

УДК 519.63+517.977.58

О ЯВНОЙ СХЕМЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ШАГАМИ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.Д. Романенко

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В статье рассмотрена задача оптимального управления с линейным параболическим уравнением в качестве задачи состояния. Поточечные ограничения заданы на функцию управления. Целевой функционал включает в себя заданную функцию наблюдения во всей области и в каждый момент времени. Задача оптимального управления приближена конечномерной задачей с сеточной аппроксимацией уравнения состояния при помощи явной схемы с переменными шагами по времени. Доказано существование единственного решения для непрерывной и дискретной задач оптимального управления. Использован итерационный метод Удзавы для решения конечномерной задачи оптимального управления. Приведены результаты численных расчетов.

Ключевые слова: оптимальное управление, ограничение на управление, переменный шаг, итерационный метод

Введение

Одними из важных и исследуемых в настоящее время задач являются параболические задачи оптимального управления. В целом, как справедливо отмечено в статье [1], в отличие от эллиптических задач, параболические задачи с поточечными ограничениями на состояние являются еще малоизученными и недостаточно полно представлены в литературе. Например, можно указать на работу [2], в которой не только приведено теоретическое обоснование существования решения задачи, но и описаны алгоритмы, основанные на неявной аппроксимации уравнения состояния с использованием градиентных методов. Помимо этого, в [3, 4] исследуется сходимость итерационных методов для задачи с ограничением на производную по времени функции состояния.

Настоящая работа посвящена численному решению задачи оптимального управления с параболическим уравнением в качестве задачи состояния. Функции управления и наблюдения являются распределенными во всей области для каждого момента времени, причем в задаче присутствуют ограничения только на управление. Аппроксимация уравнения состояния основана на использовании метода конечных элементов для пространственного оператора и замене производной по времени на явное разностное отношение с переменными шагами. В этом случае нет необходимости решать на каждом слое систему линейных алгебраических уравнений, что также существенно сокращает время вычислений. Исследование сходной задачи с наличием ограничений не только на управление, но и на состояние системы вместе с наблюдением, которое было либо распределенным, либо финальным, а аппроксимация основывалась на использовании постоянного шага по времени, проведено в работе [5]. Вместе с тем имеется следующая техническая

сложность: приходится хранить большое количество промежуточных результатов, вычисленных в каждый момент времени. Этот недостаток частично устраняется за счет выбора переменных шагов, который позволяет без потери точности проводить вычисления при относительно малом задействованном объеме памяти. Схожая ситуация получается и при использовании неявной аппроксимации, которая, как известно, является абсолютно устойчивой.

В этой работе успешно удалось реализовать численный метод Удзавы [6–8], причем скорость сходимости данного метода не зависит от параметров сетки. Стоит отметить, что вычисления по явным формулам налагают строгие условия на выбор шагов по времени [9, 10] как в случае использования сетки с постоянным шагом, так и в случае переменных шагов. Несмотря на это, имеется алгоритм их перепорядочения с целью избавления от накопления ошибок округления. Приводятся доказательства существования и единственности решения задачи оптимального управления как для непрерывного случая, так и для его сеточного аналога получаемой седловой задачи, а также обосновывается сходимость численного метода Удзавы для ее решения. В конце статьи приводятся результаты численных экспериментов и их анализ.

1. Постановка задачи и ее аппроксимация

В цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T]$ с многоугольной областью в n -мерном евклидовом пространстве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, и границей $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T]$ рассмотрим начально-краевую задачу с граничным условием Дирихле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y &\equiv y_t - \Delta y = u \quad \text{в } Q_T, \\ y(x, t) &= 0 \quad \text{при } x \in \Gamma_T, \\ y(x, 0) &= 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

которая будет служить задачей состояния. Функции y и u из $L_2(Q_T)$ назовем функциями состояния и управления соответственно.

