ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

УДК 539.3

Н.Г. ГУРЬЯНОВ, О.Н. ТЮЛЕНЕВА

НЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ШАРА

В сферической системе координат α, β, r ($0 \le \alpha \le \pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$) построены и проинтегрированы разрешающие уравнения теории упругости для шара относительно перемещений.

К настоящему моменту имеется несколько точных решений краевых задач для случаев осесимметричной деформации шара, некоторые из этих задач, а также обзор существующих в этом направлении работ приведен в [1]. В этой же монографии при некоторых предположениях строится решение для несимметричной деформации шара, но оно не может считаться общим решением, т. к. в нем присутствуют "лишние" постоянные, которые предлагается считать равными нулю. Каких либо обоснований этого не дается, следовательно, константам можно придавать и другие значения. Возникает вопрос о единственности решения краевой задачи. Существенных результатов в более поздних работах этого направления, на наш взгляд, не достигнуто.

В данной работе построено общее решение для сплошного или полого шара, показано, как достраивать это решение для сегмента, не содержащего полюсов, для тела, ограниченного двумя параллелями и меридианами.

1. Построение разрешающих уравнений. В качестве исходных используем соотношения, приведенные в [2] при нулевых значениях объемных сил:

$$
\begin{gathered}
(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial r}-2\mu\left(\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\beta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_\beta}{\partial\alpha}-\frac{1}{r}\omega_\beta\operatorname{ctg}\alpha\right)=0,\\
\frac{(\lambda+2\mu)}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}-2\mu\left(\frac{\partial\omega_\beta}{\partial r}+\frac{1}{r}\omega_\beta-\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial\omega_r}{\partial\beta}\right)=0,\\
\frac{(\lambda+2\mu)}{r\sin\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta}-2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\omega_r}{\partial\alpha}-\frac{1}{r}\omega_\alpha-\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial r}\right)=0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь u, v, w — перемещения точек шара вдоль меридиана, параллели и в направлении от центра вдоль радиуса сферы, E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала,

$$
\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)}
$$

— коэффициенты Ляме,

$$
\theta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2w)+\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(u\sin\alpha)+\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}
\tag{2}
$$

— объемное расширение,

$$
\omega_r=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{1}{r}v\operatorname{ctg}\alpha\right),
\tag{3}
$$

$$
\omega_\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}v-\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right),\quad \omega_\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{1}{r}u-\frac{\partial u}{\partial r}\right)
$$

— компоненты вращения.

Уравнение относительно θ можно получить, подействовав на первое уравнение системы (1) оператором $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2(\ )]$, на второе — оператором $\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}[(\ )\sin\alpha]$, на третье — оператором $\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}(\ )$ и просуммировав затем эти уравнения, в итоге $\nabla^2\theta = 0$, где ∇^2 — оператор Лапласа в сферической системе координат:

$$\nabla^2\theta = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\sin\alpha\right) + \frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial^2\theta}{\partial\beta^2}\right].$$

С помощью соотношений (3) исключим из первого уравнения системы (1) компоненты вращения, затем избавимся, используя выражения для θ и ее производной по r, от перемещений u и v, тогда

$$\left(\nabla^2 + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\right)w + \left[\frac{1}{(1-2\nu)}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r}\right]\theta = 0.$$

Проделаем аналогичную процедуру со вторым уравнением системы (1)

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\right)u + \frac{1}{(1-2\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{2\cos\alpha}{r^2\sin^2\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} = 0,$$

а затем и с третьим

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\right)v + \frac{1}{(1-2\nu)}\frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} + \frac{2}{r^2\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{2\cos\alpha}{r^2\sin^2\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} = 0.$$

В итоге имеем систему разрешающих уравнений относительно θ, u, v, w и условие (2), связывающее их решения.

