ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 1 (536)

УДК 517.946

А.Ш. ХИСМАТУЛЛИН

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО РОДА МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть E_2^+ — первый квадрант координатной плоскости Oxy, D^+ — конечная область в E_2^+, ограниченная кривой Γ^+ и отрезками Γ_1 и Γ_0 координатных осей Ox и Oy; $D_e^+ = E_2^+/\overline{D}^+$.

В [1] были изучены краевые задачи для вырождающегося B-эллиптического уравнения вида

$$L(u) = y^m B_x u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{L}$$

где $B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{x}\frac{\partial}{\partial x} = x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — оператор Бесселя, $m > 0$, $k > 0$ — постоянные. В данной работе изучаются основные краевые задачи для вырождающегося B-эллиптического уравнения вида

$$E_B(u) = B_x u + y^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{E_B}$$

где $m > 4$, $k > \frac{m}{m-2}$ — постоянные.

Для уравнений (L) и (E_B) $y = 0$ есть линия параболического вырождения. При $y > 0$ уравнения (L) и (E_B) принадлежат эллиптическому типу. Эллиптические уравнения, по одной из переменных которых действует оператор Бесселя, в [2] были названы B-эллиптическими уравнениями. Вырождающиеся B-эллиптические уравнения (L) и (E_B) отличаются тем, что линия параболического вырождения $y = 0$ для уравнения (L) не является характеристической линией, а для уравнения (E_B) она является характеристической линией. Уравнения (L) и (E_B) принято называть вырождающимися B-эллиптическими уравнениями первого и второго родов соответственно. Результаты данной работы могут найти приложение в теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений многих переменных и осесимметрических задач теории потенциала, применяемых при решении важных вопросов прикладного характера [3]–[7].

1. Фундаментальное решение

В характеристических координатах

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}$$

уравнение (E_B) приводится к уравнению

$$B_\xi u + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{m}{m-2}\eta^{-1}\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0. \tag{1.1}$$

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$u = \eta^{\frac{2}{2-m}} v, \tag{1.2}$$

где v — новая неизвестная. Подставляя эту функцию в уравнение (1.1), получаем относительно v следующее уравнение:

$$B_\xi v + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{m-4}{m-2}\eta^{-1}\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0. \tag{1.3}$$

Ясно, что при $m > 4$

$$0 < \frac{m-4}{m-2} < 1.$$

С помощью замены переменных по формулам $\widetilde{\xi} = \xi$, $\widetilde{\eta} = \left(\frac{(m-2)\eta}{2}\right)^{\frac{2}{m-2}}$ уравнение (1.3) приводится к виду

$$\widetilde{\eta}^{\mu} B_{\widetilde{\xi}} v + \frac{\partial^2 v}{\partial \widetilde{\eta}^2} = 0, \tag{1.4}$$

где $\mu = m - 4$.

Известно [1], что фундаментальное решение этого уравнения с особенностью в точке $(0, \widetilde{\eta}_0)$ имеет вид

$$q(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}, \widetilde{\eta}_0) = a(\widetilde{\rho}_1^2)^{-(\frac{k}{2}+\gamma)}(1-\widetilde{\tau})^{1-2\gamma}\Bigg[\widetilde{\tau}^{-\frac{k}{2}}\frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1+\frac{k}{2}-\gamma)}F\left(1-\gamma, 1-\frac{k}{2}-\gamma, 1-\frac{k}{2}; \widetilde{\tau}\right) +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(-\frac{k}{2})}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\frac{k}{2}-\gamma)}F\left(1-\gamma, 1+\frac{k}{2}-\gamma, 1+\frac{k}{2}; \widetilde{\tau}\right)\Bigg], \tag{1.5}$$

где a — некоторая постоянная, $F(a, b, c; \tau)$ — гипергеометрическая функция,

$$\widetilde{\tau} = \frac{\widetilde{\rho}^2}{\widetilde{\rho}_1^2}, \quad \gamma = \frac{m-4}{2(m-2)}, \quad \left.\begin{matrix}\widetilde{\rho}^2\\ \widetilde{\rho}_1^2\end{matrix}\right\} = \widetilde{\xi}^2 + \frac{4}{(m-2)^2}\left(\widetilde{\eta}^{\frac{m-2}{2}} \mp \widetilde{\eta}_0^{\frac{m-2}{2}}\right)^2. \tag{1.6}$$

Так как $0 \le \widetilde{\tau} \le 1$, то гипергеометрические функции определены для всех $\widetilde{\xi} \ge 0$ и $\widetilde{\eta} \ge 0$ и, следовательно, фундаментальное решение (1.5) в точке $(0, \widetilde{\eta}_0)$ имеет степенную особенность вида $\widetilde{\rho}^{-k}$.

Если в уравнении (1.4) и в формулах (1.5) и (1.6) перейдем к переменным ξ и η, то уравнение (1.4) перейдет в уравнение (1.3), формулы (1.5) и (1.6) перейдут соответственно в формулы

$$v(\xi, \eta; \eta_0) = a(r_1^2)^{-(\frac{k}{2}+\gamma)}(1-\tau)^{1-2\gamma}\Bigg[\tau^{-\frac{k}{2}}\frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1+\frac{k}{2}-\gamma)}F\left(1-\gamma, 1-\frac{k}{2}-\gamma, 1-\frac{k}{2}; \tau\right) +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(-\frac{k}{2})}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\frac{k}{2}-\gamma)}F\left(1-\gamma, 1+\frac{k}{2}-\gamma, 1+\frac{k}{2}; \tau\right)\Bigg], \tag{1.7}$$

где

$$\tau = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad \left.\begin{matrix}r^2\\ r_1^2\end{matrix}\right\} = \xi^2 + (\eta \mp \eta_0)^2.$$

