ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 539.3

И.Г. ТЕРЕГУЛОВ, С.Н. ТИМЕРГАЛИЕВ

К ВОПРОСУ РАЗРЕШИМОСТИ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Статья посвящена исследованию разрешимости задачи геометрически и физически нелинейной теории пологих оболочек, заключающейся в определении напряженно-деформированного состояния свободных оболочек, не подчиненных никаким геометрическим граничным условиям. Необходимость изучения таких оболочек была отмечена И.И. Воровичем [1]. В работе для исследования задачи предлагается метод, основанный на решении задачи в деформациях [2].

1°. В этом пункте выведем формулы для вектора перемещения через компоненты деформации, которые лежат в основе предлагаемого метода.Для этого будем использовать соотношения для компонент конечной деформации,полученные на основе гипотез Кирхгофа–Лява

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - B_{jj}w - G^k_{jj}w_k + \frac{1}{2}w^2_{\alpha^j}, \quad j=1,2,\\
&\varepsilon^0_{12} = \frac{1}{2}(w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1}) - B_{12}w - G^k_{12}w_k + \frac{1}{2}w_{\alpha^1}w_{\alpha^2},\\
&\varepsilon^1_{ij} = -w_{\alpha^i\alpha^j} + G^k_{ij}w_{\alpha^k}, \quad i \le j, \ \ i,j=1,2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где ε^0_{ij}, ε^1_{ij} — компоненты тангенциальной и изгибной деформации срединной поверхности S_0; w_i, w — тангенциальные и нормальное перемещения точек S_0; B_{ij} — составляющие тензора кривизны S_0; G^k_{ij} — символы Кристоффеля второго рода; α^1, α^2 — декартовы координаты на плоскости, изменяющиеся в некоторой плоской ограниченной области Ω.

Соотношения (1) будем рассматривать как систему дифференциальных уравнений относительно w_i, w с известными правыми частями ε^0_{ij}, ε^1_{ij}. Для нахождения w_i, w от (1) перейдем к системе

$$\begin{aligned}
&w_{1\alpha^1} - w_{2\alpha^2} + (B_{22} - B_{11})w + (G^k_{22} - G^k_{11})w_k + \frac{1}{2}(w^2_{\alpha^1} - w^2_{\alpha^2}) = \varepsilon^0_{11} - \varepsilon^0_{22},\\
&w_{1\alpha^1} + w_{2\alpha^1} - 2B_{12}w - 2G^k_{12}w_k + w_{\alpha^1}w_{\alpha^2} = 2\varepsilon^0_{12},
\end{aligned} \tag{2}$$

$$-w_{\alpha^1\alpha^1} - w_{\alpha^2\alpha^2} + (G^k_{11} + G^k_{22})w_{\alpha^k} = \varepsilon^1_{11} + \varepsilon^2_{22}. \tag{3}$$

Уравнение (3) содержит только w и представляет собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка. Поэтому решение системы (2)–(3) начнем с решения (3). Введем обозначения: $a = -(G^1_{11} + G^2_{22})$, $b = G^2_{11} + G^2_{22}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon^1_{11} + \varepsilon^1_{22}$, $u = -w_{\alpha^1}$, $v = w_{\alpha^2}$. Тогда уравнение (3) будет эквивалентно системе

$$\begin{aligned}
&u_{\alpha^1} - v_{\alpha^2} + au + bv = \varepsilon_3,\\
&u_{\alpha^2} + v_{\alpha^1} = 0,
\end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 96-01-00518, и Академии наук Татарстана.

которую с помощью комплексной функции $W(z) = u(\alpha^1, \alpha^2) + iv(\alpha^1, \alpha^2)$, $z = \alpha^1 + i\alpha^2$, можно представить в виде

$$W_{\overline{z}} + AW + B\overline{W} = F, \tag{4}$$

где $A = \frac{1}{4}(a - ib)$, $B = \frac{1}{4}(a + ib)$, $F = \frac{\varepsilon_3}{2}$, $W_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(W_{\alpha^1} + iW_{\alpha^2})$.

Уравнения вида (4) изучены И.Н. Векуа [3]. При нахождении решения (4) будем следовать [3].

Предположим, что $\varepsilon_3 \in L_2(\overline{\Omega})$; функции G_{ij}^k, B_{ij} ограничены в $\overline{\Omega}$; вне области $\overline{\Omega}$ они продолжены нулями. Тогда обобщенное решение уравнения (4) можно представить в виде

$$W(z) = W_0(z) + (T_1\varepsilon_3)(z), \tag{5}$$

где $W_0(z) \in L_q(\overline{\Omega})$ $(q \geq 1)$ — обобщенная аналитическая функция [3], зависящая от произвольной голоморфной внутри Ω функции; оператор $T_1 f$ дается формулой

$$T_1 f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \chi_1(z,\zeta;\Omega) f(\zeta) d\xi\, d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta. \tag{6}$$

В (6) $\chi_1(z,\zeta;\Omega)$ — известная функция, называемая главной функцией [3]. Зная $W(z)$, решение w уравнения (3) можно найти по формуле

$$w(\alpha^1, \alpha^2) = c_0 - \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} W(\zeta) d\zeta, \quad c_0 = \mathrm{const}, \tag{7}$$

z_0 — произвольно фиксированная точка Ω.

Если Ω — односвязная область, то правая часть (7) является однозначной функцией при фиксированных c_0, z_0. Если же Ω — многосвязная область, то правая часть (7) будет, вообще говоря, многозначной функцией. Тогда для однозначности правой части (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\mathrm{Re}\int_{\Gamma_j} W(\zeta) d\zeta = 0, \quad j = \overline{1,m},$$

где через Γ_j $(j = \overline{1,m})$ обозначены замкнутые кривые, ограничивающие область Ω и расположенные внутри кривой Γ_0.

