ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 8 (495)

УДК 517.983

Г.А. СВИРИДЮК, С.В. БРЫЧЕВ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

Пусть L и M — квадратные матрицы порядка n. Линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$L\dot{u} = Mu + f \tag{0.1}$$

будем называть *системой леонтьевского типа*, если $\det L = 0$, а $\det M \neq 0$. Название обусловлено тем обстоятельством, что при некоторых дополнительных условиях система (0.1) моделирует межотраслевую экономику "затраты–выпуск" с учетом запасов [1]. Нас интересует численное решение задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.2}$$

для системы (0.1).

Необходимо отметить, что уже сейчас существуют численные алгоритмы решения систем вида (0.1), реализованные в виде программного продукта для ЕС ЭВМ [2]. Однако они очень сложны и труднодоступны. Существующие достаточно простые и надежные алгоритмы [3] пригодны только в случае $\det L \neq 0$. Наш подход основан на результатах для относительно p-радиальных операторов и порождаемых ими вырожденных сильно непрерывных полугрупп. Основы этой теории были заложены в [4], а затем развиты в [5], [6].

В статье строится численный алгоритм для решения задачи (0.1), (0.2), который используется для изучения примера Леонтьева из [1].

Все рассмотрения будут проводиться в вещественных пространствах, но при изучении спектральных вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ограничивают области, лежащие слева при движении против часовой стрелки. Символы $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначают соответственно единичный и нулевой операторы, области определения которых ясны из контекста.

1. Аналитическое решение задачи Коши

Следуя [7], рассмотрим *L-резольвентное множество*

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(\mu L - M) \neq 0\}$$

и *L-спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ матрицы M. Нетрудно показать [7], что либо $\rho^L(M) = \emptyset$, либо L-спектр матрицы M состоит из конечного множества точек. Кроме того, заметим, что множества $\rho^L(M)$ и $\sigma^L(M)$ не изменяются при переходе к другим базисам. Поэтому изложение удобно вести на языке теории линейных операторов.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — конечномерные линеалы, $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \mathbb{R}^n$; линейные операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$.

Определение 1.1. Оператор M называется *L-регулярным*, если $\rho^L(M) \neq \emptyset$.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования Российской Федерации, шифр PD02-1.1.-82.

Замечание 1.1. Нетрудно видеть, что L-регулярный оператор M является (L,σ)-ограниченным оператором, причем точка ∞ является несущественной особой точкой L-резольвенты $\mu L - M$ оператора M [7]. Поэтому оператор M будет сильно (L,p)-радиальным, где число $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ указывает порядок полюса в точке ∞ L-резольвенты оператора M [5]. При этом устранимая особая точка считается полюсом порядка нуль.

Замечание 1.2. Если в системе (0.1) $\det M = 0$ и оператор M L-регулярен, то подстановкой $u = e^{\alpha t} v$, где $\alpha \in \rho^L(M)$, систему (0.1) нетрудно привести к системе леонтьевского типа.

Лемма 1.1 ([7]). *Пусть оператор M L-регулярен. Тогда интегралы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\mu^L(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L_\mu^L(M)d\mu \tag{1.1}$$

задают проекторы $P : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $Q : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$.

Здесь замкнутый контур $\Gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L(M)$, а $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ называются соответственно *правой* и *левой* *L-резольвентами* оператора M.

Положим $\ker P = \mathfrak{U}^0$, $\operatorname{Im} P = \mathfrak{U}^1$, $\ker Q = \mathfrak{F}^0$, $\operatorname{Im} Q = \mathfrak{F}^1$. Через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0,1$.

Теорема 1.1 ([7]). *Пусть оператор M L-регулярен. Тогда*
(i) *операторы $L_k, M_k : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k$, $k = 0,1$;*
(ii) *существуют операторы $M_0^{-1} : \mathfrak{F}^0 \to \mathfrak{U}^0$, $L_1^{-1} : \mathfrak{F}^1 \to \mathfrak{U}^1$.*

Пусть вектор $f \in \mathfrak{F}$, а оператор M L-регулярен. Как нетрудно видеть, множество

$$\mathfrak{M}_f = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + f) = 0\}$$

образует аффинное многообразие в пространстве $\mathfrak{U}$, причем

$$u \in \mathfrak{M}_f \Leftrightarrow u^0 = -M_0^{-1} f^0,$$

где $u^0 \in \mathfrak{U}^0$, а $f^0 \in \mathfrak{F}^0$.