В обобщенном виде задача (1) определяется следующим интегральным тождеством:

$$\int_{Q_T} y_t \eta \, dt + \int_{Q_T} \nabla y \cdot \nabla \eta \, dx \, dt = \int_{Q_T} u \eta \, dx \, dt \quad \forall \eta \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (2)$$

Для $u \in L_2(Q_T)$ существует единственное обобщенное решение $y \in L_2(0, T; H_0^1(\Omega))$ задачи (2) такое, что $y_t \in L_2(Q_T)$, и справедлива оценка устойчивости [11]:

$$\|y\|_{L_2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|y_t\|_{L_2(Q_T)} \leq C_0 \|u\|_{L_2(Q_T)}. \quad (3)$$

Определим целевой функционал

$$J(y, u) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} (y(x, t) - z_d(x, t))^2 \, dx \, dt + \frac{\alpha}{2} \int_{Q_T} u^2 \, dx \, dt, \quad (4)$$

где $z_d(x, t) \in L_2(Q_T)$ – заданная функция, $\alpha > 0$ – параметр. Зададим множество ограничений на управление с постоянной $\bar{u} > 0$:

$$U_{\text{ad}} = \{u \in L_2(Q_T) : |u(x, t)| \leq \bar{u} \text{ для п.в. } (x, t) \in Q_T\}, \quad (5)$$

Будем решать задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} \min_{(y, u) \in K} J(y, u), \\ K = \{(y, u) : u \in U_{\text{ad}} \text{ и выполнено уравнение состояния (1)}\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Лемма 1. *Задача оптимального управления (6) имеет единственное решение.*

Доказательство. Множество ограничений $U_{\text{ад}}$ является выпуклым, замкнутым и ограниченным множеством. Отсюда, а также из линейности уравнения состояния (1) и неравенства устойчивости (3) следует выпуклость, замкнутость и ограниченность множества K . Функционал J – непрерывный и строго выпуклый на K . Из приведенных свойств K и J следует [12] существование единственного решения задачи (6). \square

Аппроксимируем интегральное тождество (2), используя метод конечных элементов по пространственным переменным и явную разностную аппроксимацию с переменными шагами по времени. Обозначим через $\mathcal{T}_h = \bigcup e_i$ конформную триангуляцию области $\bar{\Omega}$, где h – наибольшая из сторон треугольников $e_i \in \mathcal{T}_h$. Пусть P_k – пространство полиномов степени не выше k по совокупности переменных. Определим пространство сеточных функций $V_h = \{y_h \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : y(x) \in P_1 \text{ для всех } x \in e_i\}$.

Отрезок $[0, T]$ разобьем точками $\bar{\omega}_\tau = \{t_0 = 0, t_k = t_{k-1} + \tau_k, k = 1, 2, \dots, N_t\}$ такими, что $\tau_1 + \dots + \tau_{N_t} = T$. Введем обозначение для производной по времени $\bar{\partial}_t y_h = \frac{y_h(x, t_j) - y_h(x, t_{j-1})}{\tau_j} = \frac{y_h^j - y_h^{j-1}}{\tau_j}, j = 1, \dots, N_t$, для всех $x \in \Omega$.

Будем использовать составные квадратурные формулы для аппроксимации интегралов по переменным x и t . Именно, для непрерывных функций $\varphi(t)$ и $\psi(x)$ положим

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{j=1}^{N_t} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi(t) dt \approx \sum_{j=1}^{N_t} \tau_j \varphi(t_j),$$

$$\int_{\Omega} \psi(x) dx \approx S(\psi) = \sum_{e_i} S_i(\psi),$$

$$S_i(\psi) = \frac{1}{3} \text{meas}(e_i) \sum_{k=1}^3 \psi(x_k), \quad \{x_k\}_{k=1}^3 \text{ – вершины } e_i.$$

Всюду в дальнейшем для простоты будем считать $u(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$ и через u_h^j обозначим ее непрерывную и кусочно-линейную интерполяцию по x на временном слое t_j . Теперь сеточная аппроксимация (2) примет вид

$$\sum_{j=1}^{N_t} \tau_j S(\bar{\partial}_t y_h \eta_h^j) + \sum_{j=1}^{N_t} \tau_j S(\nabla y_h^{j-1} \cdot \nabla \eta_h^j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_t} \tau_j S(u_h^j \eta_h^j) \quad \forall \eta_h = (\eta_h^1, \dots, \eta_h^{N_t}), \quad \text{для всех } \eta_h^j \in V_h. \quad (7)$$

2. Дискретная задача оптимального управления и итерационный метод ее решения

Пусть $(\cdot, \cdot)_x$ и $\|\cdot\|_x$ – соответственно евклидово скалярное произведение и евклидова норма в пространстве \mathbb{R}^{N_x} , где N_x – размерность V_h . Будем использовать обозначения y, u, η, \dots для векторов узловых значений сеточных функций из V_h . Введем в рассмотрение матрицу масс M_x и матрицу жесткости A_x , соответствующую матрице дискретного оператора Лапласа, с помощью равенств $(M_x u, \eta)_x = S(u_h \eta_h)$ и $(A_x u, \eta)_x = S(\nabla u_h \cdot \nabla \eta_h)$. Тогда $S(\bar{\partial}_t y_h \eta_h) = (M_x \bar{\partial}_t y, \eta)_x$, и прежде

