ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 6 (493)

УДК 519.172

*М.Б. АБРОСИМОВ*

# МИНИМАЛЬНЫЕ $k$-РАСШИРЕНИЯ ПРЕДПОЛНЫХ ГРАФОВ

## 1. Введение

*Неориентированным графом* (далее: графом) называется пара $G=(V,\alpha)$, где $\alpha$ — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин $V$. *Степенью вершины* $v$ в неориентированном графе будем называть число вершин, смежных с $v$, и обозначать $d(v)$. Набор чисел, являющихся степенями вершин графа $G$, называют *степенным множеством*, а вектор, составленный из степеней вершин графа в порядке убывания, — *вектором степеней*. Говорят, что граф является *реализацией* своего вектора степеней. Граф, являющийся единственной реализацией своего вектора степеней, называют *униграфом*. Граф, все вершины которого имеют одинаковую степень $p$, называют однородным или регулярным графом порядка $p$. Здесь и далее определения даются по [1].

*Подграфом графа* $G=(V,\alpha)$ называется пара $G'=(V',\alpha')$, где $V'\subseteq V$ и $\alpha'=(V'\times V')\cap\alpha$. *Вложением графа* $G_1=(V_1,\alpha_1)$ в граф $G_2=(V_2,\alpha_2)$ называется такое взаимно однозначное отображение $f:V_1\to V_2$, что для любых $u,v\in V_1$ выполняется условие $((u,v)\in\alpha_1)\Rightarrow((f(u),f(v))\in\alpha_2)$.

Назовем граф $G_3=(V_3,\alpha_3)$ *$k$-расширением графа* $G=(V,\alpha)$, если граф $G$ вложим в каждый подграф графа $G_3$, получающийся удалением любых его $k$ вершин и всех связанных с ними ребер. Граф $G_t=(V_t,a_t)$ называется *тривиальным $k$-расширением* графа $G=(V,a)$, если граф $G_t$ получается из графа $G$ добавлением $k$ вершин и соединением их со всеми вершинами графа $G$ и друг с другом, т.е. граф $G_t$ есть соединение графа $G$ и полного графа $K_k=(V_k,V_k\times V_k)$. Очевидно, тривиальное $k$-расширение графа является и его $k$-расширением, причем $|V_t|=|V|+k$.

Граф $G^*=(V^*,\alpha^*)$ называется *минимальным $k$-расширением* графа $G=(V,\alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) $G^*$ является $k$-расширением $G$;

2) $|V^*|=|V|+k$;

3) $\alpha^*$ имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Очевидны следующие утверждения.

**Лемма 1.** *Любое минимальное $k$-расширение связного графа не содержит вершин со степенью ниже $(k+1)$.*

**Лемма 2.** *Пусть наибольшая из степеней вершин графа $G$ есть $s$ и в точности $m$ вершин имеют такую степень, тогда минимальное $k$-расширение графа $G$ содержит, по крайней мере, $(k+m)$ вершин со степенью не ниже $s$.*

**Лемма 3.** *Если максимальная степень вершины графа $G$ есть $d$, то его минимальное $k$-расширение содержит не менее $kd$ дополнительных ребер.*

Задача определения минимального $k$-расширения графа в общем случае является NP-полной [2], поэтому представляет интерес поиск классов графов, для которых можно аналитически определить вид минимальных $k$-расширений. В [3] рассматривается граф как модель некоторой технической системы. Вершины графа — ее элементы, а ребра — связи между элементами системы. Отказ элемента системы рассматривается как удаление соответствующей элементу вершины и всех инцидентных ей ребер. При такой интерпретации минимальное $k$-расширение графа, моделирующего некоторую систему $\sum$, является моделью оптимальной $k$-отказоустойчивой реализации (О-$k$-ОУР) системы $\sum$. Хейз предложил О-$k$-ОУР для некоторых классов графов: для цепи, цикла и помеченного дерева. *Цепью* $P_n$ называется граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\}$; *циклом* $C_n$ — граф $G = (V, \alpha)$, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и $\alpha = \{(v_i, v_j) : |i - j| = 1\} \cup \{(v_1, v_n), (v_n, v_1)\}$; а *деревом* называется связный граф без циклов. В данной статье будут рассматриваться минимальные $k$-расширения (далее будем говорить: расширение, тривиальное расширение и минимальное расширение, имея в виду 1-расширение, тривиальное 1-расширение и минимальное 1-расширение соответственно) неориентированных графов без меток.