Теорема 1.2 ([7]). *Пусть оператор M L-регулярен, тогда для любых векторов $f \in \mathfrak{F}$ и $u_0 \in \mathfrak{M}_f$ существует единственное решение задачи* (0.1), (0.2), *которое имеет вид*

$$u(t) = -M_0^{-1} f^0 + U^t u_0 + \int_0^t R^s f ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Здесь

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad R^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu, \tag{1.2}$$

а контур $\Gamma \subset \mathbb{C}$ такой же, как в лемме 1.1.

Замечание 1.3. Семейство $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ образует аналитическую группу с единицей $U^0 = P$. Проектор Q будет единицей для другой аналитической группы

$$F^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L_\mu^L(M) e^{\mu t} d\mu, \tag{1.3}$$

которая понадобится в дальнейшем.

Замечание 1.4. Как нетрудно убедиться, решение $u(t) \in \mathfrak{M}_f$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Поэтому множество $\mathfrak{M}_f$ носит название *фазового пространства* системы (0.1) [7].

В дальнейшем потребуется один результат из теории матриц [8].

Определение 1.2. Матричный пучок $\mu L - M$ называется *регулярным*, если существует число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$.

Теорема 1.3. *Пусть матричный пучок $\mu L - M$ регулярен. Тогда существуют такие неособенные матрицы A и B порядка n, что*

$$A(\mu L - M)B = \operatorname{diag}\{N_{n_1}, N_{n_2}, \dots, N_{n_k}, \mu\mathbb{I}_l - S_l\},$$

где $N_\nu = \mu G_\nu - \mathbb{I}_\nu$, G_ν — жорданова клетка порядка ν, $n_1 + n_2 + \dots + n_k + l = n$, $\mu \in \mathbb{C}$.

Замечание 1.5. Как нетрудно видеть, пучок $\mu L - M$ регулярен точно тогда, когда оператор M L-регулярен.

2. Алгоритм решения задачи Коши

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — конечномерные линеалы, $\dim\mathfrak{U} = \dim\mathfrak{F}$; операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, причем оператор M L-регулярен. Пусть точки $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q = 0, 1, \dots, p$. Оператор-функции

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M), \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M)$$

называются соответственно *правой p-резольвентой* и *левой p-резольвентой* оператора M относительно оператора L (по-другому, *правой (L,p)-резольвентой* и *левой (L,p)-резольвентой* оператора M).

Теорема 2.1 ([5]). *Пусть точки $\lambda_q, \mu_q \in \rho^L(M)$, $q = 0, 1, \dots, p$. Тогда $\operatorname{Im} R^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{Im} R^L_{(\mu,p)}(M)$, $\operatorname{Im} L^L_{(\lambda,p)}(M) = \operatorname{Im} L^L_{(\mu,p)}(M)$.*

Напомним, что в случае L-регулярности оператора M в точке ∞ может быть только полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M.

Теорема 2.2. *Пусть p — порядок полюса L-резольвенты оператора M в точке ∞. Тогда*
(i) $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) \oplus \operatorname{Im} R^L_{(\mu,p)}(M) = \mathfrak{U}$;
(ii) $\ker L^L_{(\mu,p)}(M) \oplus \operatorname{Im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \mathfrak{F}$.

Доказательство. (i) В силу теоремы 2.1 доказательство достаточно провести для некоторого числа $\alpha \in \rho^L(M)$. Из теоремы 1.3 получаем

$$(R^L_\alpha(M))^{p+1} = B\{\mathbb{O}_{n_1}, \mathbb{O}_{n_2}, \dots, \mathbb{O}_{n_k}, (\alpha\mathbb{I}_l - S_l)^{-(p+1)}\}B^{-1}.$$

Отсюда

$$\dim\ker(R^L_\alpha(M))^{p+1} = \dim\ker R^L_{(\mu,p)}(M) = n_1 + n_2 + \dots + n_k,$$
$$\dim\operatorname{Im}(R^L_\alpha(M))^{p+1} = \dim\operatorname{Im} R^L_{(\mu,p)}(M) = l,$$