равенство (7) преобразуется в эквивалентное:

$$\sum_{j=1}^{N_t} \tau_j \left(M_x \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau_j} + A_x y^{j-1} - M_x u^j, \eta \right)_x = 0. \quad (8)$$

Зададим $N_x N_t \times N_x N_t$ матрицы

$$M = \text{diag} \{ \tau_1 M_x, \tau_2 M_x, \dots, \tau_{N_t} M_x \},$$

$$(Ly)^j = \left\{ M_x \frac{y^1}{\tau_1} \text{ при } j = 1; M_x \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau_j} + A_x y^{j-1} \text{ при } j = 2, \dots, N_t \right\},$$

Тогда из (8) получим равенство

$$Ly - Mu = 0. \quad (9)$$

Пусть функция z_d непрерывна. Определим целевую функцию

$$I_h(y_h, u_h) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_t} \tau_j S((y_h^j - z_d^j)^2) + \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{N_t} \tau_j S((u_h^j)^2) =$$

$$= \frac{1}{2} (M(y - z_d), y - z_d) + \frac{\alpha}{2} (Mu, u) \quad (10)$$

и множество ограничений

$$U_{\text{ad}}^h = \{ u : |u_h^j| \leq \bar{u} \text{ для всех компонент вектора } u \}. \quad (11)$$

Дискретный аналог задачи (6) – найти

$$K_h = \left\{ (y, u) : u \in U_{\text{ad}}^h \text{ и выполнено уравнение состояния (9)} \right\},$$

$$\min_{(y, u) \in K_h} I_h(y, u), \quad (12)$$

Лемма 2. *Существует единственное решение задачи (12).*

Доказательство. Множество K_h – выпуклый компакт, а квадратичная функция $I_h(y, u)$ непрерывна и строго выпукла на K_h . Отсюда следует утверждение леммы. \square

Пусть $\varphi(u)$ – индикаторная функция множества U_{ad}^h . Тогда дискретная задача оптимального управления (12) определяется как поиск

$$\min_{Ly=Mu} \{ I_h(y, u) + \varphi(u) \}.$$

Сстроим для этой задачи функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(y, u, \lambda) = I_h(y, u) + \varphi(u) + (\lambda, Ly - Mu),$$

седловая точка которой удовлетворяет [12] системе

$$\begin{pmatrix} M & 0 & L^T \\ 0 & \alpha M & -M \\ L & -M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial \varphi(u) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} M z_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Введем обозначения $z = (y, u)^T$, $f = (Mz_d, 0)^T$, $\Psi(z) = \varphi(u)$ и

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \alpha M \end{pmatrix}, \quad B = (L \quad -M).$$

Тогда новой записью (13) является

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial\Psi(z) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

При исследовании разрешимости задачи (14) используем следующий результат [13].

Предложение 1. Пусть выполнены следующие условия:

- Матрица $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ положительно полуопределена и положительно определена на ядре $\text{Ker } B$ матрицы B , (15)

- матрица $B \in \mathbb{R}^{s \times m}$ имеет полный ранг $\text{rank } B = s \leq m$, (16)

- $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ – выпуклая, собственная и полунепрерывная снизу функция, (17)

- $\{z \in \mathbb{R}^m : Bz = 0\} \cap \text{int dom } \Psi \neq \emptyset$. (18)

Тогда задача (14) имеет непустое множество решений $X = \{(z, \lambda)\}$, причем z определяется однозначно.

Для задачи (13) выполнены все условия (15)–(18).

Мы будем использовать следующий результат [13] о сходимости обобщенного метода Удзавы для задачи (14).