2. Решение системы уравнений. Ищется периодическое по координате β решение указанной системы уравнений. Не нарушая общности постановки, можно считать

$$\begin{aligned}
\theta(\alpha,\beta,r) &= \sum_{m=0}^{\infty}\theta_m(\alpha,r)\cos m\beta,\\
w(\alpha,\beta,r) &= -\frac{1}{(1-2\nu)}\sum_{m=0}^{\infty}w_m(\alpha,r)\cos m\beta,\\
u(\alpha,\beta,r) &= -\frac{1}{(1-2\nu)}\sum_{m=0}^{\infty}u_m(\alpha,r)\cos m\beta,\\
v(\alpha,\beta,r) &= -\frac{1}{(1-2\nu)}\sum_{m=1}^{\infty}v_m(\alpha,r)\sin m\beta.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тогда относительно коэффициентов рядов (4) имеем систему уравнений

$$\begin{gathered}
\nabla_m^2\theta_m = 0, \quad \left(\nabla_m^2 + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\right)w_m = \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2(1-2\nu)}{r}\right]\theta_m,\\
\left(\nabla_m^2 - \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\right)u_m = \frac{1}{r}\frac{\partial\theta_m}{\partial\alpha} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial w_m}{\partial\alpha} + \frac{2m\cos\alpha}{r^2\sin^2\alpha}v_m,\\
\left(\nabla_m^2 - \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\right)v_m = -\frac{m}{r\sin\alpha}\theta_m + \frac{2m}{r^2\sin\alpha}w_m + \frac{2m\cos\alpha}{r^2\sin^2\alpha}u_m,
\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\nabla_m^2 \equiv \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\alpha}\right].$$

Кроме того, из соотношения (2) следует

$$(1-2\nu)\theta_m + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 w_m\right) + \frac{1}{r\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(u_m\sin\alpha\right) + \frac{m}{r\sin\alpha}v_m = 0. \tag{6}$$

Для решения первого уравнения системы (5) используем методику, приведенную в [3].

Предполагается, что

$$\theta_m = \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}(\alpha)\, B_n(r).$$

Подставляем это выражение в первое уравнение системы (5) и требуем, чтобы функция $B_n(r)$ удовлетворяла уравнению

$$\frac{1}{B_n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial B_n}{\partial r}\right) = n(n+1).$$

Тогда относительно функции $A_{mn}(\alpha)$ получаем уравнение

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dA_{mn}}{d\alpha}\sin\alpha\right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\alpha}\right]A_{mn} = 0, \tag{7}$$

общее решение которого имеет вид ([4], с. 1029) $A_{mn} = L_{mn}P_n^m(\cos\alpha) + N_{mn}Q_n^m(\cos\alpha)$, где $P_n^m(\cos\alpha)$, $Q_n^m(\cos\alpha)$ — присоединенные функции Лежандра (шаровые функции).

Общее решение предыдущего уравнения можно представить в виде $B_n = C_{1n}r^n + C_{2n}r^{-(n+1)}$. Очевидно,

$$\theta_m = \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_{1n}r^n + C_{2n}r^{-(n+1)}\right)\left[L_{mn}P_n^m(\cos\alpha) + N_{mn}Q_n^m(\cos\alpha)\right].$$

Здесь C_{1n}, C_{2n}, L_{mn}, N_{mn} — постоянные интегрирования.

Если изучаемая область содержит хотя бы один из полюсов, то следует положить $N_{mn} = 0$, иначе решение в полюсах неограниченно возрастает. Если область не содержит полюсов сферы, то $N_{mn} \neq 0$, и используется при выполнении граничных условий. При рассмотрении сплошного шара приходится считать $C_{2n} = 0$, для полого шара $C_{2n} \neq 0$.

Поскольку в дальнейшем рассматривается сферический резервуар в виде полого шара, ограниченное в полюсах решение первого уравнения системы (5) можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered}\theta_m = \sum_{n=0}^{\infty}\theta_{mn}(r)\, P_n^m(\cos\alpha),\\ \theta_{mn} = C_{mn}^1 r^n + C_{mn}^2 r^{-(n+1)}.\end{gathered} \tag{8}$$

Решение второго уравнения системы (5) ищется в виде

$$w_m = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} w_{mn}(r)\, P_n^m(\cos\alpha). \tag{9}$$

После подстановки этого выражения в решаемое уравнение имеем

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{4}{r}\frac{d}{dr} + \frac{2}{r^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right)w_{mn} = 2\left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2(1-2\nu)}{r}\right]\theta_{mn}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$w_{mn} = \frac{(n-2+4\nu)}{(2n+3)}C_{mn}^1 r^{n+1} + \frac{(n+3-4\nu)}{(2n-1)}C_{mn}^2 r^{-n} + C_{mn}^3 r^{n-1} + C_{mn}^4 r^{-(n+2)}.$$

Рассмотрим сумму и разность третьего и четвертого уравнений системы (5)