Подставляя (1.7) в (1.2), получим фундаментальное решение уравнения (1.1) с особенностью в точке $(0, \eta_0)$, которое имеет вид

$$u(\xi, \eta; \eta_0) = a(\eta, \eta_0)^{\frac{2}{2-m}}(r_1^2)^{-(\frac{k}{2}+\gamma)}(1-\tau)^{1-2\gamma}\Bigg[\tau^{-\frac{k}{2}}\frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1+\frac{k}{2}-\gamma)} \times$$
$$\times F\left(1-\gamma, 1-\frac{k}{2}-\gamma, 1-\frac{k}{2}; \tau\right) + \frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(-\frac{k}{2})}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\frac{k}{2}-\gamma)}F\left(1-\gamma, 1+\frac{k}{2}-\gamma, 1+\frac{k}{2}; \tau\right)\Bigg].$$

Возвращаясь к переменным x, y, имеем

$$\psi(x,y,y_0) = a\left(\frac{m-2}{2}\right)^{\frac{4}{m-2}}(yy_0)(\rho_1^2)^{-(\frac{k}{2}+\gamma)}(1-\sigma)^{1-2\gamma}\times$$
$$\times\left[\sigma^{-\frac{k}{2}}\frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(\frac{k}{2})}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1+\frac{k}{2}-\gamma)}F\left(1-\gamma,1-\frac{k}{2}-\gamma,1-\frac{k}{2};\sigma\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(-\frac{k}{2})}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\frac{k}{2}-\gamma)}F\left(1-\gamma,1+\frac{k}{2}-\gamma,1+\frac{k}{2};\sigma\right)\right], \quad (1.8)$$

где

$$\sigma = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}, \quad \left.\begin{matrix}\rho^2\\ \rho_1^2\end{matrix}\right\} = x^2 + \frac{4}{(m-2)^2}\left(y^{\frac{2-m}{2}} \mp y_0^{\frac{2-m}{2}}\right)^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$\psi(x,y;y_0) = O(y^{\frac{k}{2}(m-2)+\frac{m}{2}}) \ \text{ при } \ y\to 0, \quad (1.9)$$
$$\psi(x,y;y_0) = O\Big((\rho_0^2)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{m}{2(m-2)}\right)}\Big), \quad (1.10)$$

где $\rho_0^2 = x^2 + \frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}$.

Так как по условию $k > \frac{m}{(m-2)}$, то условие (1.9) можно заменить на условие

$$\psi(x,y;y_0) = o(y^m) \ \text{ при } \ y\to 0. \quad (1.11)$$

С помощью ряда Гаусса, разложения функций $(1+\frac{(2-m)^2\rho^2}{16}(yy_0)^{\frac{m-2}{2}}\rho^2)^{-\gamma}$ и $(1-\sigma)^{1-2\gamma}$ при малых значениях ρ в степенной ряд фундаментальное решение (1.8) запишется в виде

$$\psi(x,y;y_0) = a\frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(\frac{k}{2})(m-2)^{\frac{m}{m-2}}(yy_0)^{\frac{m}{4}}}{4\Gamma(\frac{k}{2}+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}\rho^{-k} + \Psi^*(x,y;y_0), \quad (1.12)$$

где $\Psi^*(x,y;y_0)$ — регулярная в точке $(0,y_0)$ функция, представляющая собой фундаментальное решение уравнения (E_B) с особенностью в точке $(0,y_0)$.

Для получения фундаментального решения уравнения (E_B) с особенностью в произвольной точке (x_0,y_0) применим к функции (1.12) оператор обобщенного сдвига $T_{x_0}^x$:

$$\varepsilon(x,y;x_0,y_0) = g(x,y;x_0,y_0) + aC_k\frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(\frac{k}{2})(m-2)^{\frac{m}{m-2}}(yy_0)^{\frac{m}{4}}}{4\Gamma(\frac{k}{2}+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}\times$$
$$\times\int_0^\pi\left[x^2+x_0^2-2xx_0\cos\alpha+\frac{4}{(2-m)^2}(y^{\frac{2-m}{2}}-y_0^{\frac{2-m}{2}})^2\right]^{-\frac{k}{2}}\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha, \quad (1.13)$$

где $C_k^{-1} = \int\limits_0^\pi \sin^{k-1}\alpha\,d\alpha = \sqrt{\pi}\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma^{-1}(\frac{k+1}{2})$, g — регулярная в точке (x_0,y_0) функция.

Докажем, что при малых значениях $r_{MM_0} = (x-x_0)^2 + \frac{4}{(2-m)^2}(y^{\frac{2-m}{2}} - y_0^{\frac{2-m}{2}})^2$ имеет место равенство

$$C_k\int_0^\pi\left[x^2+x_0^2-2xx_0\cos\varphi+\frac{4}{(2-m)^2}(y^{\frac{2-m}{2}}-y_0^{\frac{2-m}{2}})^2\right]^{-\frac{k}{2}}\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha =$$
$$= -C_k(xx_0)^{-\frac{k}{2}}\ln r_{MM_0} + R_1(x,y;x_0,y_0), \quad (1.14)$$

где $R_1(x,y;x_0,y_0)$ — регулярная в точке (x_0,y_0) функция.