Предложение 2. Пусть матрица \mathcal{A} положительно определена на ядре матрицы B и выполнены условия (16)–(18). Если справедливо одно из следующих (эквивалентных) условий

$$(\mathcal{A}z, z) \geq \frac{(1 + \varepsilon)\rho}{2} (D^{-1}Bz, Bz) \quad \forall z \in \mathbb{R}^m \quad (19)$$

или

$$(D\lambda, \lambda) \geq \frac{(1 + \varepsilon)\rho}{2} (\mathcal{A}_s^{-1}B^T\lambda, B^T\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^s, \quad \mathcal{A}_s = 0.5(\mathcal{A} + \mathcal{A}^T) \quad (20)$$

с некоторым $\varepsilon > 0$ и с симметричной и положительно определенной матрицей D , то итерационный метод

$$\begin{aligned} \mathcal{A}z^{k+1} + \partial\Psi(z^{k+1}) &\ni B^T\lambda^k + f, \\ \frac{1}{\rho} D(\lambda^{k+1} - \lambda^k) + Bz^{k+1} &= 0, \quad \rho > 0, \end{aligned} \quad (21)$$

сходится для любого начального приближения $\lambda^0 : (z^k, \lambda^k) \rightarrow (z^*, \lambda^*) \in X$ при $k \rightarrow \infty$.

В случае задачи (13) матрица $B\mathcal{A}_s^{-1}B^T = LM^{-1}L^T + \alpha^{-1}M$. В силу устойчивости конечно-разностной аппроксимации уравнения состояния при используемых переменных шагах по времени [9] справедливо неравенство

$(M\xi, \xi) \leq c_0(LM^{-1}L^T\xi, \xi)$ с некоторой постоянной c_0 для всех ξ . Отсюда следует, что для симметричного и положительно определенного предобусловливателя $D_1 = LM^{-1}L^T$ неравенство (20) выполняется при $\rho < \frac{2\alpha}{\alpha + c_0}$. Следовательно, интервал допустимых значений итерационного параметра сужается при уменьшении $\alpha > 0$.

В расчетах мы использовали также симметричный и положительно определенный предобусловливатель $D_2 = (L + \alpha^{-1/2}M)M^{-1}(L^T + \alpha^{-1/2}M)$, который был предложен в [15] при решении рассматриваемой задачи при аппроксимации уравнения состояния явной разностной схемой с постоянным шагом. В этой же работе отмечено, что итерационный метод с этим предобусловливателем эффективнее, чем метод с предобусловливателем D_1 при малых $\alpha > 0$.

3. О выборе шагов по времени

В работе [9] указано, что при произвольном выборе параметров $\{\tau_k\}$, $(\tau_{k+N} = \tau_k)$ для итерационного метода Рундсона первого порядка $u^{k+1} = u^k + \tau_k(Au^k - f)$ во время вычислений накапливаются ошибки округлений и происходит стремительное возрастание нормы невязки. Во избежание этого используется рекуррентная процедура упорядочивания шагов, которая также описана в [14]. Основная идея данной процедуры заключается в нахождении корней $\{x_j\}_{j=1}^N$ полинома Чебышева $T_N(x_j) = \cos(N \cdot \arccos x_j) = 0$ степени N и дальнейшей перестановке параметров $\tau_j = 2(\mu_{\max}(A) + \mu_{\min}(A) - (\mu_{\max}(A) - \mu_{\min}(A))x_j)^{-1}$ по формуле для их номеров: $(\tau_{n_1}, \tau_{N+1-n_1}, \tau_{n_2}, \tau_{N+1-n_2}, \dots, \tau_{n_{N/2}}, \tau_{N+1-n_{N/2}})$.

Несмотря на жесткое ограничение для шагов, аппроксимация по явной схеме позволяет быстро найти решение задачи (12) по явным формулам, освобождая нас от решения системы линейных алгебраических уравнений на каждом слое t_k .

4. Реализация метода и результаты вычислений

Запишем метод Удзавы (21) для системы (13) в развернутом виде

$$\begin{aligned} My^{k+1} &= -L^T\lambda^k + Mz_d, \\ \alpha Mu^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) &\ni M\lambda^k, \\ D \frac{\lambda^{k+1} - \lambda^k}{\rho} &= Ly^{k+1} - Mu^{k+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Неизвестные (y, u, λ) ищем следующим образом. Для заданного начального приближения λ^0 последовательно на каждом шаге $k = 0, 1, 2, \dots$ находим пару (y^{k+1}, u^{k+1}) и затем новое значение λ^{k+1} , решая систему уравнений с матрицей D . Поскольку M – диагональная матрица с положительной диагональю, значения вектора y^{k+1} вычисляются по явным формулам. Далее, $\partial\varphi(u)$ – субдифференциал сепарабельной функции $\varphi(u)$ – является диагональным оператором, поэтому справедливо равенство $M^{-1}\partial\varphi(u) = \partial\varphi(u)$. Включение для u^{k+1} приобретает вид $\alpha u^{k+1} + \partial\varphi(u^{k+1}) \ni \lambda^k$. Его решение – это проекция вектора λ^k на множество U_{ad}^h , которая находится по явным формулам