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) - \frac{m^2+1\pm 2m\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right](u_m \pm v_m) = \\ = r\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} \mp \frac{m}{\sin\alpha}\right)\theta_m - 2\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} \mp \frac{m}{\sin\alpha}\right)w_m.\end{aligned} \tag{10}$$

Теорема. *Фундаментальной системой решений уравнения*

$$\left[\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+n\left(n+1\right)-\frac{m^2+1+2m\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]\Phi=0 \tag{11}$$

при $n>0$, $m\le n$ *является пара функций*

$$\Phi_1=\frac{dP_n^m\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha}-\frac{m}{\sin\alpha}P_n^m\left(\cos\alpha\right),\quad \Phi_2=\frac{dQ_n^m\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha}-\frac{m}{\sin\alpha}Q_n^m\left(\cos\alpha\right).$$

Доказательство. Дифференцируем следующее из уравнения (7) тождество

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left[\sin\alpha\frac{dP_n^m\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha}\right]+\left[n\left(n+1\right)-\frac{m^2}{\sin^2\alpha}\right]P_n^m\left(\cos\alpha\right)\equiv 0, \tag{$*$}$$

тогда

$$\frac{d^3P_n^m\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha^3}+\operatorname{ctg}\alpha\frac{d^2P_n^m\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha^2}+\left(n\left(n+1\right)-\frac{m^2}{\sin^2\alpha}\right)\frac{dP_n^m\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha}-$$
$$-\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{dP_n^m\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha}+\frac{2m^2\cos\alpha}{\sin^3\alpha}P_n^m\left(\cos\alpha\right)\equiv 0. \tag{12}$$

После подстановки функции Φ_1 и ее производных в уравнение (11) и упрощений с использованием тождеств ($*$) и (12), убеждаемся, что это уравнение выполняется тождественно.

Следовательно, Φ_1 — решение рассматриваемого уравнения.

Поскольку используемые в ходе доказательства теоремы формулы для функции $P_n^m\left(\cos\alpha\right)$ идентичны формулам для $Q_n^m\left(\cos\alpha\right)$, функция Φ_2 также является решением уравнения (11).

Вычислим вронскиан этих функций:

$$\Phi_1\frac{d\Phi_2}{d\alpha}-\Phi_2\frac{d\Phi_1}{d\alpha}=\left[\frac{dP_n^m\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha}-\frac{m}{\sin\alpha}P_n^m(\cos\alpha)\right]\biggl\{-\frac{(m+\cos\alpha)}{\sin\alpha}\frac{dQ_n^m(\cos\alpha)}{d\alpha}-$$
$$-\left[n(n+1)-\frac{m(m+\cos)}{\sin^2\alpha}\right]Q_n^m(\cos\alpha)\biggr\}-$$
$$-\left[\frac{dQ_n^m(\cos\alpha)}{d\alpha}-\frac{m}{\sin\alpha}Q_n^m(\cos\alpha)\right]\biggl\{-\frac{(m+\cos\alpha)}{\sin\alpha}\frac{dP_n^m(\cos\alpha)}{d\alpha}-$$
$$-\left[n(n+1)-\frac{m(m+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha)\biggr\}=$$
$$=n(n+1)\left[P_n^m(\cos\alpha)\frac{dQ_n^m(\cos\alpha)}{d\alpha}-Q_n^m(\cos\alpha)\frac{dP_n^m(\cos\alpha)}{d\alpha}\right].$$

Полученное выражение в области $\alpha\in(0,\pi)$ не равно нулю при $n>0$ в силу линейной независимости функций $P_n^m\left(\cos\alpha\right)$ и $Q_n^m\left(\cos\alpha\right)$. Следовательно, функции Φ_1, Φ_2 линейно независимы в указанной области. □

Решение первого из уравнений системы (10) ищем в виде

$$u_m+v_m=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}g_{mn}\left(r\right)\left[\frac{dP_n^m\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha}-\frac{m}{\sin\alpha}P_n^m\left(\cos\alpha\right)\right], \tag{13}$$

из доказанной теоремы следует, что коэффициент g_{mn} определяется уравнением

$$\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dg_{mn}}{dr}\right)-n\left(n+1\right)g_{mn}\right]=2\left[r\theta_{mn}-w_{mn}\right].$$

