ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 8 (543)

УДК 517.983

В.М. ДЕУНДЯК, Г.Г. СМОЛКИН

ОПЕРАТОРЫ ДИСКРЕТНОЙ СВЕРТКИ С РАЗРЫВНЫМИ СИМВОЛАМИ

В [1] введены и исследованы операторные идеалы типа идеалов Н.К. Никольского [2], на основе теории этих идеалов построен предсимвол, найдено каноническое представление и получены необходимые условия фредгольмовости операторов из банаховой алгебры, порожденной сингулярным интегральным оператором Коши с общими разрывными коэффициентами в L_p-пространстве на окружности. В частности, в [1] рассматриваются операторы с произвольными существенно ограниченными коэффициентами. Известно, что операторы дискретной свертки с суммируемыми ядрами имеют непрерывный на окружности символ ([3], с. 59). В данной работе исследуются операторы дискретной свертки с ядрами из значительно более широкого класса, символы которых могут быть произвольными существенно ограниченными функциями. Для банаховых алгебр таких операторов со стабилизирующимися на бесконечности коэффициентами получены аналоги результатов из [1] в случае $p = 2$.

1. Через $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_+$ обозначим множества всех комплексных, целых и неотрицательных целых чисел соответственно. Введем на единичной окружности $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ стандартную нормированную меру Лебега, а на $\mathbb{Z}$ — стандартную атомарную меру, что позволит рассматривать пространства $L_p(\mathbb{T})$, $L_p(\mathbb{Z})$, где $1 \le p \le \infty$. Напомним, что $L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_{p_2}(\mathbb{T}) \subset L_{p_1}(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$, $L_\infty(\mathbb{Z}) \supset L_{p_2}(\mathbb{Z}) \supset L_{p_1}(\mathbb{Z}) \supset L_1(\mathbb{Z})$, где $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$. Через $\mathcal{L}\ (\mathcal{X})$ будем обозначать банахову алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathcal{X}$, а через $\mathcal{K}\ (\mathcal{X})$ — идеал компактных операторов. Группу обратимых элементов банаховой алгебры $\mathcal{U}$ будем обозначать $G(\mathcal{U})$. Подалгебра $\mathcal{V}$ алгебры $\mathcal{W}$ называется наполненной, если $G(\mathcal{W}) \cap \mathcal{V} = G(\mathcal{V})$.

Пусть $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{T}) \longrightarrow L_2(\mathbb{Z})$ — изоморфизм банаховых пространств, определяемый преобразованием Фурье. Известно [4], что для произвольной функции φ из $\mathcal{F}(L_\infty(\mathbb{T}))$ в пространстве $L_2(\mathbb{Z})$ корректно определен и ограничен оператор одномерной дискретной свертки C_φ:

$$(C_\varphi(f))(l) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(l-k) f(k), \quad f \in L_2(\mathbb{Z}).$$

Отметим, что множество $\mathcal{F}(L_\infty(\mathbb{T}))$ достаточно обширно. Действительно, существует, например, такая непрерывная функция Карлемана f, что $\mathcal{F}(f)$ не лежит ни в каком пространстве $L_p(\mathbb{Z})$ при $p < 2$ ([5], с. 160). Пусть

$$C(\widetilde{\mathbb{Z}}) = \{\varphi \in L_\infty(\mathbb{Z}) : \exists \varphi_\pm = \lim_{n\to\pm\infty} |\varphi(n)| < +\infty\}.$$

Пусть до конца этого пункта Ω — замкнутая подалгебра банаховой алгебры $L_\infty(\mathbb{T})$. Обозначим через $U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}), \mathcal{F}(\Omega))$ замкнутую подалгебру $\mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z}))$, порожденную операторами дискретной свертки с ядрами из $\mathcal{F}(\Omega)$ и коэффициентами из $C(\widetilde{\mathbb{Z}})$. Через $\mathrm{Com}(U)$ будем обозначать коммутаторный идеал алгебры U, т. е. замкнутый двусторонний идеал, порожденный всеми коммутаторами $AB - BA$, где $A, B \in U$. Пусть $\Omega \oplus \Omega$ — прямая сумма банаховых алгебр с нормой $\|(\varphi;\psi)\| = \max\{\|\varphi\|;\|\psi\|\}$, $P^+ (\in \mathcal{L}(L_2(\mathbb{Z})))$ — оператор умножения на характеристическую функцию множества $\mathbb{Z}_+$, $P^- = I - P^+$.