**Лемма 4.** *Однородный $n$-вершинный граф порядка $(n-2)$, где $n$ четное, является униграфом.*

**Доказательство.** Пусть $G$ — однородный $n$-вершинный граф порядка $(n-2)$, а $G'$ — дополнение $G$ до полного графа. Граф $G'$ является однородным $n$-вершинным порядка 1, его вектор степеней имеет вид $(1, 1, \ldots, 1)$. Очевидно, такой вектор степеней определяет униграф, а следовательно, униграфом является и граф $G$.

Обозначим однородный $n$-вершинный униграф степени $(n-2)$, $n$ четное, через $R_{n,n-2}$.

**Следствие 1.** Для $n = 2k+1$, $k \in N$, вектор степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2)$ определяет $n$-вершинный униграф.

**Следствие 2.** Любой $n$-вершинный граф при $n \geq 2$ со степенным множеством $(n-1, n-2)$ является униграфом.

## 2. Минимальные расширения предполных графов

**Определение 1.** В $n$-вершинном графе назовем *полной* вершину степени $(n-1)$. Граф, все вершины которого полные, называется *полным графом.* Назовем любой граф, имеющий полные вершины, *предполным.*

**Утверждение.** Число всех неизоморфных непомеченных $n$-вершинных предполных графов равно числу всех неизоморфных непомеченных $(n-1)$-вершинных графов.

**Доказательство.** Предполный граф содержит хотя бы одну полную вершину. Рассмотрим все неизоморфные $(n-1)$-вершинные графы. Каждому $(n-1)$-вершинному графу соответствует единственный с точностью до изоморфизма предполный граф, получающийся добавлением полной вершины. И наоборот, каждому предполному $n$-вершинному графу соответствует единственный с точностью до изоморфизма $(n-1)$-вершинный граф, получающийся удалением любой полной вершины. В силу установленного взаимно однозначного соответствия между всеми $(n-1)$-вершинными графами и $n$-вершинными предполными графами получаем доказываемое утверждение.

**Теорема 1.** *Относительно предполных графов справедливы следующие утверждения.*

1. *При четном $n$ любой $n$-вершинный предполный граф имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное расширение, являющееся тривиальным.*
2. *При нечетном $n$ осуществляются три варианта:*
   а) *при $n \geq 3$ существует один и только один $n$-вершинный предполный граф $G_{np1}$, для которого тривиальное 1-расширение не является минимальным, при этом граф $G_{np1}$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное расширение и оно содержит $(n-1)$ дополнительных ребер*;

б) *при $n \geq 5$ существует один и только один $n$-вершинный предполный граф $G_{np2}$, имеющий два неизоморфных минимальных расширения* (*одно из которых тривиальное*);

в) *любой другой $n$-вершинный предполный граф, кроме $G_{np1}$ и $G_{np2}$, имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное расширение, которое тривиально.*

**Доказательство.** Обозначим через $G$ предполный $n$-вершинный граф, а через $G^*$ — некоторое его минимальное расширение.

I. Пусть граф $G^*$ имеет хотя бы одну полную вершину, например $v$. Удаление такой вершины приводит к удалению $n$ ребер, следовательно, граф $G^*$ отличается от $G$ на $n$ ребер. Значит, $G^* - v$ изоморфен $G$. Следовательно, $G^*$ есть тривиальное минимальное расширение графа $G$. Таким образом, получаем, что если предполный граф $G$ имеет минимальное расширение $G^*$ с полной вершиной, то $G^*$ есть тривиальное расширение, причем других неизоморфных $G^*$ минимальных расширений с полными вершинами граф $G$ иметь не может.