$$u^{k+1} = \begin{cases} -\bar{u}, & \text{если } \alpha^{-1}\lambda^k < -\bar{u}, \\ \alpha^{-1}\lambda^k, & \text{если } \alpha^{-1}\lambda^k \in [-\bar{u}, \bar{u}], \\ \bar{u}, & \text{если } \alpha^{-1}\lambda^k > \bar{u}, \end{cases}$$

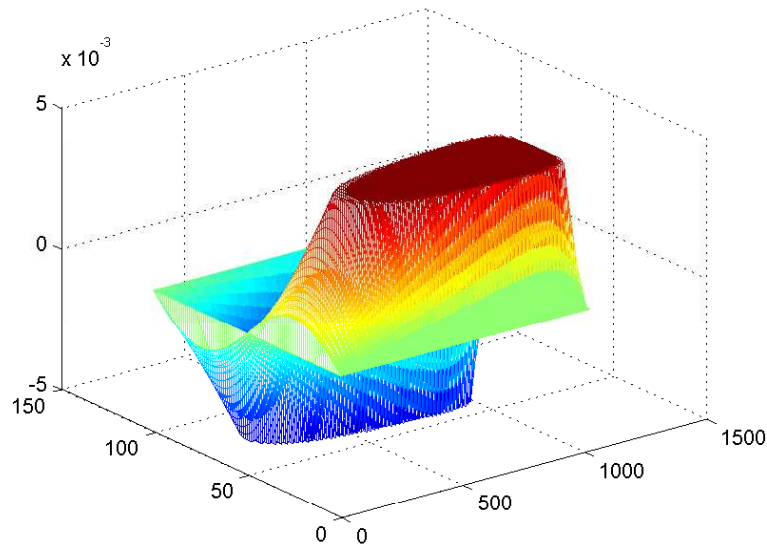


Рис. 1. Вид функции u , построенной при $N_x = 100$, $\alpha = 1$, $\rho = 0.5$ и предобусловливателе $D_2 = (L + \alpha^{-1/2}M)M^{-1}(L^T + \alpha^{-1/2}M)$

Наконец, вычисление вектора λ^{k+1} при выборе предобусловливателя как в виде $D_1 = LM^{-1}L^T$, так и в виде $D_2 = (L + \alpha^{-1/2}M)M^{-1}(L^T + \alpha^{-1/2}M)$ также проводится по явным формулам благодаря нижней треугольной форме матриц L и $(L + \alpha^{-1/2}M)$ и верхней треугольной форме матриц L^T и $(L^T + \alpha^{-1/2}M)$ для первого и второго предобусловливателей соответственно. Следует отметить, что использование переменных по времени сеточных шагов позволяет существенно сократить как время расчетов, так и объем используемой памяти.

Численные эксперименты проводились для одномерной по пространству задачи $x \in (0, 1)$ при $T = 1$. Задавались функция наблюдения $z_d(x, t) = 2t \sin(2\pi x)$ в области Q_T и ограничение на управление $U = \{|u(x, t)| \leq 0.005 \text{ для всех } (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1)\}$. Размерность сетки по пространству варьировалась, количество узлов выбиралось равным $N_{1x} = 50$, $N_{2x} = 100$ и $N_{3x} = 200$. Цикл переменных по времени шагов был $N_t = 16$. Общее количество узлов по времени было равно 1024, начальное приближение устанавливалось равным $\lambda^0 = 0$. Стоит также отметить, что в зависимости от значения коэффициента $\alpha/2$, стоящего перед управлением в функционале (4), варьируется длина интервала допустимых значений параметра ρ , при которых сходится итерационный метод. Эксперименты показывают, что при $\alpha = 1$ для пары (D_1, ρ_1) метод (21) сходится, когда $\rho_1 \in (0, 2)$, в то время как для (D_2, ρ_2) сходимость имеет место при $\rho_2 \in (0, 1.5)$. Условием остановки вычислений было достижение заданной точности для нормы невязки $\|Ly^k - Mu^k\| < \varepsilon$, где

$$\|v\| = \left(\sum_{(x_i, t_k)} v^2(x_i, t_k) h\tau_k \right)^{1/2}$$

является сеточной нормой, соответствующей норме в пространстве $L_2(Q_T)$. Полученные результаты представлены на рис. 1–3 и в табл. 1–4.