Действительно, преобразуя подинтегральную функцию в (1.13), имеем

$$\left[x^2+x_0^2-2xx_0\cos\alpha+\frac{4}{(2-m)^2}(y^{\frac{2-m}{2}}-y_0^{\frac{2-m}{2}})^2\right]^{-\frac{k}{2}}=$$

$$=\left[(x^2+x_0^2-2xx_0)+2xx_0(1-\cos\alpha)+\frac{4}{(2-m)^2}(y^{\frac{2-m}{2}}-y_0^{\frac{2-m}{2}})^2\right]^{-\frac{k}{2}}=\left[r_{MM_0}^2+4xx_0\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]^{-\frac{k}{2}}$$

и, следовательно,

$$C_k\int_0^\pi\left[r_{MM_0}^2+4xx_0\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]^{-\frac{k}{2}}\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha=C_k(4xx_0)^{-\frac{k}{2}}\int_0^\pi\left[\omega^2+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]^{-\frac{k}{2}}\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha,\qquad(1.15)$$

где $\omega^2=\frac{r_{MM_0}^2}{4xx_0}$. Ясно, что разность между интегралом (1.15) и интегралом

$$\int_0^\pi\alpha^{k-1}\left[\omega^2+\frac{\alpha^2}{4}\right]^{-\frac{k}{2}}d\alpha$$

является регулярной функцией от (x,y) даже в точке (x_0,y_0), т. е. для $\omega=0$. Обозначая ее через $F(x,y;x_0,y_0)$, получаем

$$C_k\int_0^\pi\left[r_{MM_0}^2+4xx_0\sin^2\frac{\alpha}{2}\right]^{-\frac{k}{2}}\sin^{k-1}\alpha\,d\alpha=$$

$$=C_k(4xx_0)^{-\frac{k}{2}}\int_0^\pi\alpha^{k-1}\left[\omega^2+\frac{\alpha^2}{4}\right]^{-\frac{k}{2}}d\alpha+F(x,y;x_0,y_0).\qquad(1.16)$$

Вводя в интеграле (1.16) новую переменную по формуле $\alpha=2\omega\xi$, получаем выражение

$$C_k(xx_0)^{-\frac{k}{2}}\int_0^{\pi(2\omega)^{-1}}\xi^{k-1}[1+\xi^2]^{-\frac{k}{2}}d\xi,$$

которое для $k>0$ равносильно выражению $-2C_k(xx_0)^{-\frac{k}{2}}\ln\omega+R(x,y;x_0,y_0)$, где $R(x,y;x_0,y_0)$ — регулярная функция в точке (x_0,y_0).

Таким образом, фундаментальное решение (1.13) может быть представлено в виде

$$\varepsilon(x,y;x_0,y_0)=aC_k\frac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(\frac{k}{2})(m-2)^{\frac{m}{m-2}}(yy_0)^{\frac{m}{4}}(xx_0)^{-\frac{k}{2}}}{4\Gamma(\frac{k}{2}+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}+R^*(x,y;x_0,y_0),$$

где $R^*(x,y;x_0,y_0)$ — регулярная в точке (x_0,y_0) функция.

2. Интегральное представление решения уравнения (E_B)

Обозначим через $C_m(\overline{D}^+)$ множество функций $f(x,y)$, непрерывных в $\overline{D}^+$ и удовлетворяющих условию $f(x,y)=o(y^m)$ при $y\to0$. Через $C_m(\Gamma)$ обозначим множество функций $\varphi(\xi,\eta)$ из класса $C(\Gamma)$, удовлетворяющих условию $\varphi(\xi,\eta)=o(\eta^m)$ при $\eta\to0$, а через $C_B^2(D^+)$ — множество четных по x, два раза непрерывно дифференцируемых в D^+ функций.

Пусть $u,v\in C_B^2(D^+)\cap C_m(\overline{D}^+)\cap C^1(\overline{D}^+)$. Непосредственным вычислением можно доказать, что имеет место тождество

$$vE_B(u)x^ky^{-m}+\left(y^{-m}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)x^k=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^ky^{-m}v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^kv\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Интегрируя обе части этого тождества по области D^+ и пользуясь формулой Остроградского, получаем

$$\iint\limits_{D^+} vE_B(u)x^k y^{-m}dx\,dy + \iint\limits_{D^+}\left(y^{-m}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)x^k dx\,dy = \int\limits_{\Gamma^+} vA[u]x^k d\Gamma^+, \tag{2.1}$$

где $A[\ ] = \cos(n,x)y^{-m}\frac{\partial}{\partial x} + \cos(n,y)\frac{\partial}{\partial y}$ — конормальная производная, n — единичный вектор внешней нормали к границе Γ^+. Меняя в формуле (2.1) ролями u и v, получим

$$\iint\limits_{D^+} uE_B(v)x^k y^{-m}dx\,dy + \iint\limits_{D^+}\left(y^{-m}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)x^k dx\,dy = \int\limits_{\Gamma^+} uA[v]x^k d\Gamma^+. \tag{2.2}$$

Из равенств (2.1) и (2.2) следует

$$\iint\limits_{D^+} [vE_B(u) - uE_B(v)]x^k y^{-m}dx\,dy = \int\limits_{\Gamma^+} (vA[u] - uA[v])x^k d\Gamma^+. \tag{2.3}$$

Формулы (2.1) и (2.3) называются соответственно первой и второй формулами Грина для оператора E_B.

Если u и v суть решения уравнения (E_B), то из формулы (2.3) имеем

$$\int_{\Gamma^+} (vA[u] - uA[v])x^k d\Gamma^+ = 0.$$

Полагая в формуле (2.1) $u = v$, получаем

$$\iint\limits_{D^+}\left(y^{-m}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)x^k dx\,dy = \int\limits_{\Gamma^+} uA[u]x^k d\Gamma^+, \tag{2.4}$$

где $u(x,y)$ — решение уравнения (E_B).

Пусть функция $u \in C_m(\overline{D}^+) \cap C^1(\overline{D}^+)$ является четным по x решением уравнения (E_B) в области D^+и $M_0(x_0,y_0) \in D^+$. Построим окружность $C_{M_0\varepsilon}$ с центром в точке M_0 и радиуса ε такого, что $C_{M_0\varepsilon} \subset D^+$. Обозначим через D^+_ε область, ограниченную осями координат, кривой Γ^+ и окружностью $C_{M_0\varepsilon}$.