причем $l + n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.
(ii) Доказывается аналогично. $\square$

Положим $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) = \mathfrak{U}^0$, $\operatorname{Im} R^L_{(\mu,p)}(M) = \mathfrak{U}^1$, $\ker L^L_{(\mu,p)}(M) = \mathfrak{F}^0$, $\operatorname{Im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \mathfrak{F}^1$, где p — порядок полюса в точке ∞ L-резольвенты оператора M. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда
(i) операторы $L_k, M_k : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$;
(ii) существуют операторы $M_0^{-1} : \mathfrak{F}^0 \to \mathfrak{U}^0$, $L_1^{-1} : \mathfrak{F}^1 \to \mathfrak{U}^1$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из очевидных соотношений $LR^L_{(\mu,p)}(M) = L^L_{(\mu,p)}(M)L$, $MR^L_{(\mu,p)}(M) = L^L_{(\mu,p)}(M)M$ [6].

Для доказательства (ii), пользуясь теоремой 1.3, предъявим в явном виде операторы $M_0^{-1} = B^{-1}\{\mathbb{I}_{n_1}, \mathbb{I}_{n_2}, \ldots, \mathbb{I}_{n_k}, \mathbb{O}_l\}A^{-1}$, $L_1^{-1} = B^{-1}\{\mathbb{O}_{n_1}, \mathbb{O}_{n_2}, \ldots, \mathbb{O}_{n_k}, \mathbb{I}_l\}A^{-1}$. □

Замечание 2.1. Совпадение в обозначениях теоремы 1.2 и следствия 2.1 не случайно, что будет продемонстрировано в дальнейшем.

Теорема 2.3. *Пусть p — порядок полюса в точке ∞ L-резольвенты оператора M. Тогда*

$$\text{(i)} \quad \lim_{k\to\infty}(kR^L_k(M))^{p+1} = P; \tag{2.1}$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{k\to\infty}(kL^L_k(M))^{p+1} = Q, \tag{2.2}$$

где проекторы P и Q определены формулами (1.1).

Доказательство. (i) Обозначим через P_l квадратную матрицу порядка n, в правом нижнем углу которой расположена единичная матрица порядка l, а остальные элементы равны нулю. В силу теоремы 1.3

$$B^{-1}PB = \operatorname{diag}\left\{\mathbb{O}_{n_1}, \mathbb{O}_{n_2}, \ldots, \mathbb{O}_{n_k}, \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\mu\mathbb{I}_l - S_l)^{-1}d\mu\right\} = P_l.$$

С другой стороны,

$$B^{-1}(kR^L_k(M))^{p+1}B = B^{-1}\operatorname{diag}\{\mathbb{O}_{n_1}, \mathbb{O}_{n_2}, \ldots, \mathbb{O}_{n_k}, (\mathbb{I}_l - k^{-1}S_l)^{-(p+1)}\}B = P_l.$$

Утверждение (ii) доказывается аналогично. □

Замечание 2.2. В численных расчетах всегда необходимо знать, с какого числа $k \in \mathbb{N}$ можно начинать считать приближенные проекторы P и Q. Рассмотрим многочлен $\det(\mu L - M) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + n$. Поскольку $a_0 = \det L$, коэффициент a_1 состоит из слагаемых, каждое из которых есть произведение определителя одного из миноров матрицы L порядка $n-1$ на число, ..., коэффициент a_k состоит из слагаемых, каждое из которых есть произведение определителя одного из миноров матрицы L порядка $n-k$ на число, ..., коэффициент $a_n = \det(-M)$, то многочлен $\det(\mu L - M)$ имеет порядок не больший, чем $\operatorname{rank} L$. Итак, пусть $\det(\mu L - M) = a_q\mu^{n-q} + \cdots + a_n$, где $a_q \neq 0$, $q \leq \operatorname{rank} L$. Тогда при

$$k > \frac{1}{|a_q|}\sum_{k=q+1}^{n}|a_k| + 1$$

нельзя оказаться даже вблизи точки L-спектра оператора M.

