>j\ge i$. *Тогда для них, применяя соотношения* 2, (16), 3a), 3b), 5 *и* (19), *можно выполнить преобразование*

$$V=y\circ g_i\underset{i}{\overset{\sim}{\to}}\widetilde{g}_i, \tag{$\underset{i}{\overset{\sim}{\to}}$}$$

где $\widetilde{g}_i$ *— некоторая вертикальная форма ступени* i.

Доказательство. Здесь, понимая под $\overset{\sim}{\to}$ отношения $\underset{i}{\overset{\sim}{\to}}$, возможны следующие случаи.

a) Если y диагональна, то преобразование $(\underset{i}{\overset{\sim}{\to}})$ осуществляется при помощи соотношения 2.

b) $y=t_{rj}(\alpha)$, $j=i$. Используя соотношения (структурной) перестановочности (16) и 3a), требуемую форму получаем в виде $V=[t_{ri}(\alpha)\circ t_{ri}(\overbrace{\ \beta_r\ })]\circ\widetilde{g}_i(\ne r)=t_{ri}(*)\circ\widetilde{g}_i(\ne r)=\widetilde{g}_i$.

c) $y=t_{ri}(\alpha)$, $j>i$. В этом случае применение соотношений (16), 3b), 2, преобразования (19), а также разобранного в п. b) даст

$$\begin{aligned}V=[t_{rj}(\alpha)\circ t_{ji}(\overbrace{\ \beta_j\ })]\circ\widetilde{g}_i(\ne j)=d_j(\cdot)\circ[t_{ri}(\overbrace{\alpha\beta_j})\circ t_{ji}(\overbrace{\ \beta_j\ })\circ t_{rj}(\overbrace{\ \alpha\ })\circ\widetilde{g}_i(\ne j)]\overset{\sim}{\to}t_{ri}(\overbrace{\alpha\beta_j})\circ\\ \circ t_{ji}(\overbrace{\ \beta_j\ })\circ[t_{rj}(\overbrace{\ \alpha\ })\circ\widetilde{g}_i(\ne j)]\overset{\sim}{\to}t_{ri}(\overbrace{\alpha\beta_j})\circ[t_{ji}(\overbrace{\ \beta_j\ })\circ\widetilde{g}_i(\ne j)]=t_{ri}(\overbrace{\alpha\beta_j})\circ\widetilde{g}_i=\widetilde{g}_j.\quad\square\end{aligned}$$

Переходим к вопросу о стандартном строении элементов группы $GL^\circ(n,\Lambda)$. Пусть $s(W)$ означает одну (не важно какую) из стандартных форм слова W алфавита (5).

Теорема 3. *Всякое слово* W *алфавита* (5) *применением соотношений* 1–6 *можно привести к стандартному виду* $s(W)$.

Доказательство. Не теряя общности, заданное слово можно считать представленным в виде

$$W \overset{1}{\tilde{\to}} f_1 \circ X,$$

где f_1 — некоторая (горизонтальная) форма ступени 1, а X — соответствующее ей дополнение. Пусть $X = x \circ \widetilde{X}$, т. е. x — первая ненулевая буква дополнения X. Применение к стыку $f_1 \circ x$ трансформационной теоремы 1 приводит к $W \overset{1}{\tilde{\to}} f_1 \circ \widetilde{X}$, т. е. этой операцией сокращена длина дополнения X. Произведя эти сокращения несколько раз, приходим к записи $W \overset{1}{\tilde{\to}} f_1$, т. е. к представлению вида

$$W = X_1 \circ f_1,$$

где согласно определению $\overset{1}{\tilde{\to}}$ X_1 не содержит недиагональные буквы $t_{1k}(\alpha)$, $k > 1$. Поступая точно таким же образом с сомножителем X_1, из него выделяем форму f_2 (ступени 2):

$$W = X_2 \circ f_2 \circ f_1,$$

где X_2 — некоторое слово, не содержащее недиагональные квазитрансвекции вида $t_{kr}(\alpha)$, $k < r$, $k \leq 2$ и т. д. Описанный процесс отщепления форм на $(mn-1)$-м шаге дает

$$W = X_{mn-1} \circ f_{mn-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1,$$

где сомножитель X_{mn-1} состоит только из диагональных букв и квазитрансвекции вида $t_{rk}(\alpha)$, $r > k$.