Пусть $g_{mn}\left(r\right)=g_{mn}^{\text{од}}\left(r\right)+g_{mn}^{\text{ч}}\left(r\right)$, можно показать, что в этом случае

$$g_{mn}^{\text{од}}\left(r\right)=C_{mn}^5r^n+C_{mn}^6r^{-(n+1)}, \tag{14}$$

$$g^{\text{ч}}_{mn} = \frac{[n+1+4(1-\nu)]}{(n+1)(2n+3)} C^1_{mn} r^{n+1} - \frac{[n-4(1-\nu)]}{n(2n-1)} C^2_{mn} r^{-n} + \frac{C^3_{mn}}{n} r^{n-1} - \frac{C^4_{mn}}{(n+1)} r^{-(n+2)}.$$

Представляя решение второго уравнения системы (10) в виде

$$u_m - v_m = \frac{1}{2(1-2\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(r) \left[\frac{dP^m_n(\cos\alpha)}{d\alpha} + \frac{m}{\sin\alpha} P^m_n(\cos\alpha) \right] \tag{15}$$

и используя доказанную теорему, устанавливаем, что коэффициент e_{mn} определяется тем же уравнением, что и g_{mn}, тогда $e_{mn}(r) = e^{\text{од}}_{mn}(r) + e^{\text{ч}}_{mn}(r)$, причем $e^{\text{од}}_{mn}(r) = C^7_{mn} r^n + C^8_{mn} r^{-(n+1)}$, $e^{\text{ч}}_{mn}(r) = g^{\text{ч}}_{mn}(r)$.

Вычисляя сумму и разность выражений (13) и (15), определяем

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{1}{4}\Big\{ [g^{\text{од}}_{mn}(r) + e^{\text{од}}_{mn}(r) + 2g^{\text{ч}}_{mn}(r)] \frac{dP^m_n(\cos\alpha)}{d\alpha} - \\ &\quad - [g^{\text{од}}_{mn}(r) - e^{\text{од}}_{mn}(r)] \frac{m}{\sin\alpha} P^m_n(\cos\alpha) \Big\}, \\ v_m &= \frac{1}{4}\Big\{ [g^{\text{од}}_{mn}(r) - e^{\text{од}}_{mn}(r)] \frac{dP^m_n(\cos\alpha)}{d\alpha} - \\ &\quad - [g^{\text{од}}_{mn}(r) + e^{\text{од}}_{mn}(r) + 2g^{\text{ч}}_{mn}(r)] \frac{m}{\sin\alpha} P^m_n(\cos\alpha) \Big\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя выражения (8), (9), (16) в соотношение (6), имеем

$$\begin{aligned} -2(1-2\nu) r\theta_{mn} P^m_n(\cos\alpha) &= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2 w_{mn}\right) P^m_n(\cos\alpha) + \\ &+ \frac{1}{2}[g^{\text{од}}_{mn} + e^{\text{од}}_{mn} + 2g^{\text{ч}}_{mn}] \frac{1}{\sin\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{dP^m_n(\cos\alpha)}{d\alpha}\sin\alpha\right] - \\ &- \frac{1}{2}[g^{\text{од}}_{mn} - e^{\text{од}}_{mn}] \frac{m}{\sin\alpha}\frac{dP^m_n(\cos\alpha)}{d\alpha} + \frac{1}{2}[g^{\text{од}}_{mn} - e^{\text{од}}_{mn}] \frac{m}{\sin\alpha}\frac{dP^m_n(\cos\alpha)}{d\alpha} - \\ &- \frac{1}{2}[g^{\text{од}}_{mn} + e^{\text{од}}_{mn} + 2g^{\text{ч}}_{mn}] \frac{m^2}{\sin^2\alpha} P^m_n(\cos\alpha) \end{aligned}$$

или

$$-2(1-2\nu) r\theta_{mn} P^m_n(\cos\alpha) = \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r^2 w_{mn}\right) - \frac{1}{2}[g^{\text{од}}_{mn} + e^{\text{од}}_{mn} + 2g^{\text{ч}}_{mn}]\, n(n+1)\right] P^m_n(\cos\alpha).$$

Убеждаемся, что оно выполняется при условии

$$g^{\text{од}}_{mn}(r) + e^{\text{од}}_{mn}(r) \equiv 0,$$

т. е. при $C^7_{mn} = -C^5_{mn}$, $C^8_{mn} = -C^6_{mn}$. Таким образом, определены значения "лишних" постоянных интегрирования, появившихся в результате дополнительного дифференцирования при получении уравнения относительно θ. Итак,