Применяя к функциям $u(x,y)$ и $\varepsilon(x,y;x_0,y_0)$ вторую формулу Грина в области D^+_ε, получаем

$$\int_{\Gamma^+} (\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)A[u] - uA[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)])\xi^k d\Gamma^+ =$$
$$= \int_{C_{M_0\varepsilon}} (\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)A[u] - uA[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)])\xi^k dC_{M_0\varepsilon} = I_{1\varepsilon} + I_{2\varepsilon}. \tag{2.5}$$

Нетрудно доказать, что $I_{1\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Вычислим предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла

$$I_{2\varepsilon} = -\int\limits_{C_{M_0\varepsilon}} uA[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)]\xi^k dC_{M_0\varepsilon}. \tag{2.6}$$

Заменяя в (2.6) $\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)$ на его значение из (1.13), получим

$$I_{2\varepsilon} = \gamma\int_{C_{M_0\varepsilon}} uA[\ln r_{M_0P}]\eta^{\frac{m}{4}}\xi^{\frac{k}{2}}dC_{M_0\varepsilon} + J_{2\varepsilon},$$

где $\gamma = aC_k\dfrac{\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(\frac{k}{2})(m-2)^{\frac{m}{m-2}}y_0^{\frac{m}{4}}x_0^{-\frac{k}{2}}}{4\Gamma(\frac{k}{2}+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}$. Также нетрудно доказать, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} J_{2\varepsilon} = 0$.

Найдем предел при $\varepsilon \to 0$ интеграла

$$J_{1\varepsilon} = \gamma\int_{C_{M_0\varepsilon}} u(\xi,\eta)A[\ln r_{MM_0}]\xi^{\frac{k}{2}}\eta^{\frac{m}{4}}dC_{M_0\varepsilon}. \tag{2.7}$$

Вычисляя конормальную производную $A[\ln r_{M_0P}]$ и пользуясь формулой Лагранжа

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0),\quad 0<\theta<1,$$

приведем интеграл (2.7) к виду

$$J_{1\varepsilon}=\frac{\gamma}{\varepsilon}\int_{C_{M_0\varepsilon}}u(\xi,\eta)\frac{\eta^{-m}(\xi-x_0)^2+(y_0+\theta(\eta-y_0))^{-\frac{m}{2}}(\eta-y_0)^2\eta^{-\frac{m}{2}}}{(\xi-x_0)^2+(y_0+\theta(\eta-y_0))^{-m}(\eta-y_0)^2}\xi^{\frac{k}{2}}\eta^{\frac{m}{4}}dC_{M_0\varepsilon}.$$

После замены переменных $\xi=x_0+\varepsilon\cos\varphi$, $\eta=y_0+\varepsilon\sin\varphi$ и сокращения равенств на ε^3, получим

$$J_{1\varepsilon}=\frac{\gamma}{\varepsilon}\int_0^{2\pi}u(x_0+\varepsilon\cos\varphi,y_0+\varepsilon\sin\varphi)\times$$
$$\times\frac{(y_0+\varepsilon\sin\varphi)^{-m}\cos^2\varphi+(y_0+\theta\varepsilon\sin\varphi)^{-\frac{m}{2}}\sin^2\varphi(y_0+\varepsilon\sin\varphi)^{-\frac{m}{2}}}{\cos^2\varphi+(y_0+\theta\varepsilon\sin\varphi)^{-m}\sin^2\varphi}\times$$
$$\times(x_0+\varepsilon\cos\varphi)^{\frac{k}{2}}(y_0+\varepsilon\sin\varphi)^{\frac{m}{4}}d\varphi.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, после элементарных преобразований, необходимых для вычисления интеграла, получим

$$J_1=aC_k\frac{\pi\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(\frac{k}{2})(m-2)^{\frac{m}{m-2}}u(x_0,y_0)}{2\Gamma(\frac{k}{2}+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}. \tag{2.8}$$

Потребуем, чтобы

$$aC_k\frac{\pi\Gamma(2-2\gamma)\Gamma(\frac{k}{2})(m-2)^{\frac{m}{m-2}}}{2\Gamma(\frac{k}{2}+1-\gamma)\Gamma(1-\gamma)}=1.$$

Тогда, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ в (2.5), с учетом (2.8) получим

$$u(x_0,y_0)=\int_{\Gamma^+}(\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)A[u]-uA[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)])\xi^k d\Gamma^+. \tag{2.9}$$

Аналогично доказывается, что для любой точки $M_0(0,y_0)\in\overline{D}^+$, $y_0>0$, имеет место интегральное представление

$$u(0,y_0)=\int_{\Gamma^+}(\varepsilon(\xi,\eta;y_0)A[u]-uA[\varepsilon(\xi,\eta;y_0)])\xi^k d\Gamma^+, \tag{2.10}$$

где $u\in C_B^2(D^+)\cap C_m(\overline{D}^+)\cap C^1(\overline{D}^+)$ — решение уравнения (E_B).

Из интегральных представлений вытекают следующие свойства решений уравнения (E_B).

1^0. Существует четное по x решение $u(x,y)$ уравнения (E_B) в области D^+, удовлетворяющее условию

$$u=o(y^m)\quad\text{при}\qquad y\to 0. \tag{2.11}$$

Доказательство следует из интегрального представления (2.9) и оценки (1.11).

2^0. Существует четное по x решение $u(x,y)$ уравнения (E_B) в области D_e^+, удовлетворяющее условию

$$u=O\Big((\rho_0^2)^{-(\frac{k}{2}+\frac{m}{2(m-2)})}\Big)\quad\text{при}\quad\sqrt{x^2+y^2}\to\infty.$$

Доказательство этого свойства также следует из интегрального представления (2.9) и оценки (1.10).