Теорема 1. *Любой оператор* F *из* $U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(\Omega))$ *единственным образом представим в виде*

$$F = C_{\mathcal{F}(\varphi_+)}P^+ + C_{\mathcal{F}(\varphi_-)}P^- + K,$$

где $\varphi_+,\varphi_- \in \Omega$ *и* $K \in \mathrm{Com}(U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(\Omega)))$. *Сопоставление* $F \mapsto (\varphi_+,\varphi_-)$ *определяет предсимвол — эпиморфизм банаховых алгебр*

$$\sigma_\Omega : U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(\Omega)) \longrightarrow \Omega \oplus \Omega,$$

ядро которого совпадает с идеалом $\mathrm{Com}(U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(\Omega)))$.

Чтобы сформулировать критерий принадлежности произвольного оператора из алгебры $U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(\Omega))$ идеалу $\mathrm{Com}(U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(\Omega)))$, необходимо напомнить ряд фактов (напр., [6], гл. IX). Пусть $H_\infty(\mathbb{T})(\subset L_\infty(\mathbb{T}))$ — пространство Харди всех таких функций на $\mathbb{T}$, которые допускают аналитическое и ограниченное продолжение в круг $\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$; $\mathcal{B}(\subset H_\infty(\mathbb{T}))$ — множество внутренних функций на $\mathbb{T}$. Алгеброй Дугласа называется произвольная содержащая $H_\infty(\mathbb{T})$ замкнутая подалгебра алгебры $L_\infty(\mathbb{T})$. В силу теоремы Чанг–Маршалла произвольная алгебра Дугласа $\mathcal{A}$ порождена множеством $H_\infty(\mathbb{T}) \cup \mathcal{B}_\mathcal{A}$, где $\mathcal{B}_\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap G(\mathcal{A})$. Алгеброй Сарасона алгебры Дугласа $\mathcal{A}$ называется алгебра $Q_\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap \overline{\mathcal{A}}$, где черта означает переход к комплексному сопряжению. Следуя [1], для произвольной подалгебры M алгебры $L_\infty(\mathbb{T})$ через $D(M)$ обозначим пересечение всех таких алгебр Дугласа $\mathcal{A}$, для которых $M \subset Q_\mathcal{A}$, и отметим, что $D(M)$ — алгебра Дугласа и $D(Q_\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ для любой алгебры Дугласа $\mathcal{A}$.

Теорема 2. *Для* F *из* $U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(\Omega))$ *следующие условия равносильны*:

(a) $F \in \mathrm{Com}(U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(\Omega)))$,

(b) $\inf\limits_{b \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_{D(\Omega)})} \|(P^-C_b)F\| = 0, \quad \inf\limits_{b \in \mathcal{F}(\overline{\mathcal{B}}_{D(\Omega)})} \|(P^+C_b)F\| = 0,$

(c) $\inf\limits_{b \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_{D(\Omega)})} \|F(C_bP^+)\| = 0, \quad \inf\limits_{b \in \mathcal{F}(\overline{\mathcal{B}}_{D(\Omega)})} \|F(C_bP^-)\| = 0.$

Необходимое условие фредгольмовости операторов из алгебры $U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(\Omega))$ содержит

Теорема 3. *Пусть* $F \in U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(L_\infty(\mathbb{T})))$. *Если* F *фредгольмов, то* $\sigma_\Omega(F) = (\varphi_+,\varphi_-) \in G(L_\infty(\mathbb{T}) \oplus L_\infty(\mathbb{T}))$, *т. е.*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\mathbb{T}}\{|\varphi_+(t)|\} > 0, \quad \operatorname*{ess\,inf}_{t\in\mathbb{T}}\{|\varphi_-(t)|\} > 0. \tag{1}$$

Если, кроме того, $F \in U(C(\widetilde{\mathbb{Z}},\mathcal{F}(\Omega))$ *и алгебра* Ω *наполнена в* $L_\infty(\mathbb{T})$, *то* $\sigma_\Omega(F) \in G(\Omega \oplus \Omega)$.