Перейдем к системе (2). При помощи комплексной функции $W_1 = w_1 + iw_2$ систему (2), как и выше, запишем в виде

$$W_{1\overline{z}} + A_1 W_1 + B_1 \overline{W}_1 = F_1 - K\varepsilon_3, \tag{8}$$

где $F_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}^0 - \varepsilon_{22}^0$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_{12}^0$; $K\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(K_1\varepsilon_3 + iK_2\varepsilon_3)$ — известный оператор, который определяется решением w уравнения (3); коэффициенты A_1, B_1 зависят только от G_{ij}^k и $A_1 = B_1 \equiv 0$, если $G_{ij}^k \equiv 0$. Предполагая, что $\varepsilon_j \in L_2(\overline{\Omega})$ и вне $\overline{\Omega}$ $\varepsilon_j \equiv 0$, обобщенное решение уравнения (8) получаем в виде

$$W_1(z) = W_{1,0}(z) + T_2(\varepsilon_1 - K_1\varepsilon_3) - T_3(\varepsilon_2 - K_2\varepsilon_3), \tag{9}$$

где $W_{1,0} \in L_q(\overline{\Omega})$ $(q \geq 1)$ — обобщенная аналитическая функция, зависящая от произвольной голоморфной внутри Ω функции; операторы $T_j f$ $(j = 2, 3)$ имеют ту же структуру (6), что и $T_1 f$.

Лемма 1. *Операторы $T_j f$ $(j = \overline{1,3})$ суть вполне непрерывные линейные операторы в $L_p(\overline{\Omega})$, $p \geq 1$, отображающие это пространство в $L_q(\overline{\Omega})$, $p \leq q \leq 2p/(2-p)$, если $1 \leq p \leq 2$ и на $C_\alpha(\overline{\Omega})$, $\alpha = \frac{p-2}{p}$, если $p > 2$, причем*

$$\|T_j f\|_{L_q} \leq c\|f\|_{L_p} \ \ (1 \leq p \leq 2), \quad \|T_j f\|_{C_\alpha} \leq c\|f\|_{L_p} \ \ (p > 2).$$

Справедливость леммы 1 следует из свойств главных функций и теорем 1.19, 1.27 ([3], сс. 39, 46).

Используя решения (5), (7), (9), их производные по z, $\overline{z}$, находим w_{α^j}, $w_{\alpha^2\alpha^2}$, $w_{\alpha^1\alpha^2}$, $w_{2\alpha^2}$, с помощью которых затем из (1) получаем

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{22}^1 \equiv \varepsilon_4 = H_1\varepsilon_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_3 + f_1, \quad \varepsilon_{12}^1 \equiv \varepsilon_5 = H_2\varepsilon_3 + f_2, \\ &\varepsilon_{22}^0 \equiv \varepsilon_6 = H\varepsilon_3 + 1_K H_{2+K}\varepsilon_K\big|_{K=\overline{1,3}} - \frac{1}{2}\varepsilon_1 + f_3, \end{aligned} \tag{10}$$

где $f_j \in L_q(\overline{\Omega})$ $(q \geq 1)$ — известные функции, зависящие от W_0, $W_{1,0}$; $H_j f$ — известные операторы, относительно которых справедлива

Теорема 1. 1) *Операторы* $H_j f$ $(j = \overline{1,4})$ *суть линейные ограниченные операторы в* $L_p(\overline{\Omega})$, *отображающие это пространство в себя, причем*

$$\|H_j f\|_{L_p} \leq c\|f\|_{L_p}, \quad p > 1;$$

2) *Оператор* $H_5 f$ — *линейный,* Hf — *нелинейный вполне непрерывные операторы в* $L_2(\overline{\Omega})$, *отображающие это пространство в* $L_q(\overline{\Omega})$, $q \geq 1$, *причем*

$$\|H_5 f\|_{L_q} \leq c\|f\|_{L_2}, \quad \|Hf\|_{L_q} \leq c\|f\|_{L_2}^2, \quad q \geq 1.$$

Теорема 1 доказывается с помощью леммы 1.

Таким образом, получены выражения для координат вектора перемещения точек срединной поверхности оболочки через ε_1, ε_2, ε_3 в виде (7), (9), которые будут использованы в дальнейшем. Шесть компонент деформации связаны между собой тремя соотношениями (10), которые представляют собой условия совместности деформации. При их выполнении решение системы (2)–(3) удовлетворяет системе (1).

2°. Известно [4], что для нелинейно упругих анизотропных сред напряжения могут быть представлены формулами Грина

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, \tag{11}$$

где F — потенциал. Используя гипотезы Кирхгофа–Лява, соотношения (11) представим в виде

$$\sigma^{\lambda\mu} = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{qs} - \sigma_*^{\lambda\mu}, \quad \lambda \leq \mu, \ \ q \leq s, \ \ \lambda,\mu,q,s = 1,2, \tag{12}$$

где $B^{\lambda\mu qs} = \frac{\partial^2 F}{\partial\gamma_{\lambda\mu}\partial\gamma_{qs}}\big|_{\gamma_{ij}=0}$, $\gamma_{jj} = \varepsilon_{jj}$, $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$.

Для вариации объемной плотности энергии деформации Π имеем

$$\delta\Pi = \sigma^{11}\delta\gamma_{11} + \sigma^{12}\delta\gamma_{12} + \sigma^{22}\delta\gamma_{22},$$

которую в силу (12) можем записать в виде

$$\delta\Pi = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{\lambda\mu}\delta\gamma_{qs} - \sigma_*^{\lambda\mu}\delta\gamma_{\lambda\mu}, \quad \lambda \leq \mu, \ \ q \leq s. \tag{13}$$

Для вариации энергии деформации U, накопленной во всем объеме оболочки V, будем иметь

$$\delta U = \iiint\limits_V \delta\Pi D^* d\alpha^1 d\alpha^2 d\alpha^3, \tag{14}$$

где $D^* = D^*(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ — элемент объема V. Если учесть тонкостенность оболочки, то можно принять $D^* \approx D(\alpha^1,\alpha^2)$, где $D(\alpha^1,\alpha^2)$ — элемент площади срединной поверхности. При этом считаем

$$D(\alpha^1,\alpha^2) \geq c^2 > 0 \tag{15}$$

в области $\overline{\Omega}$. В силу того, что $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^0 + \alpha^3\gamma_{ij}^1$ и принимая во внимание (13), формулу (14) преобразуем к виду

$$\delta U = \iint\limits_{\Omega} \delta Q D d\alpha^1 d\alpha^2 - \iint\limits_{\Omega} (\sigma_1^{\lambda\mu}\delta\gamma_{\lambda\mu}^0 + \sigma_2^{\lambda\mu}\delta\gamma_{\lambda\mu}^1) D d\alpha^1 d\alpha^2, \tag{16}$$