II. Пусть $G^*$ не имеет полных вершин, тогда максимальная степень его вершин есть $(n-1)$. Пусть вершина $v$ графа $G^*$ имеет степень $(n-1)$. Вершина $v$ соединена со всеми вершинами $G^*$, кроме одной. Тогда в графе $G^* - v$ может быть единственная вершина степени $(n-1)$, а именно, вершина, не смежная с $v$. Обозначим ее через $u$. Итак, удаление одной из вершин минимального расширения $G^*$ предполного графа $G$ дает предполный граф с единственной полной вершиной. Вывод: если $G$ имеет минимальное расширение без полных вершин, то в $G$ есть только одна полная вершина. В графе $G^*$ несмежные вершины $u$ и $v$ смежны со всеми остальными вершинами, степени которых не выше $(n-1)$. Тогда удаление любой вершины $G^*$, кроме $u$ или $v$, например $u_1$, приведет к уменьшению степени вершин $u$ и $v$ в графе $G^* - u_1$ на единицу. Следовательно, в графе $G^*$ существует еще одна вершина степени $(n-1)$ — вершина, не смежная с $u_1$. Повторяя предыдущее рассуждение относительно этой вершины, получим, что степень $u_1$ тоже должна быть $(n-1)$. Однако мы произвольно выбрали вершину $u_1$. Значит, степень любой вершины графа $G^*$ есть $(n-1)$. Итак, граф $G$, про который известно, что он имеет только одну полную вершину, может иметь минимальное расширение без полных вершин, и если он имеет такое минимальное расширение, то им является однородный граф порядка $(n-1)$. При четном $n$ число $(n-1)(n+1)$ нечетно и в силу теоремы о необходимой четности суммы степеней вершин графа получаем, что при четном $n$ ни для какого предполного $n$-вершинного графа нельзя построить минимальное расширение без полных вершин, следовательно, единственное его минимальное расширение тривиально. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Итак, $n$ нечетное, вектор степеней графа $G^*$ есть $(n-1, \ldots, n-1)$ и в силу леммы 4 $G^*$ — униграф. Удаление любой его вершины дает граф с вектором степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2)$ и числом ребер, на $(n-1)$ меньшим, чем в $G^*$. С другой стороны, граф $G^*$ отличается от графа $G$ не менее, чем на $(n-1)$ (лемма 3), и не более, чем на $n$ ребер. Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Пусть $G$ отличается от $G^*$ на $(n-1)$ ребро. Тогда вектор степеней графа $G$ должен иметь вид $(n-1, n-2, \ldots, n-2)$. По следствию 1 из леммы 4 $G$ — униграф. Итак, если и существует предполный граф, имеющий минимальное расширение с числом дополнительных ребер, меньшим, чем у тривиального расширения, то этот граф имеет вектор степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2)$, а его минимальное расширение имеет $(n-1)$ дополнительное ребро и вектор степеней $(n-1, \ldots, n-1)$. Последний вектор степеней по лемме 4 определяет униграф, и удаление любой его вершины приводит к униграфу с вектором степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2)$. Следовательно, этот вектор степеней определяет граф $G_{p1}$, что доказывает утверждение 2а) теоремы.

2. Пусть $G$ отличается от $G^*$ на $n$ ребер. Тогда вектор степеней графа $G$ должен иметь вид $(n-1, n-2, \ldots, n-2, n-3, n-3)$ при $n > 3$ или $(n-1, n-2, \ldots, n-2, n-4)$ при $n > 4$. Удаление любой вершины графа $G^*$ дает граф $G_{np1}$. Следовательно, такой и только такой граф среди всех графов с рассматриваемыми векторами степеней, который вкладывается в граф $G_{np1}$, бу-

дет иметь $G^*$ своим минимальным расширением. Определим, сколько таких графов существует. Все вершины графа $G^*$ имеют степень $(n-1)$ и могут быть разбиты на пары несмежных вершин, смежных со всеми остальными. Удаление одной из вершин пары дает граф $G_{np1}$, в котором оставшаяся вершина пары является полной. Удаляя эту вершину, получаем однородный $(n-1)$-вершинный граф $G_1$ порядка $(n-3)$. Полную вершину можно добавить единственным способом, поэтому число неизоморфных графов с указанным вектором степеней, для которых $G^*$ является минимальным расширением, есть число неизоморфных графов, которые можно получить удалением одного ребра графа $G_1$, следовательно, необходимо определить, сколько неизоморфных графов можно получить удалением одного ребра графа $G_1$. Рассмотрим пары несмежных вершин. Удалим ребро, инцидентное одной из вершин некоторой пары. Очевидно, таким образом получим единственный с точностью до изоморфизма граф $G_{np2}$ с вектором степеней $(n-1, n-2, \ldots, n-2, n-3, n-3)$ (отсюда получается ограничение $n > 3$ в формулировке п. 2б) теоремы), для которого $G^*$ и будет являться расширением.

Это доказывает с учетом п. I утверждения 2б) и 2в) теоремы. □

**Замечание.** Из теоремы непосредственно следует алгоритм построения всех минимальных расширений для любого предполного графа. Определим его сложность. Пусть задан некоторый $n$-вершинный граф. Чтобы определить, является ли он предполным, требуется $O(n^2)$ действий. Далее для нечетного $n$ нужно определить, не является ли граф графом типа $G_{np1}$ или $G_{np2}$. Это потребует также порядка $O(n^2)$ действий. Таким образом, общая сложность алгоритма есть $O(n^2)$.