Разложим далее слово X_{mn-1} на сомножители. Не умаляя общности его можно считать представленным как

$$X_{mn-1} \underset{1}{\tilde{\to}} Y \circ g_1,$$

где g_1 — некоторая вертикальная форма ступени 1, а Y — соответствующее ей дополнение. Пусть $Y = \widetilde{Y} \circ y$ (т. е. y — последняя ненулевая буква Y). Применяя к стыку $y \circ g_1$ теорему 2, будем иметь $X_{mn-1} \underset{1}{\tilde{\to}} \widetilde{Y} \circ (y \circ g_1) \underset{1}{\tilde{\to}} \widetilde{Y} \circ g_1$, т. е. этим действием добиваемся уменьшения длины дополнения Y. Продолжая это сокращение, через конечное число шагов приходим к записи $X_{mn-1} \underset{1}{\tilde{\to}} g_1$. А это по определению $\underset{1}{\tilde{\to}}$ означает, что $X_{mn-1} = g_1 \circ Y_1$, где Y_1 — некоторое слово, не содержащее недиагональные квазитрансвекции вида $t_{r1}(\alpha)$, $r > 1$. Применяя к дополнению Y_1 описанную процедуру еще раз, выделяем из него форму g_2, т. е. будем иметь $X_{mn-1} = g_1 \circ g_2 \circ Y_2$, где Y_2 не содержит недиагональные квазитрансвекции вида $t_{rk}(\alpha)$, $r > k$, $k \leq 2$, и т. д. Описанный процесс отщепления форм на $(mn-1)$-м шаге приведет к $X_{mn-1} = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_{mn-1} \circ D$, где слово D уже состоит только из диагональных букв. Оно соотношениями 1 легко представляется в виде $d_1(\varepsilon_1) \circ d_2(\varepsilon_2) \circ \cdots \circ d_{mn}(\varepsilon_{mn})$.

Таким образом, применение соотношений 1–6 к заданному слову W (в надлежащем порядке) действительно приводит его к виду $W = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_{mn-1} \circ D \circ f_{mn-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 = s(W)$, где $D = d_1(\varepsilon_1) \circ d_2(\varepsilon_2) \circ \cdots \circ d_{mn}(\varepsilon_{mn})$. $\square$

8. Основной результат

Матрицу $a = (a_{ij})$ из $M(n, \Lambda)$ назовем *радикальной*, если для нее $a_{ij} \in J$ при всех i, j. Очевидно, символ (is) будет радикальным в том и только том случае, когда $s = i$. Далее, стандартное представление $s(W)$ будем называть *радикальным*, если радикальны все его буквы. Стандартные же записи вида

$$\boldsymbol{g}_1 \circ \boldsymbol{g}_2 \circ \cdots \circ \boldsymbol{g}_{n-1} \circ d_m(\varepsilon_1) \circ \cdots \circ d_{mn}(\varepsilon_n) \circ \boldsymbol{F}_{n-1} \circ \cdots \circ \boldsymbol{F}_2 \circ \boldsymbol{F}_1,$$

где $\boldsymbol{g}_k = t_{(k+1)m,km}(*_{k+1}) \circ \cdots \circ t_{nm,km}(*_n)$, $\boldsymbol{F}_k = t_{km,(k+1)m}(*_{k+1}) \circ \cdots \circ t_{km,nm}(*_n)$, $\varepsilon_k \in \Lambda_k^\circ$, $k = 1, \ldots, n-1$, назовем *приведенными* стандартными формами. Ниже $s^*(W)$ будет означать приведенную стандартную форму слова W (допускающего такую запись).

Лемма 4. *Пусть заданы расширенные треугольные матрицы $x = (x_{ij})_{i\geq j}$ и $y = (y_{ij})_{i<j}$ из $M(n,\Lambda)$. Тогда для них*

$$x \circ y \equiv 0 \to x \equiv y \equiv 0$$

(*здесь $\equiv$ означает сравнение по модулю $M(n,J)$*).

Доказательство следует из последовательного рассмотрения столбцов матрицы $z = x \circ y$, элементы которой представляются формулами $z_{k1} \equiv x_{k1}$, $1 \leq k \leq mn$, $z_{ij} \equiv x_{ij} + \sum\limits_{1\leq k<j} x_{ik}y_{kj}$ при $1 < j \leq i$ и $z_{ij} \equiv y_{ij} + \sum\limits_{1\leq k\leq i} x_{ik}y_{kj}$ при $i < j$. $\square$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 4. *Обобщенная полная линейная группа $GL^{\circ}(n,\Lambda)$, $n \geq 2$, над полулокальным кольцом Λ в образующих* (5) *представляется соотношениями* 1–6.