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{1}{2}\left[g^{\text{ч}}_{mn}(r)\frac{dP^m_n(\cos\alpha)}{d\alpha} - g^{\text{од}}_{mn}(r)\frac{m}{\sin\alpha}P^m_n(\cos\alpha)\right], \\ v_m &= \frac{1}{2}\left[g^{\text{од}}_{mn}(r)\frac{dP^m_n(\cos\alpha)}{d\alpha} - g^{\text{ч}}_{mn}(r)\frac{m}{\sin\alpha}P^m_n(\cos\alpha)\right]. \end{aligned}$$

Перемещения точек шара зависят от шести постоянных интегрирования $C^1_{mn} \div C^6_{mn}$, их достаточно для выполнения краевых условий на внешней и внутренней поверхностях шара.

В случае осесимметричной деформации шара $m=0$, $v\equiv 0$,

$$\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\theta_0 P_n\left(\cos\alpha\right),\theta_0=C_{0n}^1 r^n+C_{0n}^2 r^{-(n+1)},$$

$$w=-\frac{1}{2\left(1-2\nu\right)}\sum_{n=0}^{\infty}w_{0n}\left(r\right)P_n\left(\cos\alpha\right),$$

$$w_{0n}=\frac{(n-2+4\nu)}{(2n+3)}C_{0n}^1 r^{n+1}+\frac{(n+3-4\nu)}{(2n-1)}C_{0n}^2 r^{-n}+C_{0n}^3 r^{n-1}+C_{0n}^4 r^{-(n+2)}.$$

Перемещение u выгоднее вычислять непосредственно из соотношения (2):

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}(u\sin\alpha)=r\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 w)=$$

$$=\frac{1}{2(1-2\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{2(1-2\nu)[C_{0n}^1 r^{n+1}+C_{0n}^2 r^{-n}]+\frac{(n-2+4)(n+3)}{(2n+3)}C_{0n}^1 r^{n+1}-\right.$$

$$\left.-\frac{(n+3-4\nu)(n-2)}{(2n-1)}C_{0n}^2 r^{-n}+C_{0n}^3(n+1)r^{n-1}-C_{0n}^4 n r^{-(n+2)}\right\}P_n(\cos\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2(1-2\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{n(n+5-4\nu)}{(2n+3)}C_{0n}^1 r^{n+1}+C_{0n}^3(n+1)r^{n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{(n-4+4\nu)}{(2n-1)n}C_{0n}^2 r^{-n}-C_{0n}^4 n r^{-(n+2)}\right\}P_n(\cos\alpha).$$

Остается проинтегрировать полученное выражение. Поскольку

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{dP_n(\cos\alpha)}{d\alpha}\sin\alpha\right]+n(n+1)P_n(\cos\alpha)=0,$$

$$u=-\frac{1}{2(1-2\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(n+5-4\nu)}{(2n+3)(n+1)}C_{0n}^1 r^{n+1}+\frac{C_{0n}^3}{n}r^{n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{(n-4+4\nu)}{(2n-1)n}C_{0n}^2 r^{-n}-\frac{C_{0n}^4}{(n+1)}r^{-(n+2)}\right\}\frac{dP_n(\cos\alpha)}{d\alpha}+\frac{K(r)}{\sin\alpha},$$

$K\left(r\right)$ — произвольная функция.

Функция u будет ограниченной в полюсах, если $K\left(r\right)\equiv 0$. Итак, при $m=0$

$$u=-\frac{1}{2(1-2\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(n+5-4\nu)}{(2n+3)(n+1)}C_{0n}^1 r^{n+1}+\frac{C_{0n}^3}{n}r^{n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{(n-4+4\nu)}{(2n-1)n}C_{0n}^2 r^{-n}-\frac{C_{0n}^4}{(n+1)}r^{-(n+2)}\right\}\frac{dP_n(\cos\alpha)}{d\alpha}.$$

Это же выражение для u получается из первого соотношения (16) при условиях $C_{0n}^5=C_{0n}^6=C_{0n}^7=C_{0n}^8=0$. Перемещения точек шара зависят от четырех постоянных интегрирования $C_{mn}^1\div C_{mn}^4$, но и граничных условий на сферических поверхностях при осесимметричной деформации тоже четыре.