Теорема 2.4. *Пусть p — порядок полюса в точке ∞ L-резольвенты оператора M. Тогда*

$$\text{(i)} \quad \lim_{k\to\infty}((L - \frac{t}{k(p+1)}M)^{-1}L)^{k(p+1)} = U^t; \tag{2.3}$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{k\to\infty}(L(L - \frac{t}{k(p+1)}M)^{-1})^{k(p+1)} = F^t, \tag{2.4}$$

где группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ и $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ определены формулами (1.2) *и* (1.3) *соответственно.*

Доказательство. (i) Обозначим через S квадратную матрицу порядка n, в правом нижнем углу которой находится матрица S_l, а остальные элементы — нули. Тогда

$$B^{-1}U^tB = \operatorname{diag}\left\{\mathbb{O}_{n_1}, \mathbb{O}_{n_2}, \ldots, \mathbb{O}_{n_k}, \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\mathbb{I}_l - S_l)^{-1}e^{\mu t}d\mu\right\} = e^{tS}.$$

С другой стороны,

$$B^{-1}\left(\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}L\right)^{k(p+1)}B=B^{-1}\operatorname{diag}\left\{\mathbb{O}_{n_1},\mathbb{O}_{n_2},\ldots,\mathbb{O}_{n_k},\left(\mathbb{I}_l-\frac{t}{k(p+1)}S_l\right)^{-(p+1)}\right\}B.$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}L\right)^{k(p+1)}=$$
$$=\lim_{k\to\infty}B\operatorname{diag}\left\{\mathbb{O}_{n_1},\mathbb{O}_{n_2},\ldots,\mathbb{O}_{n_k},\left(\mathbb{I}_l-\frac{t}{k(p+1)}S_l\right)^{-k(p+1)}\right\}B^{-1}=Be^{tS}B^{-1}=U^t.$$

Утверждение (ii) доказывается аналогично. □

Замечание 2.3. Так же, как и в замечании 2.2, рассмотрим многочлен

$$\det(\mu(p+1)L-tM)=a_qt^q\mu^{n-q}(p+1)^{n-q}+\cdots+t^na_n,$$

где $a_q\neq 0$, $q\leq\operatorname{rank}L$. Тогда при

$$k>\begin{cases}\dfrac{1}{|a_q|(p+1)^{n-q}}\displaystyle\sum_{k=q+1}^{n}|a_k|(p+1)^{n-k}+1, & \text{если } |t|<1;\\ \dfrac{1}{|a_q|\,|t|^q(p+1)^{n-q}}\displaystyle\sum_{k=q+1}^{n}|a_k|(p+1)^{n-k}|t|^k+1, & \text{если } |t|\geq 1,\end{cases}$$

нельзя оказаться даже вблизи точки L-спектра оператора M.

Доказательства следующих двух теорем аналогичны доказательствам двух предыдущих, поэтому они опускаются.

Теорема 2.5. *Пусть p — порядок полюса в точке ∞ L-резольвенты оператора M. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}L\right)^{k(p+1)-1}\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}=R^t,\tag{2.5}$$

где семейство операторов $\{R^t:t\in\mathbb{R}\}$ определено формулой (1.2).

Теорема 2.6. *Пусть p — порядок полюса в точке ∞ L-резольвенты оператора M и существует оператор $M^{-1}:\mathfrak{F}\to\mathfrak{U}$. Тогда*

$$\int_0^t R^{t-s}ds=\lim_{k\to\infty}M^{-1}\left(L\left(L-\frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}\right)^{k(p+1)}-\lim_{k\to\infty}M^{-1}(kL_k^L(M))^{(p+1)}.\tag{2.6}$$

Замечание 2.4. Поскольку порядок полюса в точке ∞ L-резольвенты оператора M не может быть больше $\dim\mathfrak{U}$ [7], то в численных расчетах по формулам (2.1)–(2.6) p можно заменить на n.

Замечание 2.5. При численных расчетах по формулам (2.5) и (2.6) необходимо учитывать замечания 2.1 и 2.2.

Теперь все готово для решения задачи (0.1), (0.2).