3^0. Принцип максимума. С помощью интегральных представлений (2.9) и (2.10) установим следующий принцип максимума для решения уравнения (E_B).

Теорема 2.1. *Если функция $u(x,y)\neq 0$ класса $C_B^2(D^+)\cap C(\overline{D}^+)$ удовлетворяет уравнению (E_B) в D^+ и условию (2.11), то она достигает своих наибольшего положительного и наименьшего отрицательного значений на границе Γ^+.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ имеет наибольшее положительное значение во внутренней точке $M_0(x_0,y_0)$ области D^+, т. е. существует δ-окрестность $K_{M_0\delta}$ точки M_0, где $u(M)<u(M_0)=u_0$ при $M \neq M_0$ и $u(M)>0$.

Полагая в формуле (2.9) $\Gamma^+ = \partial K_{M_0\delta} = C_{M_0\delta}$, получаем

$$u_0 = \int_{C_{M_0\delta}} \varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)A[u]\xi^k dC_{M_0\delta} - \int_{C_{M_0\delta}} uA[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)]\xi^k dC_{M_0\delta} = I'_\delta + I''_\delta. \qquad (2.12)$$

На $C_{M_0\delta}$ справедливы неравенства $\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)>0$, $A[u]<0$, $u>0$ и $A[\varepsilon(\xi,\eta;x_0,y_0)]<0$. Поэтому $I'_\delta<0$, $I''_\delta>0$. Ясно, что при $\delta\to 0$ интеграл I'_δ, возрастая, стремится к нулю, а интеграл I''_δ, возрастая, стремится к u_0 и, следовательно, $I'_\delta<0$ и $I''_\delta<u_0$. Отсюда и из (2.12) следует $u_0<I''_\delta<u_0$. Полученное бессмысленное неравенство доказывает, что функция $u(x,y)$ не может иметь положительного наибольшего значения в точках $M_0(x_0,y_0)\in D^+$.

С помощью интегрального представления (2.10) аналогично доказывается, что $u(x,y)$ не может достигать положительного наибольшего значения в точках $M_0(0,y_0)\in \overline{D}^+$, $y_0>0$.

Утверждение о положительном наибольшем значении доказано. Утверждение об отрицательном наименьшем значении доказывается переходом от $u(x,y)$ к $-u(x,y)$. При этом отрицательное наименьшее значение переходит в положительное наибольшее значение. То, что $u(x,y)$ не может достигать положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значений в точках $M_0(x_0,0)\in\Gamma_1$, $x_0>0$, следует из условия (2.11). □

3. Постановка краевых задач типа Дирихле и Неймана. Теоремы единственности

Внутренняя задача типа Дирихле (задача D_i). Найти четную по x функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$u(x,y)\in C(\overline{D}^+)\cap C^2(D^+); \qquad (3.1)$$

$$E_B(u)=0, \quad (x,y)\in D^+; \qquad (3.2)$$

$$u=o(y^m) \ \text{ при } \ y\to 0; \qquad (3.3)$$

$$u|_{\Gamma^+}=\varphi(\xi,\eta), \quad \varphi\in C_m(\Gamma). \qquad (3.4)$$

Теорема 3.1. *Задача D_i не может иметь более одного решения.*

Доказательство следует из теоремы о принципе максимума.

Внешняя задача типа Дирихле (задача D_e). Найти четную по x функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,y)\in C(\overline{D}_e^+)\cap C^2(D_e^+); \qquad (3.5)$$

$$E_B(u)=0, \quad (x,y)\in D_e^+; \qquad (3.6)$$

$$u=o(y^m) \ \text{ при } \ y\to 0; \qquad (3.7)$$

$$u=O\Big((\rho_0^2)^{-(\frac{k}{2}+\frac{m}{2(m-2)})}\Big) \ \text{ при } \ r\to\infty; \qquad (3.8)$$

$$u|_{\Gamma^+}=\psi(\xi,\eta), \quad \psi\in C_m(\Gamma). \qquad (3.9)$$

Теорема 3.2. *Задача D_e не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Обозначим через D_{eR}^+ область, ограниченную кривой Γ^+, осями координат и окружностью C_R с центром в начале координат и радиуса R. Пусть ω — разность двух предполагаемых решений u_1 и u_2 внешней задачи типа Дирихле. Она удовлетворяет условиям (3.5)–(3.8) и граничному условию

$$\omega|_{\Gamma^+}=0. \qquad (3.9_0)$$

Полагая в формуле (2.4) $D^+ = D^+_{eR}$ и $u = \omega$, с учетом (3.9_0) получаем

$$\iint\limits_{D^+_{eR}} \left(y^{-m} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right) x^k \, dx \, dy = \int\limits_{C^+_R} \omega A[\omega] x^k \, dC^+_R = J_R.$$

Нетрудно доказать, что $J_R \to 0$ при $R \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу при $R \to \infty$ в этой формуле, получаем

$$\iint\limits_{D^+_e} \left(y^{-m} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right) x^k \, dx \, dy = 0.$$

Отсюда и из граничного условия (3.9_0) следует $w \equiv 0$ и $u_1 \equiv u_2$. $\square$

Внутренняя задача типа Неймана (задача N_i). Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^2(D^+) \cap C^1(D^+ \cup \Gamma^+); \tag{3.10}$$

$$E_B(u) = 0, \quad (x, y) \in D^+; \tag{3.11}$$

$$u = o(y^m) \ \text{ при } \ y \to 0; \tag{3.12}$$

$$A[u]|_{\Gamma^+} = f(\xi, \eta), \quad f \in C_m(\Gamma). \tag{3.13}$$

Теорема 3.3. *Задача N_i не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два предполагаемых решения внутренней задачи типа Неймана. Тогда их разность $\omega = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям (3.10)–(3.12) и граничному условию

$$A[w]|_\Gamma = 0. \tag{3.13_0}$$

Полагая в формуле (2.4) $u = \omega$, получим

$$\iint\limits_{D^+} \left(y^{-m} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right) x^k \, dx \, dy = 0,$$