2. Пусть $C(\mathbb{T})$ — алгебра всех непрерывных на $\mathbb{T}$ функций, $\mathrm{VMO}(\mathbb{T})$ — пространство функций на $\mathbb{T}$ с исчезающей средней осцилляцией,

$$\mathrm{QC}(\mathbb{T}) = (C(\mathbb{T}) + H_\infty(\mathbb{T})) \cap \overline{(C(\mathbb{T}) + H_\infty(\mathbb{T}))} = \mathrm{VMO}(\mathbb{T}) \cap L_\infty(\mathbb{T})$$

— C^*-алгебра квазинепрерывных функций на $\mathbb{T}$ ([6], с. 374; [7], с. 817). Хорошо известно, что $\mathrm{QC}(\mathbb{T})$ — максимальная замкнутая подалгебра $L_\infty(\mathbb{T})$, все функции из которой коммутируют с сингулярным интегральным оператором Коши с точностью до компактного слагаемого (напр., [8], с. 56). Отсюда нетрудно вывести следующее утверждение.

Лемма. *Если* $C(\mathbb{T}) \subset \Omega \subset \mathrm{QC}(\mathbb{T})$, *то*

$$\mathrm{Com}(U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}),\mathcal{F}(\Omega))) = \mathcal{K}(L_2(\mathbb{Z})).$$

Далее будем предполагать, что алгебра Ω удовлетворяет условию леммы.

Рассмотрим $f \in \mathrm{QC}(\mathbb{T})$, $0 < r < 1$. Пусть $\mathbb{T}_r = \{t \in \mathbb{C} : |t| = r\}$, $\widetilde{f}$ — продолжение функции f на $\mathbb{D}$, f_r — ограничение $\widetilde{f}$ на $\mathbb{T}_r$ и выполняется условие

$$\operatorname*{ess\,inf}_{t\in\mathbb{T}}\{|f(t)|\} > 0.$$

Тогда существует такое число r_0, что $f_{r_0}(t) \neq 0$ при $t \in \mathbb{T}_{r_0}$, и индекс функции f определяется следующим образом:

$$\operatorname{ind}(f) = \frac{1}{2\pi}\Delta\arg(f_{r_0}).$$

Известно [7], что данное определение индекса квазинепрерывной функции корректно.

Теорема 4. *Пусть $F \in U(C(\widetilde{\mathbb{Z}}), \mathcal{F}(\Omega))$, $\sigma_\Omega(F) = (\varphi_+, \varphi_-)$. Для того чтобы оператор F был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (1). *Если оператор F фредгольмов, то его индекс вычисляется по формуле*

$$\operatorname{ind}(F) = -\operatorname{ind}(\varphi_+\varphi_-^{-1}).$$

Литература

1. Георгиев К.А., Деундяк В.М. *Идеалы Никольского и их применение к исследованию алгебр сингулярных интегральных операторов* // Алгебра и анализ. – 1999. – Т. 11. – № 2. – С. 88–108.
2. Никольский Н.К. *Операторы Ганкеля и Тёплица. Алгебраический подход* // Препринт ЛОМИ АН СССР № Р2. – 1982. – 82 с.
3. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.* – М.: Наука, 1971. – 352 с.
4. Стечкин С.Б. *О билинейных формах* // ДАН СССР. – 1950. – Т. 71. – № 2. – С. 237–240.
5. Эдварс Р. *Ряды Фурье в современном изложении.* Т. 1. – М.: Мир, 1985. – 387 с.
6. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* – М.: Мир, 1984. – 469 с.
7. Sarason D.E. *Toeplitz operators with piecewise quasicontinuous symbols* // Indiana University Math. J. – 1977. – V. 26. – № 59. – P. 817–838.
8. Power S.C. *$C^\star$-algebras generated by Hankel operators and Toeplitz operators* // J. of Funct. Anal. – 1979. – V. 31. – P. 52–68.

Южный федеральный университет

Поступила 11.09.2006