где

$$\delta Q = D_p^{\lambda\mu qs}\gamma_{\lambda\mu}^0\delta\gamma_{qs}^0 + D_*^{\lambda\mu qs}(\gamma_{\lambda\mu}^0\delta\gamma_{qs}^1 + \gamma_{\lambda\mu}^1\delta\gamma_{qs}^0) + D_u^{\lambda\mu qs}\gamma_{\lambda\mu}^1\delta\gamma_{qs}^1, \tag{17}$$

$$D_p^{\lambda\mu qs} = \int_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs} d\alpha^3, \quad D_*^{\lambda\mu qs} = \int_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}\alpha^3 d\alpha^3, \quad D_u^{\lambda\mu qs} = \int_{-h}^{h} B^{\lambda\mu qs}(\alpha^3)^2 d\alpha^3,$$

$$\sigma_1^{\lambda\mu} = \int_{-h}^{h} \sigma_*^{\lambda\mu} d\alpha^3, \quad \sigma_2^{\lambda\mu} = \int_{-h}^{h} \sigma_*^{\lambda\mu}\alpha^3 d\alpha^3.$$

Считаем, что выполняется

Условие А. $D_{p,*,u}^{\lambda\mu qs}$ ограничены в $\overline{\Omega}$.

Предположим, что квадратичная форма $2\Pi_\tau = B^{\lambda\mu qs}\gamma_{\lambda\mu}\gamma_{qs}$ положительно определена во всем объеме V. Тогда, как легко видеть, из положительной определенности $2\Pi_\tau$ следует положительная определенность квадратичной формы $2Q$. Отсюда в свою очередь вытекает положительная определенность тензоров $D_{p,u}^{\lambda\mu qs}$.

Преобразуем формулу (17). Для этого используем соотношения

$$\gamma_{11}^0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_6, \quad \gamma_{12}^0 = \varepsilon_2, \quad \gamma_{22}^0 = \varepsilon_6, \quad \gamma_{11}^1 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad \gamma_{12}^1 = 2\varepsilon_5, \quad \gamma_{22}^1 = \varepsilon_4. \tag{18}$$

При помощи (18), (10) компоненты деформации γ_{ij}^k представим в виде

$$\begin{aligned} &\gamma_{jj}^0 = t_{jj}^0 + H\varepsilon_3 + f_3, \quad \gamma_{jj}^1 = t_{jj}^1 + (-1)^j f_1, \quad j = 1,2, \\ &\gamma_{12}^0 = t_{12}^0, \quad \gamma_{12}^1 = t_{12}^1 + 2f_2, \end{aligned} \tag{19}$$

где через t_{ij}^0, t_{ij}^1 обозначены линейные части γ_{ij}^0, γ_{ij}^1:

$$\begin{aligned} &t_{11}^0 = \frac{1}{2}\varepsilon_1 + 1_K H_{2+K}\varepsilon_K\big|_{K=\overline{1,3}}, \quad t_{12}^0 = \varepsilon_2, \quad t_{22}^0 = 1_K H_{2+K}\varepsilon_K\big|_{K=\overline{1,3}} - \frac{1}{2}\varepsilon_1, \\ &t_{11}^1 = \frac{1}{2}\varepsilon_3 - H_1\varepsilon_3, \quad t_{12}^1 = 2H_2\varepsilon_3, \quad t_{22}^1 = H_1\varepsilon_3 + \frac{1}{2}\varepsilon_3. \end{aligned} \tag{20}$$

Используя формулы (19), δQ преобразуем к виду

$$\delta Q = D_p^{\lambda\mu qs}t_{\lambda\mu}^0\delta t_{qs}^0 + D_*^{\lambda\mu qs}(t_{\lambda\mu}^0\delta t_{qs}^1 + t_{\lambda\mu}^1\delta t_{qs}^0) + D_u^{\lambda\mu qs}t_{\lambda\mu}^1\delta t_{qs}^1 + Q_p(\varepsilon;\delta\varepsilon) + Q_*(\varepsilon;\delta\varepsilon) + \Phi(\delta\varepsilon), \tag{21}$$

где

$$Q_p(\varepsilon;\delta\varepsilon) = [d(H\varepsilon_3 + f_3) + d_p^{\lambda\mu}t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon)]H_\delta(\varepsilon_3;\delta\varepsilon_3) + H\varepsilon_3 d_p^{\lambda\mu}t_{\lambda\mu}^0(\delta\varepsilon), \tag{22}$$

$$Q_*(\varepsilon;\delta\varepsilon) = d_*^{\lambda\mu}[t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon) + \beta_{\lambda\mu}]H_\delta(\varepsilon_3;\delta\varepsilon_3) + H\varepsilon_3 d_*^{\lambda\mu}t_{\lambda\mu}^1(\delta\varepsilon), \tag{23}$$

$$\delta H\varepsilon_3 \equiv H_\delta(\varepsilon_3;\delta\varepsilon_3), \quad \varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3), \quad \delta\varepsilon = (\delta\varepsilon_1,\delta\varepsilon_2,\delta\varepsilon_3);$$

$d_{p,*}^{\lambda\mu}$, d и β_{ij} — известные функции, зависящие от $D_{p,*}^{\lambda\mu qs}$ и f_k соответственно; через $\Phi(\delta\varepsilon)$ обозначено выражение, содержащее только вариацию ε.

Вычислим работу внешних приложенных к оболочке сил на возможных перемещениях в условиях гипотез Кирхгофа–Лява. Пусть по граням $S_0^\pm$ оболочки приложены усилия $F^\pm(\alpha^1,\alpha^2)$, действуют массовые силы $F(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3)$ и на границе S_0^0 действуют поверхностные силы $F(s,\alpha^3)$. Предположим, что выполняется

Условие В. $F \in L_2(\overline{\Omega}) \times L_1[-h,h]$, $F^\pm \in L_2(\overline{\Omega})$ и внешние силы таковы, что движение оболочки как твердого тела отсутствует.

В связи с этим в дальнейшем будем считать $W_0, W_{1,0} \equiv 0$.