**Определение 2.** *Звездным графом* называется дерево с одной полной вершиной.

**Следствие 1.** Единственным с точностью до изоморфизма минимальным расширением звездного графа с числом вершин большим трех является его тривиальное расширение.

**Следствие 2.** Наименьший (по числу вершин и ребер) граф $G_{np1}$ из п. 2а) теоремы есть цепь $P_3$, а ее минимальное расширение — цикл $C_4$.

**Следствие 3.** Наименьший граф (по числу вершин и ребер) $G_{np2}$ п. 2б) теоремы — пятивершинный граф с вектором степеней $(4, 3, 3, 2, 2)$, который является униграфом.

**Следствие 4.** Граф $G_{np1}$ (при нечетном $n$) и полный граф — единственные $n$-вершинные предполные графы, минимальные расширения дополнений которых являются дополнениями их минимальных расширений, т. е. $(G^*_{np1})' = (G'_{np1})^*$.

**Доказательство.** Пусть $G$ — предполный граф, $G^*$ — его минимальное расширение, $G'$ — дополнение $G$, а $G'^*$ — минимальное расширение $G'$. Пусть число ребер графа $G$ равно $m$, тогда его дополнение содержит $\left(\frac{n(n-1)}{2} - m\right)$ ребер. Минимальное расширение графа $G$ отличается от $G$ либо на $(n-1)$, либо на $n$ ребер. Тогда число ребер графа $G^{*\prime}$ есть либо $\left(\frac{n(n+1)}{2} - m - (n-1)\right) = \left(\frac{n(n-1)}{2} - m + 1\right)$, либо $\left(\frac{n(n-1)}{2} - m\right)$. В первом случае минимальное расширение дополнения должно отличаться только на одно ребро, что возможно лишь для графа $G_{np1}$, т. к. любая его часть, отличная от него самого, содержит хотя бы одну вершину степени, большей единицы. Во втором случае минимальное расширение дополнения содержит столько же ребер, сколько и дополнение, что возможно только для нульграфа, который является дополнением полного графа.

## 3. Минимальные $k$-расширения предполных графов

**Лемма 5.** *Минимальное $k$-расширение любого предполного $n$-вершинного графа либо содержит полную вершину, либо не содержит вершин со степенью, более чем на единицу отличающейся от полной.*

**Доказательство.** Очевидно, минимальное $k$-расширение предполного графа может содержать полную вершину (напр., для полного графа). Пусть граф $G^*$ является минимальным $k$-расширением некоторого $n$-вершинного графа, причем наибольшая из степеней вершин есть $(n+k-2)$. Покажем, что в $G^*$ не может быть вершин со степенью ниже $(n+k-2)$.

Пусть это не так и степень одной из вершин графа $G^*$, например $v$, ниже $(n+k-2)$. В $G^*$ нет полных вершин, значит, в дополнении $G^{*\prime}$ графа $G^*$ нет изолированных вершин. Покажем, что каким бы ни был граф $G^*$, всегда можно выбрать $k$ вершин так, чтобы в получившемся после их удаления подграфе не было полной вершины, а следовательно, в соответствующем подграфе дополнения не было изолированных вершин.

Пусть $G^{*\prime}$ содержит $m$ компонент связности $S_1, \dots, S_m$ с числом вершин $n_1, \dots, n_m$. Число вершин в той компоненте, в которой находится вершина $v$, больше 2. Не ограничивая общности, будем считать, что это компонента $S_1$. Будем выбирать вершины по следующим правилам:

1. если существует $i = 2, \dots, m : n_i \leq k$, то удаляем все вершины компоненты $S_i$, $k := k - n_i$;
2. если существует $i = 2, \dots, m : n_i \geq 3$, то удаляем $\min\{n_i - 2, k\}$ вершин компоненты $S_i$ так, чтобы не нарушить ее связности, $k := \max\{k - (n_i - 2), 0\}$;
3. если $k = 0$, то ВЫХОД;
4. если была проведена редукция по одному из правил 1–2, то переход на шаг 1, иначе ВЫХОД.