откуда $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ и $\omega = \text{const}$. Отсюда и из предельного соотношения (3.12) следует $\omega \equiv 0$ и $u_1 \equiv u_2$. $\square$

Внешняя задача типа Неймана (задача N_e). Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^1(D^+_e \cup \Gamma^+) \cap C^2_B(D^+_e); \tag{3.14}$$

$$E_B(u) = 0, \quad (x, y) \in D^+_e; \tag{3.15}$$

$$u = o(y^m) \ \text{ при } \ y \to 0; \tag{3.16}$$

$$u = O\Big((\rho_0^2)^{-(\frac{k}{2} + \frac{m}{2(m-2)})} \Big) \ \text{ при } \ r \to \infty; \tag{3.17}$$

$$A[u]|_{\Gamma^+} = g(\xi, \eta), \quad g \in C_m(\Gamma). \tag{3.18}$$

Теорема 3.4. *Задача N_e не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два предполагаемых решения задачи N_e. Тогда их разность $\omega = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям (3.14)–(3.17) и граничному условию

$$A[\omega]|_{\Gamma^+} = 0. \tag{3.18_0}$$

Также полагая в формуле (2.4) $u = \omega$ и $D^+ = D^+_{eR}$, с учетом граничного условия (3.18_0) получаем

$$\iint\limits_{D^+_{eR}} \left(y^{-m} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right) x^k \, dx \, dy = \int\limits_{C^+_R} \omega A[\omega] x^k \, d\Gamma^+.$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$, получаем

$$\iint\limits_{D^+_e} \left(y^{-m} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right) x^k \, dx \, dy = 0.$$

Отсюда и из предельного соотношения (3.16) следует $\omega = 0$ и $u_1 = u_2$. $\square$

4. Потенциалы и их свойства

С помощью фундаментального решения $\varepsilon(x, y; x_0, y_0)$ образуем интегральные операторы

$$v(x, y) = \int_{\Gamma^+} \mu(\xi, \eta) \varepsilon(\xi, \eta; x, y) \xi^k \, d\Gamma^+,$$
$$w(x, y) = \int_{\Gamma^+} \nu(\xi, \eta) A_p[\varepsilon(\xi, \eta; x, y)] \xi^k \, d\Gamma^+,$$

где $A_p = \eta^{-m} \cos(n, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} + \cos(n, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta}$. Интегральные операторы $v(x, y)$ и $w(x, y)$ представляют собой потенциалы типа простого и двойного слоев с плотностями $\mu(\xi, \eta)$ и $\nu(\xi, \eta)$ соответственно для уравнения (E_B). Предполагается, что плотности $\mu(\xi, \eta)$ и $\nu(\xi, \eta)$ — непрерывные функции на Γ^+ и удовлетворяют условиям $\mu(\xi, \eta) = o(\eta^m)$ и $\nu(\xi, \eta) = o(\eta^m)$ при $\eta \to 0$.

Очевидно, потенциалы $v(x, y)$ и $w(x, y)$ — регулярные решения уравнения (E_B) в любой области, лежащей в E^+_2, не имеющей общих точек ни с кривой Γ^+, ни с осями координат. Из формул (1.10) и (1.11) следует, что потенциалы $v(x, y)$ и $w(x, y)$ обладают следующими свойствами:

$$v(x, y) = o(y^m), \quad w(x, y) = o(y^m) \ \text{ при } \ y \to 0, \tag{4.1}$$

$$v(x, y) = O\Big(\rho_0^{-(k + \frac{m}{m-2})}\Big), \quad w(x, y) = O\Big(\rho_0^{-(k + \frac{m}{m-2})}\Big) \ \text{ при } \ r \to \infty. \tag{4.2}$$

Из представления (1.14) фундаментального решения уравнения (E_B) следует, что фундаментальное решение этого уравнения, умноженное на ξ^k, имеет логарифмическую особенность. Поэтому потенциалы (4.1) и (4.2) на границе Γ^+ ведут себя так же, как логарифмические потенциалы, т. е. имеют место следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть кривая Ляпунова Γ^+ образует с координатными осями прямой угол. Если $\nu(\xi, \eta) \in C(\Gamma^+)$ и $\nu(\xi, \eta) = o(\eta^m)$ при $\eta \to 0$, то для потенциала типа двойного слоя справедливы предельные соотношения*

$$w_i(x_0, y_0) = -\frac{1}{2} \nu(x_0, y_0) + \overline{w(x_0, y_0)},$$
$$w_e(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \nu(x_0, y_0) + \overline{w(x_0, y_0)},$$

где $w_i(x_0, y_0)$ и $w_e(x_0, y_0)$ означают предельные значения потенциала $w(x, y)$ в точке $(x_0, y_0) \in \Gamma^+$ при $(x, y) \to (x_0, y_0)$ соответственно изнутри и извне Γ^+, а $\overline{w(x_0, y_0)}$ — прямое значение потенциала $w(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Теорема 4.2. *Пусть кривая Ляпунова Γ^+ образует с координатными осями прямой угол. Если плотность $\mu(\xi, \eta) \in C(\Gamma^+)$ и $\mu(\xi, \eta) = o(\eta^m)$ при $\eta \to 0$, то потенциал типа простого слоя $v(x, y)$ непрерывен в E^+_2.*