Для элементарной работы δA_1 массовых сил и сил, приложенных к $S_0^{\pm}$, имеем

$$\delta A_1 = \iint\limits_{\Omega} R^j \delta w_j\big|_{j=\overline{1,3}} D\,d\alpha^1 d\alpha^2 - \iint\limits_{\Omega} L^i \delta w_{\alpha^i}\big|_{i=1,2} D\,d\alpha^1 d\alpha^2.$$

Элементарная работа δA_2 усилий, приложенных к S_0^0, дается формулой

$$\delta A_2 = \int_{\Gamma} (Q^j \delta w_j\big|_{j=\overline{1,3}} - M^i \delta w_{\alpha^i}\big|_{i=1,2}) ds.$$

Здесь R^j, L^i, Q^j, M^i — известные функции. Отметим, что если выполнено условие B, то $R^j, L^i \in L_2(\overline{\Omega})$, $Q^j, M^i \in L_2(\Gamma)$.

Принимая во внимание соотношения (5), (7), (9), (10), выражения для δA_j можно преобразовать к виду

$$\delta A_1 = \iint\limits_{\Omega} [R^1 \operatorname{Re} T_4(\varepsilon_3; \delta\varepsilon_3) + R^2 \operatorname{Im} T_4(\varepsilon_3; \delta\varepsilon_3)] D\,d\alpha^1 d\alpha^2 + I_1(\delta\varepsilon), \tag{24}$$

$$\delta A_2 = \iint_{\omega} [\widetilde{Q}^2 K_2^0(\varepsilon_3; \delta\varepsilon_3) - \widetilde{Q}^1 K_1^0(\varepsilon_3; \delta\varepsilon_3)] d\alpha^1 d\alpha^2 + I_2(\delta\varepsilon), \tag{25}$$

где $T_4(\varepsilon_3; \delta\varepsilon_3) = T_3 K_2^0(\varepsilon_3; \delta\varepsilon_3) - T_2 K_1^0(\varepsilon_3; \delta\varepsilon_3)$,

$$\begin{aligned} K_1^0(\varepsilon_3; \delta\varepsilon_3) &= \operatorname{Re} T_1\varepsilon_3 \operatorname{Re} T_1\delta\varepsilon_3 - \operatorname{Im} T_1\varepsilon_3 \operatorname{Im} T_1\delta\varepsilon_3, \\ K_2^0(\varepsilon_3; \delta\varepsilon_3) &= (-\tfrac{1}{2})[\operatorname{Re} T_1\varepsilon_3 \operatorname{Im} T_1\delta\varepsilon_3 + \operatorname{Im} T_1\varepsilon_3 \operatorname{Re} T_1\delta\varepsilon_3], \end{aligned} \tag{26}$$

через $I_j(\delta\varepsilon)$ обозначены линейные ограниченные относительно $\delta\varepsilon$ функционалы в $L_2(\overline{\Omega})$, $\widetilde{Q}^j$ — известные функции. Отметим, что $\widetilde{Q}^j \in L_2(\overline{\Omega})$, если $Q^i, M^i \in L_2(\Gamma)$.

Введем линейное пространство $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, любой паре элементов $\varepsilon^j = (\varepsilon_1^j, \varepsilon_2^j, \varepsilon_3^j)$ которого поставлено в соответствие число

$$(\varepsilon^1, \varepsilon^2)_{\widetilde{L}_2} = \iint\limits_{\Omega} \{D_p^{\lambda\mu qs} t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon^1) t_{qs}^0(\varepsilon^2) + D_*^{\lambda\mu qs}[t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon^1) t_{qs}^1(\varepsilon^2) + \\ + t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon^1) t_{qs}^0(\varepsilon^2)] + D_u^{\lambda\mu qs} t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon^1) t_{qs}^1(\varepsilon^2)\} D\,d\alpha^1 d\alpha^2. \tag{27}$$

Формула (27) определяет в $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ скалярное произведение. Проверим лишь, что из $(\varepsilon, \varepsilon)_{\widetilde{L}_2} = 0$ следует $\varepsilon = 0$ (справедливость остальных условий очевидна). Действительно, в силу положительной определенности квадратичной формы $2Q$ и (15) из $(\varepsilon, \varepsilon)_{\widetilde{L}_2} = 0$ следует $t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon) = t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon) = 0$. Тогда из формул (20) сразу получаем $\varepsilon = 0$.

Скалярному произведению (27) соответствует норма

$$\|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}^2 = \iint\limits_{\Omega} \{D_p^{\lambda\mu qs} t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon) t_{qs}^0(\varepsilon) + D_*^{\lambda\mu qs}[t_{\lambda\mu}^0(\varepsilon) t_{qs}^1(\varepsilon) + \\ + t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon) t_{qs}^0(\varepsilon)] + D_u^{\lambda\mu qs} t_{\lambda\mu}^1(\varepsilon) t_{qs}^1(\varepsilon)\} D\,d\alpha^1 d\alpha^2. \tag{28}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* A. *Тогда имеет место*

$$m_0 \|\varepsilon\|_{L_2}^2 \le \|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}^2 \le M_0 \|\varepsilon\|_{L_2}^2, \quad m_0, M_0 > 0,$$

т. е. нормы $\|\cdot\|_{L_2}$, $\|\cdot\|_{\widetilde{L}_2}$ *эквивалентны.*

Справедливость леммы 2 следует из положительной определенности $2Q$ и ограниченности $D_{p,*,u}^{\lambda\mu qs}$ в $\overline{\Omega}$.

Из леммы 2 следует, что пространство $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ с нормой (28) является гильбертовым пространством.

Введем понятие обобщенного решения задачи в деформациях.

Определение. Обобщенным решением задачи в деформациях назовем вектор-функцию $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую интегральному соотношению

$$(\varepsilon, \varphi)_{\widetilde{L}_2} = \iint\limits_{\Omega} \{D[R^1 \operatorname{Re} T_4(\varepsilon_3; \varphi_3) + R^2 \operatorname{Im} T_4(\varepsilon_3; \varphi_3)] + \widetilde{Q}^2 K_2^0(\varepsilon_3; \varphi_3) - \widetilde{Q}^1 K_1^0(\varepsilon_3; \varphi_3)\} d\alpha^1 d\alpha^2 -$$

$$- \iint\limits_{\Omega} [Q_p(\varepsilon; \varphi) + Q_*(\varepsilon; \varphi)] D \, d\alpha^1 d\alpha^2 +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} \{\sigma_1^{\lambda\mu}(\varepsilon) t_{\lambda\mu}^0(\varphi) + \sigma_2^{\lambda\mu}(\varepsilon) t_{\lambda\mu}^1(\varphi) + [\sigma_1^{11}(\varepsilon) + \sigma_1^{22}(\varepsilon)] H_\delta(\varepsilon_3; \varphi_3)\} D \, d\alpha^1 d\alpha^2 - I(\varphi) \quad (29)$$

для любой вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, где $I(\varphi)$ — линейный функционал в $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$; $Q_{p,*}(\varepsilon; \varphi)$, $T_4(\varepsilon; \varphi)$, $K_j^0(\varepsilon; \varphi)$, $\sigma_j^{\lambda\mu}(\varepsilon)$ даются формулами (22), (23), (26), (17) соответственно.