Нетрудно видеть, что действия алгоритма не приводят к появлению изолированных вершин. Из алгоритма можно выйти в одном из двух случаев. Если выход произведен по условию $k = 0$, то удаленные на шаге 1 и 2 алгоритма $k$ вершин приводят к подграфу, который не является предполным, и получаем противоречие с предположением. Пусть оказалось, что нет компонент, для которых выполнялось бы одно из условий 1–2. Тогда либо $k = 1$, либо все компоненты, кроме $S_1$, удалены. Удаляем $k$ вершин компоненты $S_1$ так, чтобы не нарушить ее связности. В результате получаем подграф графа $G^{*\prime}$ без изолированных вершин, следовательно, соответствующий подграф графа $G^*$ не содержит полных, т. е. не является предполным графом, что противоречит предположению о том, что граф $G^*$ является минимальным $k$-расширением предполного графа. $\square$

**Следствие 1.** $(n+k)$-вершинный граф $G^*$ без полных вершин, но с вершиной, степень которой отличается от степени полной вершины более чем на единицу, не может являться $k$-расширением никакого предполного графа.

**Следствие 2.** Минимальное $k$-расширение любого предполного $n$-вершинного графа является либо предполным графом, либо однородным графом порядка $(n+k-2)$.

Очевидной является

**Лемма 6.** *Если минимальное $k$-расширение некоторого (не обязательно предполного) графа $G$ содержит полную вершину, то оно является тривиальным расширением некоторого минимального $(k-1)$-расширения графа $G$.*

**Лемма 7.** *Граф $G_{np2}$ не является минимальным $k$-расширением никакого предполного графа ни при каком натуральном $k$.*

**Доказательство.** Пусть $G_{np2}$ является минимальным $k$-расширением некоторого предполного графа $G$. Как было показано в лемме 5, минимальное $k$-расширение любого предполного графа либо содержит полную вершину и в силу леммы 6 является тривиальным расширением минимального $(k-1)$-расширения графа $G$, либо является однородным графом $R_{m,m-2}$. Граф $G_{np2}$ содержит единственную полную вершину, но подграф, получающийся после ее удаления, не является ни предполным, ни однородным.

**Лемма 8.** *Для четного $n$ однородный $n$-вершинный граф $R_{n,n-2}$ порядка $(n-2)$ имеет единственное минимальное расширение, являющееся тривиальным, причем это минимальное расширение есть граф $G_{(n+1)p1}$.*

**Доказательство.** Пусть $G^*$ — минимальное расширение графа $R_{n,n-2}$. Если в $G^*$ есть полная вершина, то $G^*$ является тривиальным расширением в силу леммы 6.

Пусть $G^*$ — некоторое минимальное расширение графа $R_{n,n-2}$ без полных вершин. Тогда степень любой вершины $G^*$ либо $(n-2)$, либо $(n-1)$, причем, т. к. $n$ четное, имеется хотя бы одна вершина степени $(n-2)$. Однако отказ любой смежной с ней вершины приведет к графу с вершиной степени $(n-3)$, что противоречит предположению о том, что граф $G^*$ является минимальным расширением графа $R_{n,n-2}$.

**Следствие.** Так как при четном $n$ граф $R^*_{n,n-2} = G_{(n+1)p1}$ и $G^*_{(n-1)p1} = R_{n,n-2}$, то

$$G^{*k}_{np1} = \begin{cases} G_{(n+k)p1} & \text{при } k \text{ четном,} \\ R_{n+k,n+k-2} & \text{при } k \text{ нечетном} \end{cases} \quad \text{и} \quad R^{*k}_{n,n-2} = \begin{cases} G_{(n+k)p1} & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ R_{n+k,n+k-2} & \text{при } k \text{ четном,} \end{cases}$$

где $G^*$ обозначает единственное минимальное расширение графа $G$, а $G^{*k}$ — единственное минимальное $k$-расширение графа $G$.

**Лемма 9.** *Минимальные $k$-расширения любого предполного графа при четном $k$ есть минимальные расширения всех его минимальных $(k-1)$-расширений, причем эти минимальные расширения единственны с точностью до изоморфизма и являются тривиальными расширениями.*

**Доказательство.** Пусть $G^{*k}$ – минимальное $k$-расширение $n$-вершинного предполного графа $G$. Если в $G^{*k}$ есть полная вершина, то доказательство того, что минимальное $k$-расширение есть тривиальное расширение минимального $(k-1)$-расширения, следует из леммы 6 и утверждений о минимальных $k$-расширениях графов $G_{np1}$ и $G_{np2}$.

Пусть в $G^{*k}$ нет полной вершины, тогда $G^{*k}$ в силу леммы 5 есть однородный $(n+k)$-вершинный граф порядка $(n+k-2)$. В силу теоремы о необходимой четности сумм степеней вершин любого графа и четности $k$ получаем, что $n$ тоже четно.