Доказательство. Пусть $W = 0$ — произвольное соотношение группы $GL^{\circ}(n,\Lambda)$ в алфавите (5). Применяя к W теорему 3, представим его в виде

$$s(W) = g_1 \circ \cdots \circ g_{mn-1} \circ D \circ f_{mn-1} \circ \cdots \circ f_1 = 0, \tag{20}$$

где $D = d_1(\varepsilon_1) \circ \cdots \circ d_{mn}(\varepsilon_{mn})$ — некоторое диагональное слово.

Покажем, что равенство (20) возможно только при условии радикальности формы $s(W)$. Применение к (треугольным) сомножителям $x = g_1 \circ \cdots \circ g_{mn-1} \circ D$ и $y = f_{mn-1} \circ \cdots \circ f_1$ леммы 4 дает $g_1 \circ \cdots \circ g_{mn-1} \circ D \equiv f_{mn-1} \circ \cdots \circ f_1 \equiv 0$.

Займемся сначала первым из этих сравнений. Пусть $g_i = \prod\limits_{q\in P_i} t_{qi}(\beta_{qi})$ и $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{mn})$ — его диагональный сомножитель в расширенной форме. Легко проверить, что элементы матрицы $x = (x_{ij})$ вычисляются по формулам $x_{kk} = \widehat{\mu_k}$ и $x_{qi} = \widehat{\beta_{qi}} + \widehat{\beta_{qi}}\,\widehat{\mu_i}$ ($1 \leq k \leq mn$, $1 \leq i < q \leq mn$). Последнее ввиду $x \equiv 0$ возможно только при $\mu_k \equiv \beta_{qi} \equiv 0$ (k, q, i пробегают указанные значения). Сравнения $\mu_k \equiv 0$ в свою очередь влекут за собой $\varepsilon_k \equiv 0$, $1 \leq k \leq mn$.

Переходим теперь к сомножителю $y = f_{mn-1} \circ \cdots \circ f_1 \equiv 0$. Поскольку здесь первые строки y и сомножителя f_1 сравнимы, имеем $f_1 \equiv 0$. Сокращение обеих частей $y \equiv 0$ (справа) на f_1 даст $f_{mn-1} \circ \cdots \circ f_2 \equiv 0$, что аналогичным образом влечет за собой $f_2 \equiv 0$ и т. д. На $(mn-2)$-м шаге приходим к $f_{mn-2} \equiv f_{mn-1} \equiv 0$. Пусть теперь $f_i = F_i \circ (is)$ $(1 \leq i < mn)$ — произвольный сомножитель из y. Если допустить, что $s > i$, то это будет означать сравнимость позиции $\langle i, i\rangle$ формы y с элементом $-e_i$. Полученное противоречие показывает, что y свои сомножители f_i может содержать только в виде $f_i = F_i = \prod\limits_{q\in P_i} t_{iq}(\alpha_{iq})$. Отсюда уже очевидным образом следуют сравнения $\alpha_{iq} \equiv y_{iq} \equiv 0$ при всех $1 \leq i < q \leq mn$. Итак, соотношение (20) возможно только тогда, когда оно имеет вид

$$s(W) = g_1 \circ \cdots \circ g_{mn-1} \circ D \circ F_{mn-1} \circ \cdots \circ F_1 = 0 \tag{21}$$

и когда $s(W)$ радикальна.

Покажем, что форму $s(W)$ из (21) (при помощи соотношений 1–5) можно преобразовать к приведенному виду. Рассмотрим для произвольного k, $1 \leq k < n$, отрезок $\widetilde{\boldsymbol{F}}_k = F_{km} \circ F_{km-1} \circ \cdots \circ F_{(k-1)m+1}$ из (21). Пусть F_i — произвольный сомножитель $\widetilde{\boldsymbol{F}}_k$ и $q \in P_i$. Произведя замены $t_{iq}(\alpha_{iq}) = d_k(\alpha_{iq})$ при $p(q) = k$ и $t_{iq}(\alpha_{iq}) = t_{mk,mp(q)}(\alpha_{iq})$ в случае $p(q) > k$ (ввиду сотношения 5), применяя затем 1 и 3а), представим его в виде $F_i = d_{km}(*) \circ t_{km,(k+1)m}(*) \circ \cdots \circ t_{km,nm}(*)$. Подставляя эти выражения в $\widetilde{\boldsymbol{F}}_k$ и собирая их при помощи соотношения перестановочности $t_{km,rm}(\alpha) \circ t_{km,sm}(\beta) = t_{km,sm}(\beta) \circ t_{km,rm}(\alpha)$, $r \neq s$ (оно следует из 3с)), и 3а), 2, 1, для этого отрезка получаем представление