Отметим, что при введении обобщенного решения задачи в виде (29) мы следовали [1]. Если принять во внимание соотношения (16), (19), (21), (24), (25), то легко видеть, что (29) выражает принцип Лагранжа для системы оболочка–внешние силы. При этом $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ суть возможные деформации для этой системы.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* A *и* B. *Тогда при* $\varepsilon, \varphi \in \widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ *интегралы и* $I(\varphi)$ *в* (29) *имеют смысл и представляют собой линейные ограниченные функционалы в* $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ *относительно* φ *при фиксированной вектор-функции* ε.

Прежде всего отметим, что $\varepsilon, \varphi \in L_2(\overline{\Omega})$ в силу леммы 2. Далее доказательство леммы 3 проводится с использованием формул (26), леммы 1, теоремы 1.

По теореме Рисса существует элемент $G \in \widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ такой, что правая часть (29) представляется в виде скалярного произведения $(G, \varphi)_{\widetilde{L}_2}$. Очевидно, что $G = G(\varepsilon)$. Тогда (29) примет вид $(\varepsilon, \varphi)_{\widetilde{L}_2} = (G, \varphi)_{\widetilde{L}_2}$. Отсюда в силу произвольности φ получим

$$\varepsilon - G(\varepsilon) = 0. \quad (30)$$

Таким образом, нахождение обобщенного решения задачи свелось к нахождению решения операторного уравнения (30). Займемся исследованием разрешимости уравнения (30).

Лемма 4. *Оператор* $G(\varepsilon)$ *представим в виде*

$$G(\varepsilon) = G_1(\varepsilon; t) + G_2(\varepsilon; t) + t\varepsilon,$$

где

$$(G_1, \varphi)_{\widetilde{L}_2} = \iint\limits_{\Omega} \{D[R^1 \operatorname{Re} T_4(\varepsilon_3; \varphi_3) + R^2 \operatorname{Im} T_4(\varepsilon_3; \varphi_3)] + \widetilde{Q}^2 K_2^0(\varepsilon_3; \varphi_3) -$$
$$- \widetilde{Q}^1 K_1^0(\varepsilon_3; \varphi_3) - (1-t) D[Q_p(\varepsilon; \varphi) + Q_*(\varepsilon; \varphi)]\} d\alpha^1 d\alpha^2 - I(\varphi) + t I_0(\varphi), \quad (31)$$

$$(G_2, \varphi)_{\widetilde{L}_2} = \iint\limits_{\Omega} \{\sigma_1^{\lambda\mu}(\varepsilon) t_{\lambda\mu}^0(\varphi) + \sigma_2^{\lambda\mu}(\varepsilon) t_{\lambda\mu}^1(\varphi) +$$
$$+ [\sigma_1^{11}(\varepsilon) + \sigma_1^{22}(\varepsilon)] H_\delta(\varepsilon_3; \varphi_3) - t Q_\delta(\varepsilon; \varphi)\} D \, d\alpha^1 d\alpha^2; \quad (32)$$

$$I_0(\varphi) = \iint\limits_{\Omega} \Phi(\varphi) D \, d\alpha^1 d\alpha^2, \quad \delta Q(\varepsilon) \equiv Q_\delta(\varepsilon; \delta\varepsilon);$$

t — *произвольно фиксированный параметр из промежутка* $[0, 1)$.

Для доказательства леммы 4 к правой части (29) нужно прибавить и вычесть величину $t\iint\limits_{\Omega} Q_\delta(\varepsilon;\varphi)D\,d\alpha^1 d\alpha^2$, затем использовать (21), (27).

В силу леммы 4 уравнение (30) примет вид

$$(1-t)\varepsilon - G_1(\varepsilon;t) - G_2(\varepsilon;t) = 0. \tag{33}$$

Теорема 2. *Оператор $G_1(\varepsilon;t)$ при фиксированном t действует из $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ в $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ усиленно непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ (слабо) в $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$. В силу леммы 2 можем считать, что $\varepsilon^n \to \varepsilon^0$ (слабо) в $L_2(\overline{\Omega})$. Так как T_jf $(j=\overline{1,3})$, H_5f — вполне непрерывные линейные операторы в $L_2(\overline{\Omega})$, отображающие это пространство в $L_q(\overline{\Omega})$, $q \ge 1$, то они усиленно непрерывны ([1], с. 65). Далее, из усиленной непрерывности оператора T_1f и ограниченности операторов H_3f, H_4f в $L_2(\overline{\Omega})$ следует усиленная непрерывность Hf, $H_\delta(\varepsilon_3;\varphi_3)$. Тогда, используя соотношение (31), принимая при этом во внимание формулы (22), (23), (20), (26), после громоздких выкладок получим оценку

$$|(G_1(\varepsilon^n;t) - G_1(\varepsilon^0;t),\varphi)_{\widetilde{L}_2}| \le \delta_n\|\varphi\|_{\widetilde{L}_2},$$

где $\delta_n \to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда следует утверждение теоремы 2.