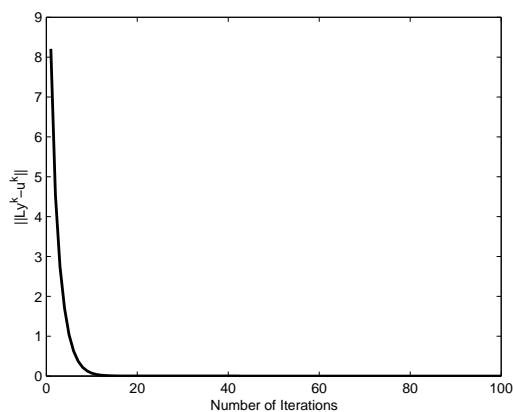


Рис. 2. Поведение невязки при $N_x = 100$, $\rho = 0.5$, $\alpha = 1$ и предобусловливателе $D_1 = LM^{-1}L^T$

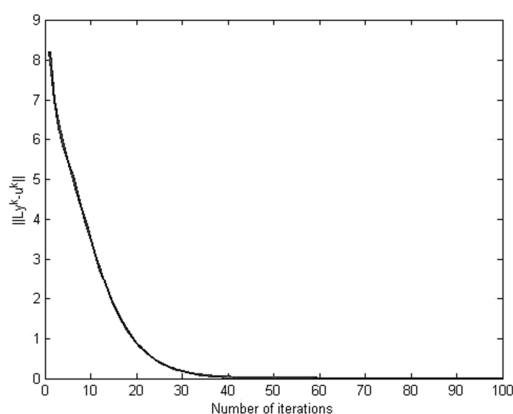


Рис. 3. Поведение невязки при $N_x = 100$, $\rho = 0.2$, $\alpha = 0.1$ и предобусловливателе $D_2 = (L + \alpha^{-1/2}M)M^{-1}(L^T + \alpha^{-1/2}M)$

Табл. 1

$$D_1 = LM^{-1}L^T, \rho_1 = 0.5, \alpha = 1, \varepsilon = 10^{-3}$$

Число узлов	$\ Ly^k - Mu^k\ $	Число итераций	Время вычислений, с
$N_{1x} = 50$	0.0006994	18	2.139
$N_{2x} = 100$	0.0005009	16	2.937
$N_{3x} = 200$	0.0006938	13	3.989

Табл. 2

$$D_1 = LM^{-1}L^T, \rho_1 = 0.2, \alpha = 0.1, \varepsilon = 10^{-3}$$

Число узлов	$\ Ly^k - Mu^k\ $	Число итераций	Время вычислений, с
$N_{1x} = 50$	0.0008177	51	5.451
$N_{2x} = 100$	0.0008726	43	7.7
$N_{3x} = 200$	0.0009006	35	10.236

Из таблиц видно, что с уменьшением в десять раз параметра $\alpha > 0$ уменьшается скорость сходимости примерно в три раза для каждого из предобусловливателей. Можно отметить, что в случае положительной определенности матрицы L справедливо неравенство $D_2 > BA^{-1}B^T$ при любом $\alpha > 0$, поэтому метод

Табл. 3

$$D_2 = (L + \alpha^{-1/2}M)M^{-1}(L^T + \alpha^{-1/2}M), \rho_2 = 0.5, \alpha = 1, \varepsilon = 10^{-3}$$

Число узлов	$\ Ly^k - Mu^k\ $	Число итераций	Время вычислений, с
$N_{1x} = 50$	0.0009783	21	2.806
$N_{2x} = 100$	0.0006174	19	3.656
$N_{3x} = 200$	0.0009321	15	5.462

Табл. 4

$$D_2 = (L + \alpha^{-1/2}M)M^{-1}(L^T + \alpha^{-1/2}M), \rho_2 = 0.2, \alpha = 0.1, \varepsilon = 10^{-3}$$

Число узлов	$\ Ly^k - Mu^k\ $	Число итераций	Время вычислений, с
$N_{1x} = 50$	0.0008726	70	8.763
$N_{2x} = 100$	0.000958	60	12.443
$N_{3x} = 200$	0.0008561	49	17.039