Остается рассмотреть последний случай $m=n=0$. Поскольку $P_0^0\left(\cos\alpha\right)=P_0\left(\cos\alpha\right)=1$, имеем

$$\theta=C_{00}^1+C_{00}^2 r^{-1},$$

$$w=-\frac{1}{2\left(1-2\nu\right)}\left[-\frac{2\left(1-2\nu\right)}{3}C_{00}^1 r-\left(3-4\nu\right)C_{00}^2+C_{00}^3 r^{-1}+C_{00}^4 r^{-2}\right].$$

Подставляем эти выражения в условие (2):

$$C_{00}^{1}+C_{00}^{2}r^{-1}=-\frac{1}{2\left(1-2\nu\right)}\left[-2\left(1-2\nu\right)C_{00}^{1}-2\left(3-4\nu\right)C_{00}^{2}r^{-1}+C_{00}^{3}r^{-2}+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(u_{00}\sin\alpha\right)\right].$$

Нетрудно заметить, что ограниченное в обоих полюсах решение реализуется только при $u_{00}\equiv 0$, $C_{00}^{2}=C_{00}^{3}=0$. Таким образом,

$$\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\theta_{mn}\left(r\right)P_{n}^{m}\left(\cos\alpha\right)\cos m\beta,$$

$$w=-\frac{1}{2\left(1-2\nu\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}w_{mn}\left(r\right)P_{n}^{m}\left(\cos\alpha\right)\cos m\beta,$$

$$u=-\frac{1}{2\left(1-2\nu\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left[g_{mn}^{\text{ч}}\left(r\right)\frac{dP_{n}^{m}\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha}-g_{mn}^{\text{од}}\left(r\right)\frac{m}{\sin\alpha}P_{n}^{m}\left(\cos\alpha\right)\right],$$

$$v=-\frac{1}{2\left(1-2\nu\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left\{g_{mn}^{\text{од}}\left(r\right)\frac{dP_{n}^{m}\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha}-g_{mn}^{\text{ч}}\left(r\right)\frac{m}{\sin\alpha}P_{n}^{m}\left(\cos\alpha\right)\right\},$$

где $\theta_{00}=C_{00}^{1}$, $w_{00}=-\frac{2(1-2\nu)}{3}C_{00}^{1}r+C_{00}^{4}r^{-2}$, остальные коэффициенты определены соотношениями (8), (9), (14).

Отметим, что вторая из сумм является конечной, поскольку при $m>n \quad P_{n}^{m}\left(\cos\alpha\right)\equiv 0$.

Напряжения в шаре определяются из соотношений закона Гука

$$\sigma_{rr}=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial r},\quad \sigma_{\alpha\alpha}=\lambda\theta+\frac{2\mu}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+w\right),$$

$$\sigma_{\beta\beta}=\lambda\theta+\frac{2\mu}{r}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+w+u\operatorname{ctg}\alpha\right),\quad \sigma_{\alpha r}=\frac{\mu}{r}\left(r^{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right)+\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right),$$

$$\sigma_{\beta r}=\frac{\mu}{r}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}+r^{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right),\quad \sigma_{\alpha\beta}=\frac{\mu}{r}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}-v\operatorname{ctg}\alpha\right).$$