Лемма 5. *Пусть $\Gamma \in C^1_\alpha$ $(0<\alpha<1)$ и выполнено условие*

$$q \equiv q_0\|\overline{\Phi_\Gamma(z)} + 2(\operatorname{Re}T_2^*\gamma - i\operatorname{Re}T_3^*\gamma)\|_C < 1, \tag{34}$$

где $\gamma = A_1 + \overline{B}_1 - \Phi_\Gamma A_1 - \overline{\Phi_\Gamma B_1}$, $\Phi_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{d\overline{\zeta}}{z-\overline{\zeta}}$; q_0 (≤ 1) — известная положительная постоянная; T_j^*f — оператор, сопряженный оператору T_jf. Тогда уравнение

$$(H\varepsilon_3)(z) = 0, \quad z\in\overline{\Omega}, \tag{35}$$

имеет только тривиальное решение в $L_2(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_3 \in L_2(\overline{\Omega})$ есть нетривиальное решение уравнения (35). Обе части (35) интегрируем по области Ω. Применяя формулу Грина ([3], с. 28), после несложных преобразований приходим к неравенству

$$\iint\limits_{\Omega} |T_1\varepsilon_3|^2 d\alpha^1 d\alpha^2 \le q\iint\limits_{\Omega} |T_1\varepsilon_3|^2 d\alpha^1 d\alpha^2,$$

откуда в силу (34) следует $T_1\varepsilon_3 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. Так как $(T_1\varepsilon_3)(z)$ удовлетворяет уравнению (4), то $\varepsilon_3 \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$. □

Отметим, если Ω — круг, то $\Phi_\Gamma(z) = 0$, $z\in\Omega$. Кроме этого, если срединная поверхность S_0 является поверхностью нулевой гауссовой кривизны, то, как известно ([1], с. 18), на S_0 существует единая евклидова параметризация. Тогда $G^k_{ij} \equiv 0$, следовательно, $A_1 = B_1 = 0$. Отсюда $q=0$, т. е. условие (34) в этом частном случае выполняется.

В дальнейшем нам, как и в [1], потребуется некоторое разбиение сферы $S_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ гильбертова пространства $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ радиуса R с центром в нуле. Для его построения рассмотрим сферу $\|\varepsilon_3\|_{L_2} = 1$ (обозначим ее $S_{L_2}(1,0)$) пространства $L_2(\overline{\Omega})$. Через $S'_{L_2}(1,0)$ обозначим подмножество $S_{L_2}(1,0)$, элементы которого удовлетворяют неравенству

$$I(\varepsilon_3) \equiv \frac{c_1}{\delta}\|H_5\varepsilon_3\|^2_{L_2} + c_2\|\beta_1\operatorname{Re}T_4(\varepsilon_3;\varepsilon_3) + \beta_2\operatorname{Im}T_4(\varepsilon_3;\varepsilon_3) + \beta_3K^0_2(\varepsilon_3;\varepsilon_3) - \beta_4K^0_1(\varepsilon_3;\varepsilon_3)\|_{L_2} > \tfrac{1}{2}, \tag{36}$$

где c_j, $\delta > 0$ — некоторые фиксированные постоянные; β_j — фиксированные функции, не зависящие от ε_3. Множество $S'_{L_2}(r_3,0)$ в силу однородности функционала $I(\varepsilon_3)$ есть центральная проекция $S'_{L_2}(1,0)$ с единичной сферы $S_{L_2}(1,0)$ на сферу $S_{L_2}(r_3,0)$. Пусть $S''_{L_2}(1,0)$ есть подмножество $S_{L_2}(1,0)$, элементы которого удовлетворяют условию

$$I(\varepsilon_3) \le \frac{1}{2}. \tag{37}$$

$S''_{L_2}(r_3,0)$ есть центральная проекция $S''_{L_2}(1,0)$ с $S_{L_2}(1,0)$ на $S_{L_2}(r_3,0)$. Очевидно, $S'_{L_2}(r_3,0) \cup S''_{L_2}(r_3,0) = S_{L_2}(r_3,0)$. Если одно из этих подмножеств окажется пустым, это лишь упростит наши рассуждения. Через $\overline{S'_{L_2}}(1,0)$ обозначим слабое замыкание $S'_{L_2}(1,0)$.

Лемма 6. *Множество $\overline{S'_{L_2}}(1,0)$ не содержит нуля.*

Доказательство. Так как $H_5 0 = T_4(0;0) = K_j^0(0;0) = 0$, множество $S'_{L_2}(1,0)$ не содержит нуля. Пусть $\varepsilon_{3,n} \in S'_{L_2}(1,0)$ и $\varepsilon_{3,n} \to 0$ (слабо) в $L_2(\overline{\Omega})$, $n \to \infty$. Из усиленной непрерывности операторов $H_5\varepsilon_3$, $T_4(\varepsilon_3;\varepsilon_3)$, $K_j^0(\varepsilon_3;\varepsilon_3)$ в $L_2(\overline{\Omega})$ следует $\|H_5\varepsilon_{3,n}\|_{L_2}, \|T_4(\varepsilon_{3,n};\varepsilon_{3,n})\|_{L_2}$, $\|K_j^0(\varepsilon_{3,n};\varepsilon_{3,n})\|_{L_2} \to 0$ и (36) становится невозможным. Полученное противоречие доказывает лемму 6. □

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (34). *Тогда на $S'_{L_2}(r_3,0)$ справедливо неравенство*

$$\|H\varepsilon_3\|^2_{L_2} \ge c r_3^4, \quad c > 0.$$

Доказательство. Вначале установим, что на $S'_{L_2}(1,0)$ имеет место

$$\|H\varepsilon_3\|^2_{L_2} \ge c > 0. \tag{38}$$

Пусть существует последовательность $\varepsilon_{3,n} \in \overline{S'_{L_2}}(1,0)$ такая, что $\|H\varepsilon_{3,n}\|_{L_2} \to 0$ $(n \to \infty)$. Предположим, что $\varepsilon_{3,n} \to \varepsilon_{3,0}$ (слабо), $\varepsilon_{3,0} \in \overline{S'_{L_2}}(1,0)$. В силу усиленной непрерывности оператора $H\varepsilon_3$ имеем: $H\varepsilon_{3,n} \to H\varepsilon_{3,0}$ (сильно) в $L_2(\overline{\Omega})$. Следовательно, $H\varepsilon_{3,0} = 0$. Тогда в силу леммы 5 $\varepsilon_{3,0} \equiv 0$, что противоречит лемме 6. Итак, на $S'_{L_2}(1,0)$ имеет место (38). Отсюда в силу однородности оператора $H\varepsilon_3$ сразу получаем утверждение теоремы 3. □

Введем функционал $N(\varepsilon,\tau) = ((1-t)\varepsilon - \tau G_1(\varepsilon,t),\varepsilon)_{\widetilde{L}_2}$, определенный на $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega}) \times [0,1]$. Для исследования этого функционала $Q_p(\varepsilon;\varepsilon)$ представим в виде

$$Q_p(\varepsilon;\varepsilon) = 2Q_p^0(\varepsilon;\varepsilon) - H\varepsilon_3(d_p^{12}t_{12}^0 - 3d_p^{11}t_{11}^0 - 3d_p^{22}t_{22}^0 - 2f_3 d) - 2D_p^{1212}(t_{12}^0)^2, \tag{39}$$