Удзавы сходится при $\rho < 2$. Матрица L положительно определена при постоянном (достаточно малом) по времени шаге в явной аппроксимации уравнения состояния, это объясняет преимущество D_2 . При использовании переменных шагов матрица L в общем случае теряет свойство положительной определенности, поэтому для выполнения неравенства $D_2 > \frac{\rho}{2}BA^{-1}B^T$ требуется выбирать достаточно малый параметр ρ . В приведенных расчетах был взят параметр ρ , гарантирующий сходимость метода. Как было отмечено выше, с уменьшением α сужается интервал допустимых значений для ρ . В частности, при $\alpha = 0.1$ в случае вычислений с предобусловливателем D_2 и $\rho = 0.5$ итерации расходились, и максимально допустимое значение для итерационного параметра было $\rho = 0.3$.

Благодарности. Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Лапину Александру Васильевичу за постановку задачи и помощь в работе.

Литература

1. *Deckelnick K., Hinze M.* Variational discretization of parabolic control problems in the presence of pointwise state constraints // J. Comp. Math. – 2011. – V. 29, No 1. – P. 1–15. – doi: 10.4208/jcm.1006-m3213.
2. *Neittaanmaki P., Tiba D.* Optimal control of nonlinear parabolic systems: theory, algorithms and applications. – Marcell Dekker Inc, 1994. – 424 p.
3. *Laitinen E., Lapin A., Lapin S.* Explicit algorithms to solve a class of state constrained parabolic optimal control problems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modeling. – 2015. – V. 30, No 6. – P. 351–362. – doi: 10.1515/rnam-2015-0032.
4. *Laitinen E., Lapin A.* Iterative solution methods for parabolic optimal control problem with constraints on time derivative of state function // WSEAS Recent Advances in Mathematics: Mathematics and Computers in Science and Engineering Series. – 2015. – V. 48. – P. 72–74.
5. *Лапин А.В., Платонов А.А., Романенко А.Д.* Решение параболической задачи оптимального управления с ограничениями на состояние с использованием явной аппроксимации уравнения состояния // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы Десятой междунар. конф. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014. – С. 444–447.

6. *Бадриев И.Б., Карчевский М.М.* Применение метода двойственности к решению нелинейных задач теории фильтрации с предельным градиентом // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 7. – С. 1133–1144.
7. *Badriev I.B.* On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media // Appl. Mech. and Materials. – 2013. – V. 392. – P. 183–187. – doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.392.183.
8. *Badriev I.B., Karchevskii M.M.* Convergence of the iterative Uzava method for the solution of the stationary problem of the seepage theory with a limit gradient // J. Sov. Math. – 1989. – V. 45, No 4. – P. 1302–1309.
9. *Лебедев В.И., Финогенов С.А.* О порядке выбора итерационных параметров в чебышевских циклических итерационных методах // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1971. – Т. 11, № 2. – С. 425–438.
10. *Лебедев В.И., Медовиков А.А.* Явный метод второго порядка точности для решения систем жестких дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1998. – № 9. – С. 55–63.
11. *Quarteroni A., Valli A.* Numerical approximation of partial differential equations. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1997. – 560 p.
12. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979. – 399 с.
13. *Lapin A.V.* Preconditioned Uzawa type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems // Lobachevskii J. Math. – 2010. – V. 31, No 4. – P. 309–322. – doi: 10.1134/S1995080210040013.
14. *Николаев Е.С., Самарский А.А.* Выбор итерационных параметров в методе Ричардсона // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1972. – Т. 12, № 4. – С. 960–973.
15. *Лопин А.В., Платонов А.А.* Численное решение параболической задачи оптимального управления с поточечными ограничениями на функцию состояния // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 81–90.

Поступила в редакцию
10.05.16

Романенко Артур Данилевич, ассистент кафедры математической статистики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: romart92@mail.ru

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
 SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
 (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
 2016, vol. 158, no. 3, pp. 376–387

On the Explicit Scheme with Variable Time Steps for Solving the Parabolic Optimal Control Problem

A.D. Romanenko

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: *romart92@mail.ru*

Received May 10, 2016

Abstract

The paper deals with the optimal control problem, including the linear parabolic equation as a state problem. Pointwise constraints are imposed on the control function. The objective functional involves the observation function in the entire space-time domain. The optimal control problem is approximated by a finite dimensional problem with mesh approximation of the state equation by the explicit (forward Euler) mesh scheme with variable time steps. The existence of unique solutions for the continuous and mesh optimal control problems is proved. The Uzawa-type iterative method is used for solving the finite dimensional optimal control problem. The results of numerical experiments are presented.