Теорема 2.7. *Пусть существует оператор $M^{-1}:\mathfrak{F}\to\mathfrak{U}$. Тогда для любого вектора $f\in\mathfrak{F}$ и любого вектора $u_0\in\mathfrak{U}$ такого, что*

$$-\lim_{k\to\infty}(\mathbb{I}_n-(kR_k^L(M))^{n+1})u_0=\lim_{k\to\infty}M^{-1}(\mathbb{I}_n-(kL_k^L(M))^{n+1})f,\tag{2.7}$$

существует единственное решение задачи (0.1), (0.2), *которое имеет вид*

$$u(t) = \lim_{k\to\infty} \left(\left(L - \frac{t}{k(n+1)} M \right)^{-1} L \right)^{k(n+1)} u_0 + \\ + \lim_{k\to\infty} M^{-1} \left(L \left(L - \frac{t}{k(n+1)} M \right)^{-1} \right)^{k(n+1)} f - M^{-1} f. \quad (2.8)$$

Доказательство непосредственно вытекает из теорем 2.3–2.6. Отметим лишь, что (2.7) задает фазовое пространство $\mathfrak{M}_f$ системы (0.1), а формула (2.8) совпадает с формулой теоремы 1.2.

Замечание 2.6. Поскольку все наши построения основаны на формуле

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{t}{k}\right)^k = e^t,$$

то ожидать оценок сходимости лучших, чем $\mathrm{const} \cdot k^{-1}$, не приходится. Однако при расчете конкретных примеров такая сходимость вполне удовлетворительна.

3. Пример Леонтьева

Пусть матрицы L и M имеют вид

$$L = \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{21}{200} \\ \frac{1}{100} & \frac{103}{200} & \frac{8}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{5} & \frac{-11}{20} \\ \frac{-7}{25} & \frac{10304189}{11996000} & \frac{-70836357}{119960000} \\ \frac{-4}{15} & \frac{-2}{5} & \frac{13}{15} \end{bmatrix}.$$

Если переобозначить $L = B$, $M = \mathbb{I} - A$, то матрицы B и A почти совпадут с матрицами из классического примера [1]. Слово "почти" означает, что элементы m_{22} и m_{23} подобраны специально с целью упростить вычисления и отличаются от приведенных в примере чисел $\frac{22}{25}$ и $\frac{-3}{5}$ на величины

$$m_{22} = \frac{22}{25} - \frac{-252291}{11996000}, \quad m_{23} = \frac{-3}{5} - \frac{1139643}{119960000}. \qquad (3.1)$$

Найдем L-спектр оператора M $\sigma^L(M) = \{0,2; 2,7\}$. Именно для того, чтобы точки L-спектра оператора M были рациональными числами, сделаны поправки (3.1). Точки L-спектра оператора M в исходном примере иррациональны и отличаются от найденных чуть больше, чем на одну сотую. Итак, оператор M L-регулярен.

Найдем фазовое пространство системы (0.1)

$$\mathfrak{M}_f = \{u \in \mathfrak{U} : 4u_1 + 6u_2 = 13u_3 + 15f_3\}.$$

Был проведен расчет для задачи (0.1), (0.2) по теоремам 1.2 и 2.6.

Замечание 3.1. В настоящее время по предложенному алгоритму авторами разработан программный продукт для расчета экономики коммунального хозяйства малых городов. Авторы выражают благодарность главе администрации г. Еманжелинска Ю.Я. Горбунову за предоставленную возможность реализовать теоретические результаты на практике.

Литература

1. Леонтьев В. *Межотраслевая экономика.* – М.: Экономика, 1997. – 324 с.
2. Бояринцев Ю.Е. *Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Новосибирск: Наука, 1988. – 157 с.
3. Павлов Б.В., Родионова О.Е. *Численное решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1994. – Т. 34. – № 4. – С. 622–627.
4. Свиридюк Г.А. *Линейные уравнения типа Соболева и сильно непрерывные полугруппы разрешающих операторов с ядрами* // Докл. РАН. – 1994. – Т. 337. – № 5. – С. 581-584.
5. Федоров В.Е. *Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 351. – № 3. – С. 316–318.
6. Федоров В.Е. *Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов* // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12. – № 3. – С. 173–200.
7. Свиридюк Г.А. *К общей теории полугрупп операторов* // УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 4. – С. 47–74.
8. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 536 с.

Челябинский государственный
университет

Поступили
первый вариант 01.02.2001
окончательный вариант 20.11.2001