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}_k = d_{km}(*_k) \circ t_{km,(k+1)m}(*_{k+1}) \circ \cdots \circ t_{km,nm}(*_n) = d_{km}(*_k) \circ \boldsymbol{F}_k.$$

А что касается неполного отрезка $F_{mn-1}\circ F_{mn-2}\circ\cdots\circ F_{(n-1)m+1}$ из (21), то он соотношениями 5 и 1а) записывается в виде $d_{mn}(*)$. Аналогично доказываются и представления

$$\widetilde{\boldsymbol{g}}_k=g_{(k-1)m+1}\circ\cdots\circ g_{km}=\boldsymbol{g}_k\circ d_{km}(*_k)\quad(1\le k<n),\qquad g_{(n-1)m+1}\circ\cdots\circ g_{nm-1}=d_{mn}(*)$$

при помощи соотношений 1, 2, 3а), 3с), 5. Подставляя найденные выражения в (21) и применяя 1, 2, действительно приходим к

$$s^*(W)=\boldsymbol{g}_1\circ\cdots\circ\boldsymbol{g}_{n-1}\circ\boldsymbol{D}_1\circ\boldsymbol{F}_{n-1}\circ\cdots\circ\boldsymbol{F}_1=0,\tag{22}$$

где $\boldsymbol{D}_1=d_m(\varepsilon_1)\circ d_{2m}(\varepsilon_2)\circ\cdots\circ d_{nm}(\varepsilon_n)$.

При истолковании $s^*(W)$ из (22) как нерасширенной (т.е. обычной) матрицы из $GL^\circ(n,\Lambda)$ ее первой строкой будет

$$\langle\varepsilon_1,*_2+\varepsilon_1*_2,\ldots,*_n+\varepsilon_1*_n\rangle,$$

и она равна нулю. Отсюда получаем $\varepsilon_1=*_2=\cdots=*_n=0$. Аналогичные рассуждения относительно первого столбца $s^*(W)$ показывают на равенство нулю и всех аргументов формы $\boldsymbol{g}_1$. Тогда (22) примет вид

$$s^*(W)=\boldsymbol{g}_2\circ\cdots\circ\boldsymbol{g}_{n-1}\circ\boldsymbol{D}_2\circ\boldsymbol{F}_{n-1}\circ\cdots\circ\boldsymbol{F}_2=0,$$

где $\boldsymbol{D}_2=d_{2m}(\varepsilon_2)\circ\cdots\circ d_{nm}(\varepsilon_n)$. Отсюда точно таким же образом получаем равенство нулю всех аргументов форм $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{F}_2$ и $\varepsilon_2=0$ и т.д. Описанный процесс аннуляции на $(n-1)$-м шаге даст равенство нулю также аргументов форм $\boldsymbol{g}_{n-1}$, $\boldsymbol{F}_{n-1}$ и $\varepsilon_{n-1}=\varepsilon_n=0$.

Итак, равенство (22) возможно только в том случае, когда его форма $s^*(W)$ грамматически нулевая. Это и означает выводимость заданного соотношения $W=0$ из соотношений 1–6. $\square$

Отметим, что в процессе доказательства основной теоремы 4 соотношения 6 были использованы только на тех номерах i, $1\le i<mn$, для которых $|\overline{\Lambda}_i|=2$ (т.е. тогда, когда среди тел вычетов кольца Λ встречается поле $GF(2)$ из двух элементов). Поэтому в случаях, когда $|\overline{\Lambda}_i|\ge 3$ при всех $1\le i\le m$, основной результат может быть сформулирован таким образом.

Теорема 5. *Обобщенная полная линейная группа $GL^\circ(n,\Lambda)$, $n\ge 2$, над полулокальным кольцом Λ, все тела вычетов которого содержат не менее трех элементов, в образующих* (5) *задается соотношениями* 1–5.

В заключение автор искренне благодарит Н.С. Романовского и В.Д. Мазурова за полезные обсуждения. Он выражает признательность также рецензенту за ценные рекомендации по устранению недостатков при изложении.

Литература

1. Сатаров Ж.С. *Образующие и определяющие соотношения обобщенной полной линейной группы над полулокальными кольцами без единицы.* I // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 10. – С. 59–67.

Ошский технологический университет (Кыргызстан)

Поступили
первый вариант 08.12.2003
окончательный вариант 02.08.2005