Keywords: optimal control, constraint on control, variable step, iterative method

Acknowledgments. The author is grateful to Lapin Alexander Vasilevich, Professor and Doctor of Physical and Mathematical Sciences, for setting the research objective and his help during the investigation.

Figure Captions

Fig. 1. The form of the function $u(x, t)$ built at $N_x = 100$, $\alpha = 1$, $\rho = 0.5$, as well as the preconditioner $D_2 = (L + \alpha^{-1/2}M)M^{-1}(L^T + \alpha^{-1/2}M)$.

Fig. 2. Residual error behavior at $N_x = 100$, $\rho = 0.5$, $\alpha = 1$, as well as the preconditioner $D_1 = LM^{-1}L^T$.

Fig. 3. Residual error behavior at $N_x = 100$, $\rho = 0.2$, $\alpha = 0.1$, as well as the preconditioner $D_2 = (L + \alpha^{-1/2}M)M^{-1}(L^T + \alpha^{-1/2}M)$.

References

1. Deckelnick K., Hinze M. Variational discretization of parabolic control problems in the presence of pointwise state constraints. *J. Comput. Math.*, 2011, vol. 29, no. 1, pp. 1–15. doi: 10.4208/jcm.1006-m3213.
2. Neittaanmaki P., Tiba D. Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems: Theory, Algorithms and Applications. Marcell Dekker Inc, 1994. 424 p.
3. Laitinen E., Lapin A., Lapin S. Explicit algorithms to solve a class of state constrained parabolic optimal control problems. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modell.*, 2015, vol. 30, no. 6, pp. 351–362. doi: 10.1515/rnam-2015-0032.
4. Laitinen E., Lapin A. Iterative solution methods for parabolic optimal control problem with constraints on time derivative of state function. *WSEAS Recent Adv. Math.: Math. Comput. Sci. Eng. Ser.*, 2015, vol. 48, pp. 72–74.

5. Lapin A.V., Platonov A.A., Romanenko A.D. Solving a parabolic optimal control problem with state constraints by using explicit approximation of the state equation. *Setochnye metody dlya kraevykh zadach i prilozheniya: Materialy desyatoi mezhdunar. konf.* [Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications: Proc. 10th Int. Conf.]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2014, pp. 444–447. (In Russian)
6. Badriev I.B., Karchevskii M.M. Application of the duality method of the solution of nonlinear problems seepage theory with a limit gradient. *Diff. Uravn.*, 1982, vol. 18, no. 7, pp. 1133–1144. (In Russian)
7. Badriev I.B. On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media. *Appl. Mech. Mater.*, 2013, vol. 392, pp. 183–187. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.392.183.
8. Badriev I.B., Karchevskii M.M. Convergence of the iterative Uzava method for the solution of the stationary problem of the seepage theory with a limit gradient. *J. Sov. Math.*, 1989, vol. 45, no. 4, pp. 1302–1309.
9. Lebedev V.I., Finogenov S.A. Ordering of the iterative parameters in the cyclical Chebyshev iterative method. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1971, vol. 11, no. 2, pp. 155–170.
10. Lebedev V.I., Medovikov A.A. An explicit method of the second order of accuracy for solving stiff systems of ordinary differential equations. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1998, no. 9, pp. 55–63. (In Russian)
11. Quarteroni A., Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Berlin; Heidelberg, Springer, 1997. 560 p.
12. Eklund I., Temam R. Convex Analysis and Variational Problems. Moscow, Mir, 1979, 399 p. (In Russian)
13. Lapin A.V. Preconditioned Uzawa type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems. *Lobachevskii J. Math.*, 2010, vol. 31, no. 4, pp. 309–322. doi: 10.1134/S1995080210040013.
14. Nikolaev E.S., Samarskii A.A. Selection of the iterative parameters in Richardson's method. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1972, vol. 12, no. 4, pp. 141–158.
15. Lapin A.V., Platonov A.A. Numerical solution of a parabolic optimal control problem with point-wise state constraints. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 81–90. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Романенко А.Д. О явной схеме с переменными шагами по времени для решения параболической задачи оптимального управления // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 3. – С. 376–387. ⟩

⟨ **For citation:** Romanenko A.D. On the explicit scheme with variable time steps for solving the parabolic optimal control problem. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 376–387. (In Russian) ⟩