Все вершины графа $G^{*k}$ образуют пары, так что вершины одной пары несмежны друг с другом, но смежны со всеми остальными вершинами. Удалим $k/2$ таких пар вершин. Удаление одной пары вершин приводит к уменьшению степеней всех остальных вершин на два, следовательно, в результате получим однородный $n$-вершинный граф порядка $(n-2)$. Итак, один из подграфов графа $G^{*k}$, полученный удалением его $k$ вершин, не является предполным графом, и поэтому никакой предполный граф $G$ при четном $k$ не имеет минимальных $k$-расширений без полных вершин. Следовательно, любое минимальное $k$-расширение графа $G$ является тривиальным расширением его минимального $(k-1)$-расширения.

**Следствие.** Любой предполный граф при четном $k$ имеет столько же неизоморфных минимальных $k$-расширений, сколько и неизоморфных минимальных $(k-1)$-расширений.

**Лемма 10.** *Минимальное $k$-расширение любого предполного $n$-вершинного графа с четным числом вершин есть минимальное расширение его минимального $(k-1)$-расширения, причем оно единственно с точностью до изоморфизма и является тривиальным расширением.*

**Доказательство.** При четном $k$ утверждение теоремы есть следствие леммы 9. Пусть $k$ нечетно. Тогда число вершин минимального $k$-расширения нечетно, следовательно, не существует однородного $(n+k)$-вершинного графа порядка $(n+k-2)$, поэтому любое минимальное $k$-расширение графа из условия теоремы является тривиальным расширением его минимального $(k-1)$-расширения.

**Следствие.** Любой предполный граф с четным числом вершин при любом $k$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное $k$-расширение, которое является его тривиальным $k$-расширением.

**Доказательство.** При $k = 1$ минимальное расширение любого предполного графа $G$ с четным числом вершин в силу теоремы 1 есть тривиальное расширение. Утверждение следствия доказывается по индукции.

**Лемма 11.** *При нечетном $n$ для любого $n$-вершинного графа $G$, являющегося частью графа $G_{np1}$, существует нечетное число $k_1$ такое, что справедливы следующие утверждения*:

а) *для любого $k < k_1$ граф $G$ имеет единственное минимальное $k$-расширение, являющееся тривиальным $k$-расширением*;

б) *граф $G$ имеет два неизоморфных минимальных $k_1$-расширения*: *тривиальное $k_1$-расширение и граф $R_{n+k_1,n+k_1-2}$*;

в) *граф $G$ имеет два неизоморфных минимальных $(k_1+1)$-расширения, каждое из которых является тривиальным расширением одного из двух неизоморфных минимальных $k_1$-расширений*;

г) *для любого нечетного $k > k_1$ граф $G$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное $k$-расширение — однородный граф $R_{n+k,n+k-2}$*;

д) *для любого четного $k > k_1+1$ граф $G$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное $k$-расширение — тривиальное расширение графа $R_{n+k,n+k-2}$*.

**Доказательство.** Пусть $n$-вершинный граф $G$ с $m$ ребрами при нечетном $n$ является частью графа $G_{np1}$ и отличается от него на $m'$ ребер. Очевидно, минимальное $k$-расширение графа $G_{np1}$ является $k$-расширением графа $G$, и если оно не является минимальным $k$-расширением графа $G$, то таковым является тривиальное $k$-расширение графа $G$. Определим число ребер в минимальном $k$-расширении графа $G_{np1}$ и тривиальном $k$-расширении графа $G$.

Поскольку при четном $k$ всякое минимальное $k$-расширение предполного графа в силу леммы 9 всегда есть минимальное расширение всех его неизоморфных минимальных $(k-1)$-расширений, то достаточно рассмотреть нечетные значения $k$, доказав утверждения а), б) и г). Пункты в) и д) следуют из б) и г).