где $Q_p^0 = D_p^{\lambda\mu qs}a_{\lambda\mu}a_{qs}$, $a_{11} = a_{22} = H\varepsilon_3$, $a_{12} = t_{12}^0$. В силу положительной определенности Q_p^o имеет место оценка

$$Q_p^0(\varepsilon;\varepsilon) \ge c[2(H\varepsilon_3)^2 + (t_{12}^0)^2], \quad c > 0. \tag{40}$$

Предположим, что

$$\iint\limits_{\Omega} [Q_p^0(\varepsilon;\varepsilon) + Q_*(\varepsilon;\varepsilon)] D\, d\alpha^1 d\alpha^2 \ge 0, \tag{41}$$

где $Q_*(\varepsilon;\varepsilon)$ дается формулой (23).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* A, B, (34), (41). *Тогда на сферах $S_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ достаточно большого радиуса R справедливо неравенство*

$$N(\varepsilon,\tau) \ge cR^2, \quad c > 0, \ \ 0 \le \tau \le 1.$$

Доказательство. Через $S'_{\widetilde{L}_2}(R,0)$, $S''_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ обозначим множества вектор-функций $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3) \in S_{\widetilde{L}_2}(R,0)$, у которых ε_3 принадлежит $S'_{L_2}(r_3,0)$, $S''_{L_2}(r_3,0)$ соответственно. Очевидно, $S_{\widetilde{L}_2}(R,0) = S'_{\widetilde{L}_2}(R,0) \cup S''_{\widetilde{L}_2}(R,0)$.

Оценим вначале $N(\varepsilon,\tau)$ на $S'_{\widetilde{L}_2}(R,0)$. С учетом (31), (39), (41) получаем

$$\begin{aligned}N(\varepsilon,\tau) \geq (1-t)\|\varepsilon\|^2_{\widetilde{L}_2} + \tau(1-t)\iint\limits_{\Omega} Q^0_p(\varepsilon;\varepsilon)D\,d\alpha^1 d\alpha^2 - \\ - \tau(1-t)\iint\limits_{\Omega}[|H\varepsilon_3(d^{12}_p t^0_{12} - 3d^{11}_p t^0_{11} - 3d^{22}_p t^0_{22})| + D^{1212}_p (t^0_{12})^2]D\,d\alpha^1 d\alpha^2 - \\ - \tau(1-t)\bigg|\iint\limits_{\Omega}\{D[2df_3 H\varepsilon_3 - R^1 \operatorname{Re} T_4(\varepsilon_3;\varepsilon_3) - R^2 \operatorname{Im} T_4(\varepsilon_3;\varepsilon_3)] - \\ - \widetilde{Q}^2 K^0_2(\varepsilon_3;\varepsilon_3) + \widetilde{Q}^1 K^0_1(\varepsilon_3;\varepsilon_3)\}d\alpha^1 d\alpha^2\bigg| - \tau|I(\varepsilon)| - \tau t|I_0(\varepsilon)|. \quad (42)\end{aligned}$$

Так как $I(\varepsilon)$, $I_0(\varepsilon)$ — линейные ограниченные функционалы в $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, то существуют $\varepsilon^1,\varepsilon^2 \in \widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$ такие, что $I(\varepsilon) = (\varepsilon^1,\varepsilon)_{\widetilde{L}_2}$, $I_0(\varepsilon) = (\varepsilon^2,\varepsilon)_{\widetilde{L}_2}$. Далее, используя (15), (40), теоремы 1, 3, из (42) будем иметь

$$\begin{aligned}N(\varepsilon,\tau) \geq (1-t)R^2 + \tau c[(1-t)c\|\varepsilon_3\|^4_{L_2} - \|\varepsilon_3\|^3_{L_2} - \\ - (1 + \|\varepsilon_1\|_{L_2} + \|\varepsilon_2\|_{L_2})\|\varepsilon_3\|^2_{L_2} - (\|\varepsilon^1\|_{\widetilde{L}_2} + \|\varepsilon^2\|_{\widetilde{L}_2})\|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2} - \|\varepsilon_2\|^2_{L_2}], \quad c > 0. \quad (43)\end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой полином четвертой степени относительно $\|\varepsilon_3\|_{L_2}$ с положительным старшим коэффициентом. Поэтому при произвольно фиксированных $\|\varepsilon_j\|_{L_2} = r_j$ $(j = 1,2)$ радиус сферы $\|\varepsilon_3\|_{L_2} = r_3$ можем взять настолько большим, что выражение в квадратных скобках в (43) станет больше нуля. Итак, при $R \in [m_0 r^2, M_0 r^2]$, $r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ на $S'_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ имеет место оценка

$$N(\varepsilon,\tau) \geq (1-t)R^2, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (44)$$

Теперь оценим $N(\varepsilon,\tau)$ на $S''_{\widetilde{L}_2}(R,0)$. Из (42) имеем

$$\begin{aligned}N(\varepsilon,\tau) \geq (1-t)R^2 + \tau(1-t)\bigg[\iint\limits_{\Omega} Q^0_p(\varepsilon;\varepsilon)D\,d\alpha^1 d\alpha^2 - \delta\|H\varepsilon_3\|^2_{L_2}\bigg] - \\ - \tau(1-t)\bigg\{\frac{1}{2\delta}\|D(d^{12}_p t^0_{12} - 3d^{11}_p t^0_{11} - 3d^{22}_p t^0_{22})\|^2_{L_2} + 2\|DD^{1212}_p\|_c\|t^0_{12}\|^2_{L_2} + \frac{1}{\delta}\|f_3 dD\|^2_{L_2}\bigg\} - \\ - \sqrt{\operatorname{mes}\Omega}\,\|D[R^1 \operatorname{Re} T_4(\varepsilon_3;\varepsilon_3) + R^2 \operatorname{Im} T_4(\varepsilon_3;\varepsilon_3)] + \\ + \widetilde{Q}^2 K^0_2(\varepsilon_3;\varepsilon_3) - \widetilde{Q}^1 K^0_1(\varepsilon_3;\varepsilon_3)\|_{L_2} - (\|\varepsilon^1\|_{\widetilde{L}_2} + \|\varepsilon^2\|_{\widetilde{L}_2})\|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}. \quad (45)\end{aligned}$$