Теорема 4.3. *Пусть кривая Ляпунова Γ^+ образует с координатными осями прямой угол. Если плотность $\mu(\xi,\eta) \in C(\Gamma^+)$ и $\mu(\xi,\eta) = o(\eta^m)$ при $\eta \to 0$, то предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя выражаются формулами*

$$A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_i = \frac{1}{2}\mu(x_0,y_0) + \overline{A_{M_0}[v(x_0,y_0)]},$$
$$A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_e = -\frac{1}{2}\mu(x_0,y_0) + \overline{A_{M_0}[v(x_0,y_0)]},$$

где $A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_i$ и $A_{M_0}[v(x_0,y_0)]_e$ означают предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя в точке $M_0(x_0,y_0) \in \Gamma^+$ при $M(x,y) \to M_0(x_0,y_0)$ соответственно изнутри и извне Γ^+, а $\overline{A_{M_0}[v(x_0,y_0)]}$ — прямое значение конормальной производной потенциала типа простого слоя.

5. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям

Решение задачи D_i ищем в виде потенциала типа двойного слоя

$$u(x,y) = w(x,y). \tag{5.1}$$

Очевидно, функция (5.1) удовлетворяет условиям (3.1)–(3.3) задачи D_i. Неизвестную плотность $\nu(\xi,\eta)$ находим из требования, чтобы функция (5.1) удовлетворяла граничному условию (3.4). Подставив ее в это граничное условие, с учетом формулы (4.1) получим

$$-\frac{1}{2}\nu(x,y) + \overline{w(x,y)} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma^+,$$

или

$$\nu(x,y) - 2\int_{\Gamma^+} \nu(\xi,\eta) A_p[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]\xi^k d\Gamma = -2\varphi(x,y). \tag{5.2}$$

Решение задачи D_e также ищем в виде потенциала типа двойного слоя

$$u(x,y) = w(x,y). \tag{5.3}$$

Легко можно проверить, что функция (5.3) удовлетворяет условиям (3.5)–(3.8) задачи D_e. Неизвестную плотность $\nu(\xi,\eta)$ находим из требования, чтобы функция (5.3) удовлетворяла граничному условию (3.9). Подставив ее в это граничное условие, с учетом формулы (4.2) получим

$$\nu(x,y) + 2\int_{\Gamma^+} \nu(\xi,\eta) A_p[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]\xi^k d\Gamma = 2\psi(x,y). \tag{5.4}$$

Решение задачи N_i ищем в виде потенциала типа простого слоя

$$u(x,y) = v(x,y).$$

Эта функция удовлетворяет условиям (3.10)–(3.12) задачи N_i. Подставляя ее в граничное условие (3.13), получаем интегральное уравнение относительно неизвестной плотности $\mu(\xi,\eta)$

$$\mu(x,y) + 2\int_{\Gamma^+} \mu(\xi,\eta) A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]\xi^k d\Gamma = 2f(x,y). \tag{5.5}$$

Решение задачи N_e также ищем в виде потенциала типа простого слоя

$$u(x,y) = v(x,y). \tag{5.6}$$

Функция (5.6) удовлетворяет условиям (3.14)–(3.17) внешней задачи типа Неймана. Подставляя ее в граничное условие (3.18), получаем

$$\mu(x,y) - 2\int_{\Gamma^+} \mu(\xi,\eta) A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]\xi^k d\Gamma = -2g(x,y). \tag{5.7}$$

Отметим следующие свойства интегральных уравнений (5.2), (5.4), (5.5) и (5.7).

1) Формула (1.14) показывает, что эти уравнения являются интегральными уравнениями со слабой особенностью.

2) Ядра $A_P[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]$ и $A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]$ получаются одно из другого перестановкой точек $P(\xi,\eta)$ и $M(x,y)$. Так как эти ядра вещественные, то они сопряженные.

Отсюда следует, что уравнения (5.2) и (5.7), (5.4) и (5.5) попарно сопряжены.

6. Исследование интегральных уравнений

Докажем, что интегральные уравнения (5.2) и (5.7), соответствующие задачам соответственно D_i и N_e, разрешимы единственным образом при любых непрерывных функциях $\varphi(x,y)$ и $g(x,y)$.

С этой целью рассмотрим однородное интегральное уравнение задачи N_e

$$\mu(x,y) - 2\int_{\Gamma^+} \mu(\xi,\eta) A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]\xi^k d\Gamma = 0. \tag{6.1}$$

Пусть $\mu_0(x,y)$ — ненулевое решение этого уравнения. Тогда функция

$$u_0(x,y) = \int_{\Gamma^+} \mu_0(\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma$$

удовлетворяет условиям (3.14)–(3.17) и граничному условию

$$A[u_0]|_{\Gamma^+} = 0$$

или

$$A_M[u_0]_e = -\frac{1}{2}\mu_0(x,y) + \int_{\Gamma^+} \mu_0(\xi,\eta) A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]\xi^k d\Gamma = 0. \tag{6.2}$$

В силу теоремы единственности решения задачи N_e

$$u_0(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_e^+.$$

Так как потенциал типа простого слоя есть непрерывная функция в E_2^+, то $u_0|_{\Gamma^+} = 0$.

Рассмотрим теперь функцию

$$u_0(x,y) = \int_{\Gamma^+} \mu_0(\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma$$

в области D^+. Она в этой области D^+ удовлетворяет условиям (3.1)–(3.3) и граничному условию $u_0|_{\Gamma^+} = 0$.

В силу теоремы единственности решения задачи D_i

$$u_0(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D^+.$$

Тогда

$$A_M[u_0]_i = \frac{1}{2}\mu_0(x,y) + \int_{\Gamma^+} \mu_0(\xi,\eta) A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]\xi^k d\Gamma = 0. \tag{6.3}$$

Вычитая из равенства (6.3) равенство (6.2), получаем $\mu_0(x,y) = 0$.