Минимальное $k$-расширение графа $G_{np1}$ при нечетном $k$ по следствию из леммы 8 есть граф $R_{n+k,n+k-2}$. Тогда число ребер минимального $k$-расширения графа $G_{np1}$ есть $(n+k)(n+k-2)/2$, а число ребер тривиального $k$-расширения графа $G$ есть $nk + (k-1)k/2 + m$, где $m = [(n-1)(n-2)+n-1]/2 - n - m' = (n^2-2n+1)/2 - m'$. Определим разность между числом ребер этих графов: $m' - \frac{k+1}{2}$. Приравнивая к нулю, находим $k_1 = 2m' - 1$. Таким образом, получаем, что при $k < k_1$ меньшее число ребер имеет тривиальное $k$-расширение графа $G$, при $k > k_1 + 1$ меньшее число ребер имеет минимальное $k$-расширение графа $G_{np1}$, а при $k = k_1$ и при $k = k_1+1$ число ребер в этих графах одинаково. □

**Следствие 1.** Для любого графа, являющегося частью графа $G_{np1}$, существует нечетное число $k$ такое, что граф $G$ имеет два неизоморфных минимальных $k$ и $(k+1)$-расширения, при всех остальных значениях $k$ граф $G$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное $k$-расширение.

**Следствие 2.** Для любого $k$ существуют предполные графы, имеющие ровно два неизоморфных минимальных $k$-расширения.

**Следствие 3.** Для любого $k$ и нечетного $n$ таких, что $n^2 - 4n + 2 \leq k$, всегда можно указать предполный граф, имеющий два неизоморфных минимальных $k$-расширения.

**Доказательство.** Из леммы 11 следует, что среди всех $n$-вершинных предполных графов только граф, являющийся частью графа $G_{np1}$, может иметь два неизоморфных минимальных $k$-расширения, причем только при $k = 2m' - 1$ и $k = 2m' + 1$, где $m'$ — разница в числе ребер графов $G$ и $G_{np1}$. Число ребер графа $G_{np1}$ есть $(n-1+(n-1)(n-3)/2)$. Максимальное значение $m'$ будет достигнуто, если $G$ — звездный граф, число ребер которого есть $(n-1)$. Тогда $0 \leq m' \leq (n-1)(n-3)/2$, откуда получаем неравенство, которому должны удовлетворять числа $n$ и $k$, чтобы можно было построить граф с требуемым свойством $k \leq (n-1)(n-3)-1$ или $n^2-4n+2 \leq k$.

**Теорема 2.** *Относительно предполных графов справедливы следующие утверждения.*

1. *При четном $n$ и любом натуральном $k$ каждый $n$-вершинный предполный граф имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное $k$-расширение, являющееся тривиальным $k$-расширением.*
2. *При нечетном $n$*
   а) *и при четном $k$ число минимальных $k$-расширений предполного графа в точности равно числу неизоморфных минимальных $(k-1)$-расширений, причем каждое из минимальных $k$-расширений есть тривиальное расширение минимального $(k-1)$-расширения;*
   б) *и при нечетном $k$*
      i) *если предполный граф $G$ является частью графа $G_{np1}$ и отличается от него на $m$ ребер, то при $k < 2m-1$ граф $G$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное $k$-расширение, являющееся тривиальным $k$-расширением; при $k = 2m-1$ граф $G$ имеет два с точностью до изоморфизма минимальных $k$-расширения: тривиальное $k$-расширение и граф $R_{n+k,n+k-2}$; при $k > 2m-1$ граф $G$ имеет единственное минимальное $k$-расширение — граф $R_{n+k,n+k-2}$;*
      ii) *любой другой предполный граф $G$ имеет единственное минимальное $k$-расширение, являющееся тривиальным $k$-расширением.*

**Доказательство.** Лемма 10 и следствие из нее дают доказательство утверждения 1. Лемма 9 и следствие из нее дают доказательство утверждения 2а). Лемма 11 доказывает утверждения i) п. 2б). Истинность утверждения ii) п. 2б) следует из того, что если предполный граф $G$ не является частью графа $G_{np1}$, то граф $R_{n+k,n+k-2}$ ни при каких $k$ не является его минимальным $k$-расширением, следовательно, любое его минимальное $k$-расширение содержит полную вершину, т. е. является тривиальным расширением его минимального $(k-1)$-расширения, а значит, оно является и тривиальным $k$-расширением, причем это минимальное $k$-расширение единственно с точностью до изоморфизма.