Поскольку в приведенном выше примере реализуется осесимметричная деформация шара, выражения для напряжений приведем только для этого случая.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}=-\frac{E}{2\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\Bigg\{&-\frac{2\left(1+\nu\right)}{3}C_{00}^{1}-2C_{00}^{4}r^{-3}+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\left(n-1\right)-2\left(1+\nu\right)}{\left(2n+3\right)}C_{0n}^{1}r^{n}+\left(n-1\right)C_{0n}^{3}r^{n-2}-\right.\\&\left.-\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)-2\left(1+\nu\right)}{\left(2n-1\right)}C_{0n}^{2}r^{-(n+1)}-\left(n+2\right)C_{0n}^{4}r^{-(n+3)}\right]P_{n}\left(\cos\alpha\right)\Bigg\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha r}=-\frac{E}{2\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\sum_{n=1}^{\infty}&\left[\frac{\left(n+3\right)\left(n-1\right)+2\left(1+\nu\right)}{\left(n+1\right)\left(2n+3\right)}C_{0n}^{1}r^{n}+\frac{\left(n-1\right)}{n}C_{0n}^{3}r^{n-2}+\right.\\&\left.+\frac{\left(n+2\right)\left(n-2\right)+2\left(1+\nu\right)}{n\left(2n-1\right)}C_{0n}^{2}r^{-(n+1)}+\frac{\left(n+2\right)}{\left(n+1\right)}C_{0n}^{4}r^{-(n+3)}\right]\frac{dP_{n}\left(\cos\alpha\right)}{d\alpha},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\Bigg\{&\frac{2\left(1+\nu\right)}{3}C_{00}^{1}-C_{00}^{4}r^{-3}+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n\left(n+4\right)+2\left(1+\nu\right)}{\left(2n+3\right)}C_{0n}^{1}r^{n}+nC_{0n}^{3}r^{n-2}-\right.\right.\\&\left.-\frac{\left(n+1\right)\left(n-3\right)+2\left(1+\nu\right)}{\left(2n-1\right)}C_{0n}^{2}r^{-(n+1)}-\left(n+1\right)C_{00n}^{4}r^{-(n+3)}\right)P_{n}\left(\cos\alpha\right)+\end{aligned}$$

$$
+\left(\frac{n+1+4(1-\nu)}{(n+1)(2n+3)}C_{0n}^1 r^n+\frac{1}{n}C_{mn}^3 r^{n-2}-\right.
$$
$$
\left.\left.-\frac{n-4(1-\nu)}{n(2n-1)}C_{0n}^2 r^{-(n+1)}-\frac{1}{(n+1)}C_{0n}^4 r^{-(n+3)}\right)\frac{dP_n(\cos\alpha)}{d\alpha}\operatorname{ctg}\alpha\right]\Bigg\},
$$
$$
\sigma_{\beta\beta}=-\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{-\frac{2(1+\nu)}{3}C_{00}^1+C_{00}^4 r^{-3}+\right.
$$
$$
+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n-2-2\nu(2n+1)}{(2n+3)}C_{0n}^1 r^n+C_{0n}^3 r^{n-2}+\right.\right.
$$
$$
\left.+\frac{(n+3-2\nu(2n+1))}{(2n-1)}C_{0n}^2 r^{-(n+1)}+C_{0n}^4 r^{-(n+3)}\right)P_n(\cos\alpha)+
$$
$$
+\left(\frac{n+1+4(1-\nu)}{(n+1)(2n+3)}C_{0n}^1 r^n+\frac{1}{n}C_{0n}^3 r^{n-2}-\right.
$$
$$
\left.\left.-\frac{n-4(1-\nu)}{n(2n-1)}C_{0n}^2 r^{-(n+1)}-\frac{1}{(n+1)}C_{0n}^4 r^{-(n+3)}\right)\frac{dP_n(\cos\alpha)}{d\alpha}\operatorname{ctg}\alpha\right]\Bigg\}.
$$

3. Пример. Шар, внешний радиус которого a, внутренний — b, заполнен жидкостью удельного веса γ и покоится на опоре, представляющей собой линию $\alpha=\alpha_1$, $r=a$. Реакция опоры направлена вдоль радиуса шара к его центру. Тогда краевые условия на внутренней поверхности шара имеют вид

$$
\sigma_{rr}(\alpha,b)=b\gamma(1-\cos\alpha)=b\gamma\left[1-P_1(\cos\alpha)\right],\quad \sigma_{\alpha r}(\alpha,b)=0.
$$

На внешней поверхности шара должны выполняться условия

$$
\sigma_{rr}(\alpha,a)=\frac{2}{3}\frac{\gamma}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}\frac{b^3}{a^2}\delta(\alpha-\alpha_1),\quad \sigma_{\alpha r}(\alpha,a)=0;
$$

здесь $\delta(\alpha-\alpha_1)$ — дельта-функция Дирака. Нетрудно проверить, что силы реакции опоры компенсируют действие веса жидкости.

Чтобы исключить смещение шара как твердого целого, потребуем выполнения условия

$$
w(\alpha_1,a)=0. \tag{17}
$$

Требуется узнать, как изменится форма шара после заполнения его жидкостью.