Итак, однородное интегральное уравнение (6.1) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма интегральное уравнение задачи N_e однозначно разрешимо для любой непрерывной функции $g(x,y)$.

Таким образом, значение параметра $\lambda = 2$ правильно для ядра $A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]$. По известной теореме Фредгольма оно является правильным и для сопряженного ядра $A_P[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]$.

Отсюда следует, что интегральное уравнение (5.2) задачи D_i однозначно разрешимо для непрерывной функции $\varphi(x,y)$.

Из разрешимости интегральных уравнений задач D_i и N_e следует, что разрешимы и сами задачи. Это приводит к следующим теоремам.

Теорема 6.1. *Если кривая Ляпунова Γ^+ образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $g(x,y) \in C_m(\Gamma^+)$ разрешима задача N_e и ее решение может быть представлено в виде потенциала типа простого слоя.*

Теорема 6.2. *Если кривая Ляпунова Γ^+ образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $\varphi(x,y) \in C_m(\Gamma^+)$ разрешима задача D_i и ее решение может быть представлено в виде потенциала типа двойного слоя.*

Докажем теперь однозначную разрешимость интегральных уравнений (5.4) и (5.5).

Рассмотрим однородное интегральное уравнение задачи N_i

$$\mu(x,y) + 2\int_{\Gamma^+} \mu(\xi,\eta) A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]\xi^k d\Gamma = 0. \tag{6.4}$$

Пусть $\widetilde{\mu}(x,y)$ — ненулевое решение этого уравнения. Тогда функция

$$\widetilde{u}(x,y) = \int_{\Gamma^+} \widetilde{\mu}(\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma$$

удовлетворяет условиям (3.10)–(3.12) и граничному условию $A[\widetilde{u}]|_{\Gamma^+} = 0$ или

$$A_M[\widetilde{u}]_i = \frac{1}{2}\widetilde{\mu}(x,y) + \int_{\Gamma^+} \widetilde{\mu}(\xi,\eta) A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]\xi^k d\Gamma = 0. \tag{6.5}$$

В силу теоремы единственности решения задачи N_i

$$\widetilde{u}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D^+.$$

Ввиду непрерывности потенциала простого слоя в E_2^+

$$\widetilde{u}|_{\Gamma^+} = 0. \tag{6.6}$$

Функция

$$\widetilde{u} = \int_{\Gamma^+} \widetilde{\mu}(\xi,\eta)\varepsilon(\xi,\eta;x,y)\xi^k d\Gamma^+$$

в области D_e^+ удовлетворяет условиям (3.5)–(3.8) внешней задачи типа Дирихле и граничному условию(6.6). Согласно теореме единственности задачи D_e

$$\widetilde{u}(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D_e^+,$$

откуда

$$A_M[\widetilde{u}]_e = -\frac{1}{2}\widetilde{\mu}(x,y) + \int_{\Gamma} \widetilde{\mu}(\xi,\eta) A_M[\varepsilon(\xi,\eta;x,y)]\xi^k d\Gamma = 0. \tag{6.7}$$

Вычитая из равенства (6.5) равенство (6.7), получаем $\widetilde{\mu}(x,y) = 0$.

Это означает, что однородное интегральное уравнение (6.4) имеет только нулевое решение. В силу альтернативы Фредгольма интегральные уравнения (5.4) и (5.5) задач D_e и N_i однозначно разрешимы для любых непрерывных функций $\psi(x,y)$ и $f(x,y)$ и вместе с ними однозначно разрешимы сами задачи (5.4) и (5.5).

Сказанное выше приводит к следующим теоремам.

Теорема 6.3. *Если кривая Ляпунова Γ^+ образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $\psi(x,y) \in C_m(\Gamma^+)$ разрешима задача D_e, и ее решение может быть представлено в виде потенциала типа простого слоя.*

Теорема 6.4. *Если кривая Ляпунова Γ^+ образует с координатными осями прямой угол, то для этой кривой при $f(x,y) \in C_m(\Gamma^+)$ разрешима задача N_i, и ее решение может быть представлено в виде потенциала типа двойного слоя.*

Литература

1. Мухлисов Ф.Г., Хисматуллин А.Ш. *Исследование краевых задач для одного вырождающегося B-эллиптического уравнения методом потенциалов* // Тр. 5-й Международн. конф. молодых ученых и студентов. Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки. Ч. 1, 2: Математика. Математическое моделирование. Самара: Изд-во СамГТУ, 2004. – С. 87-90.
2. Киприянов И.А. *Об одном классе сингулярных эллиптических операторов.* I // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7. – № 11. – С. 2066–2077.
3. Абрамян Б.Л., Александрова А.Я. *Осесимметрические задачи теории упругости* // Тр. 2-го Всес. съезда по теор. и прикладной механ. – М., 1966. – Вып. 3. – С. 7–37.
4. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. *Некоторые осесимметрические контактные задачи для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием* // Изв. АН АрмСССР. Механика. – 1969. – Т. 22. – № 3. – С. 3–10.
5. Балоян А.А., Мелкоян А.П. *Осесимметрическая задача полного бесконечного цилиндра с периодически насаженными на него дисками* // Изв. АН АрмСССР. Механика. – 1968. – Т. 21. – № 3. – С. 12–20.
6. Кизыма Я.М. *Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости*: Автореф. дисс. ... докт. физ.-матем. наук. – Львов, 1973. – 27 с.
7. Мелконян А.П. *Осесимметричная задача полого бесконечного цилиндра с двумя насаженными дисками* // Изв. АН АрмСССР. Механика. – 1972. – Т. 25. – № 5. – С. 3–13.

Казанский государственный педагогический университет

Поступила 20.01.2006