**Замечание.** Из теорем следует алгоритм построения всех минимальных $k$-расширений любого предполного графа. Оценим его сложность. Пусть $G$ — $n$-вершинный граф. При четном $n$ минимальное $k$-расширение есть тривиальное $k$-расширение, которое можно построить за $O(n^2+k^2)$ действий. Пусть $n$ нечетно. В этом случае требуется определить, является ли граф $G$ частью графа $G_{np1}$ или нет. Граф $G_{np1}$ имеет единственную полную вершину, удаление которой приводит к однородному подграфу $R_{n-1,n-3}$, следовательно, вложение возможно, только если граф $G$ также имеет единственную полную вершину. При этом граф $G$ будет частью графа $G_{np1}$ тогда и только тогда, когда его подграф $G_1$, получающийся из $G$ удалением полной вершины, является частью однородного графа $R_{n-1,n-3}$. Рассмотрим дополнения графов $G_1'$ и $R_{n-1,1}$ в форме $G_1$ и $R_{n-1,n-3}$ соответственно. Граф $G_1$ вложи́м в $R_{n-1,n-3}$ тогда и только тогда, когда $R_{n-1,1}$ вложи́м в $G_1'$. Очевидно, граф $R_{n-1,1}$ вложи́м в $G_1'$ тогда и только тогда, когда в графе $G_1'$ есть совершенное паросочетание. С помощью, например, алгоритма Эдмондса это можно проверить за $O(n^3)$ действий. Таким образом, общая сложность алгоритма построения минимальных $k$-расширений для $n$-вершинного предполного графа определяется сложностью алгоритма проверки наличия совершенного паросочетания в графе и составляет $O(n^3+k^2)$ при использовании для этой цели алгоритма Эдмондса. Более эффективные алгоритмы Карива и Бартника дадут оценку $O(n^{5/2}+k^2)$ [4].

**Следствие.** Число дополнительных ребер минимального $k$-расширения предполного графа $G$ есть $(nk+\frac{k(k-1)}{2})$, если граф $G$ не является частью графа $G_{np1}$, и $(nk+\frac{k(k-1)}{2}-\max(0,[\frac{k-2m}{2}]))$, если граф $G$ является частью графа $G_{np1}$ и отличается от него на $m$ ребер.

**Доказательство.** По теореме 2, если предполный $n$-вершинный граф $G$ не является частью графа $G_{np1}$, $G$ имеет единственное минимальное $k$-расширение — тривиальное $k$-расширение. Очевидно, тривиальное $k$-расширение является тривиальным расширением тривиального $(k-1)$-расширения. Поскольку каждое последующее тривиальное расширение получается добавлением одной полной вершины, то число дополнительных ребер в тривиальном $k$-расширении есть $\sum\limits_{i=1}^{k}(n+i-1)=nk+\frac{k(k-1)}{2}$.

Пусть предполный $n$-вершинный граф $G$ является частью графа $G_{np1}$ и отличается от него на $m$ ребер. Тогда по теореме 2 любое его минимальное $k$-расширение при $k<2m-1$ является тривиальным $k$-расширением и число ребер определяется по предыдущему случаю, т. е. $(nk+\frac{k(k-1)}{2})$. Очевидно, формула остается справедливой и при $k=2m-1$, хотя граф $G$ имеет уже два неизоморфных минимальных $k$-расширения. При $k\geq 2m$ в зависимости от четности или нечетности $k$ граф $G$ имеет минимальным $k$-расширением либо граф $G_{(n+k)p1}$, либо граф $R_{n+k,n+k-2}$. Можно заметить, что если тривиальное $k$-расширение отличается от тривиального $(k-1)$-расширения на $(n+k-1)$ ребро, т. е. при увеличении $k$ на единицу разница между ними увеличивается также на единицу, то при $k\geq 2m$ при увеличении $k$ на единицу число дополнительных ребер минимального $k$-расширения возрастает на единицу только при четном $k$ (см. п. 2а) теоремы 2). Значит, с каждым четным $k$ после $k=2m$ разница в числе ребер между минимальным $k$-расширением и тривиальным $k$-расширением графа $G$ увеличивается на единицу. Эту идею запишем в виде $(nk+\frac{k(k-1)}{2}-[\frac{k-2m}{2}])$. Объединяя случаи для $k<2m$ и $k\geq 2m$, получим искомую формулу. □

## Литература


1. Богомолов А.М., Салий В.Н. *Алгебраические основы теории дискретных систем.* – М.: Наука, 1997. – 368 с.
2. Каравай М.Ф. *Применение теории симметрии к анализу и синтезу отказоустойчивых систем* // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 6. – С. 159–173.
3. Hayes J.P. *A graph model for fault-tolerant computing system* // IEEE Trans. Comput. – 1976. – V. 25. – № 9. – P. 875–884.
4. Ловас Л., Пламмер М. *Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии.* – М.: Мир, 1998. – 654 с.



*Саратовский государственный университет*



*Поступили*
*первый вариант* 04.08.2000
*окончательный вариант* 22.05.2002