После представления функции Дирака в виде формального разложения [4]:

$$
\delta(\alpha-\alpha_1)=\frac{\sin\alpha_1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\alpha_1)P_n(\cos\alpha), \tag{18}
$$

и выполнения краевых условий для напряжений приходим к отдельной для каждого n системе линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования. При $n=0$ для выполнения граничных условий достаточно двух постоянных интегрирования, т. к. для $\sigma_{\alpha r}$ краевые условия выполняются тождественно на обеих поверхностях шара. Итак,

$$
C_{00}^1=-\frac{(1-2\nu)}{\cos\alpha_1}\frac{\gamma}{E}\frac{(a+3b\cos\alpha_1)b^3}{(a^3-b^3)},
$$
$$
C_{00}^4=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{3\cos\alpha_1}\frac{\gamma}{E}\frac{ab^4}{(a^3-b^3)}\left(b^2+3a^2\cos\alpha_1\right).
$$

Для случая $n=1$ константа C_{01}^3 присутствует только в соотношениях для перемещений, следовательно, в формулы для напряжений входят три постоянные. Но при выполнении граничных условий выясняется, что из четырех уравнений относительно постоянных одно является линейной комбинацией остальных, это позволяет получить единственное решение для постоянных

$$C_{01}^1 = -\frac{5\,(1-2\nu)^2}{3\,(1-\nu)}\frac{\gamma}{E}\frac{b^3\,(a+b)}{(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)},$$
$$C_{01}^2 = -\frac{(1+\nu)\,(1-2\nu)}{3\,(1-\nu)}\frac{\gamma b^3}{E},$$
$$C_{01}^4 = -\frac{2\,(1+\nu)\,(1-2\nu)^2}{9\,(1-\nu)}\frac{\gamma}{E}\frac{b^5a^2\,(a^2+ab+b^2)}{(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)}.$$

Для остальных n значения постоянных не приводятся ввиду их громоздкости.

Из граничного условия (17) находится C_{01}^3. В результате получаем формулу

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{1}{3}C_{00}^1\left(r - a\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}\right) - \frac{1}{2\,(1-2\nu)}C_{00}^4\left(r^{-2} - a^{-2}\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}\right) - \\ & - \frac{1}{10\,(1-2\nu)}\left[-(1-4\nu)\,C_{01}^1\left(r^2-a^2\right) + 20\,(1-\nu)\,C_{02}^2\left(r^{-1}-a^{-1}\right) + 5C_{01}^4\left(r^{-3}-a^{-3}\right)\right]P_1\left(\cos\alpha\right) - \\ & - \frac{1}{2\,(1-2\nu)}\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{(n-2+4\nu)}{(2n+3)}C_{0n}^1\left[r^{n+1}P_n\left(\cos\alpha\right) - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}a^{n+1}P_n\left(\cos\alpha_1\right)\right] + \right. \\ & + \frac{(n+3-4\nu)}{(2n-1)}C_{0n}^2\left[r^{-n}P_n\left(\cos\alpha\right) - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}a^{-n}P_n\left(\cos\alpha_1\right)\right] + \\ & + C_{0n}^3\left[r^{n-1}P_n\left(\cos\alpha\right) - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}a^{n-1}P_n\left(\cos\alpha_1\right)\right] + \\ & \left. + C_{0n}^4\left[r^{-(n+2)}P_n\left(\cos\alpha\right) - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}a^{-(n+2)}P_n\left(\cos\alpha_1\right)\right]\right\}, \qquad (19) \end{aligned}$$

которая дает возможность определить радиальные смещения как точек поверхностей, ограничивающих резервуар, так и внутренних его точек, т. е. получить измененную весом жидкости форму резервуара.

Если считать ряд (18) сходящимся во всех точках исследуемой области, кроме $\alpha = \alpha_1$, то ряд (19) сходится во всех точках области $\alpha \in (0, \pi)$. Действительно, сумма ряда при $\alpha = \alpha_1$ равна a, что следует из (17). Сходимость в остальных точках области следует из признака Абеля, т. к. общий член ряда (19) представляет собой произведение n-го члена ряда (17) и последовательности, убывающей быстрее, чем $\{1/n\}$.

Литература

1. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. *Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного)*. – М.: Наука, 1978. – 462 с.
2. Партон В.З., Перлин П.И. *Методы математической теории упругости.* – М.: Наука, 1981. – 688 с.
3. Рекач В.Г. *Руководство к решению задач по теории упругости.* – М.: Высш. школа, 1966. – 227 с.
4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.

Казанский государственный университет

Поступила 23.03.2006