В силу того, что $Q^0_p(\varepsilon;\varepsilon)$ является положительно определенной квадратичной формой переменных $H\varepsilon_3$, t^0_{12}, постоянную $\delta > 0$ можно выбрать так, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} Q^0_p(\varepsilon;\varepsilon)D\,d\alpha^1 d\alpha^2 - \delta\|H\varepsilon_3\|^2_{L_2} \geq 0. \quad (46)$$

Теперь в силу (46) из (45) получаем

$$N(\varepsilon,\tau) \geq (1-t)R^2 - \frac{3}{2\delta}\|Dd\|_c\|H_5\varepsilon_3\|^2_{L_2} - \frac{c}{2\delta}(\|\varepsilon_1\|^2_{L_2} + \|\varepsilon_2\|^2_{L_2}) - 2\|DD_p^{1212}\|_c\|\varepsilon_2\|^2_{L_2} - \frac{1}{\delta}\|f_3 dD\|^2_{L_2} -$$
$$- \sqrt{\operatorname{mes}\Omega}\,\|D[R^1 \operatorname{Re} T_4(\varepsilon_3;\varepsilon_3) + R^2 \operatorname{Im} T_4(\varepsilon_3;\varepsilon_3)] + \widetilde{Q}^2 K_2^0(\varepsilon_3;\varepsilon_3) - \widetilde{Q}^1 K_1^0(\varepsilon_3;\varepsilon_3)\|_{L_2} -$$
$$- (\|\varepsilon^1\|_{\widetilde{L}_2} + \|\varepsilon^2\|_{\widetilde{L}_2})\|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}. \quad (47)$$

Положим $c_1 = \frac{3}{2(1-t)m_0}\|Dd\|_c$, $c_2 = \frac{\sqrt{\operatorname{mes}\Omega}}{(1-t)m_0}$, $\beta_j = DR^j$ $(j=1,2)$, $\beta_3 = \widetilde{Q}^2$, $\beta_4 = \widetilde{Q}^1$. Тогда, принимая во внимание неравенство (37), лемму 2, из (47) будем иметь

$$N(\varepsilon,\tau) \geq \frac{(1-t)m_0}{2}\|\varepsilon\|^2_{L_2} - c\Big[\|\varepsilon\|_{L_2} - \frac{1}{\delta}(\|\varepsilon_1\|^2_{L_2} + \|\varepsilon_2\|^2_{L_2} + 1)\Big].$$

Отсюда следует, что при фиксированных r_j $(j=1,2)$ радиус сферы $\|\varepsilon_3\|_{L_2} = r_3$ можем взять настолько большим, что справедливо

$$N(\varepsilon,\tau) \geq \frac{1-t}{3}\frac{m_0}{M_0}R^2, \quad \forall\tau \in [0,1]. \tag{48}$$

Из (44), (48) следует утверждение теоремы 4. □

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4. *Тогда вполне непрерывное поле* $(1-t)\varepsilon - G_1(\varepsilon;t)$ *гомотопно полю* $(1-t)\varepsilon$ *на сферах достаточно большого радиуса пространства* $\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$, *следовательно, его вращение на этих сферах равно* $+1$.

Справедливость теоремы 5 легко следует из теоремы 4.

Вернемся к уравнению (33) и рассмотрим оператор $G_2(\varepsilon;t)$, определенный формулой (32). Предположим, что для любых ε^j, $\|\varepsilon^j\|_{L_2} \leq r$, $j=1,2$, имеет место

$$\|\sigma_j^{\lambda\mu}(\varepsilon^1) - \sigma_j^{\lambda\mu}(\varepsilon^2)\|_{L_2} \leq c\|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_{L_2}, \quad \lambda,\mu,j = 1,2. \tag{49}$$

Тогда в силу (49), теоремы 1 из (32) будем иметь

$$\|G_2(\varepsilon^1;t) - G_2(\varepsilon^2;t)\|_{\widetilde{L}_2} \leq c_0\|\varepsilon^1 - \varepsilon^2\|_{\widetilde{L}_2} \tag{50}$$

для любых ε^j, принадлежащих шару $\|\varepsilon^j\|_{\widetilde{L}_2} \leq R$, где R определяется теоремой 4. Далее, предположим, что существует такое значение параметра $t \in [0,1)$, что постоянная c_0 в (50) удовлетворяет неравенству

$$c_0 < \frac{(1-t)m_0}{3M_0}, \tag{51}$$

где m_0, M_0 — постоянные, определенные в лемме 2.

Из (50) легко следует

$$\|G_2(\varepsilon;t)\|_{\widetilde{L}_2} \leq c_0\|\varepsilon\|_{\widetilde{L}_2}. \tag{52}$$

Фиксируя некоторое $t \in [0,1)$ при помощи условия (51), введем оператор $\widetilde{G}_2(\varepsilon;t) = \frac{G_2(\varepsilon;t)}{1-t}$, который удовлетворяет условию (50) с постоянной $\widetilde{c}_0 < \frac{m_0}{3M_0} < 1$. Тогда, применяя принцип сжатых отображений ([5], с. 148) к (33), приходим к уравнению

$$(1-t)\varepsilon - \widetilde{R}G_1(\varepsilon;t) = 0, \tag{53}$$

которое эквивалентно (33). В (53) через $\widetilde{R}$ обозначена резольвента оператора $\widetilde{G}_2(\varepsilon;t)$. Далее, из условия (52) и теоремы 4 следует, что векторное поле $(1-t)\varepsilon - G_1(\varepsilon;t) - G_2(\varepsilon;t)$ на сфере $S_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ не имеет нулевых векторов. Тогда, как известно ([5], с. 163), вполне непрерывные поля $(1-t)\varepsilon - G_1(\varepsilon;t)$ и $(1-t)\varepsilon - \widetilde{R}G_1(\varepsilon;t)$ гомотопны. Следовательно, вращение поля $(1-t)\varepsilon - \widetilde{R}G_1(\varepsilon;t)$

на сфере $S_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ равно $+1$. Тогда уравнение (53) внутри сферы $S_{\widetilde{L}_2}(R,0)$ имеет по крайней мере одно решение $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\widetilde{L}_2(\overline{\Omega})$.

Литература

1. Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек.* – М.: Наука, 1989. – 373 с,
2. Тимергалиев С.Н. *Доказательство разрешимости одной задачи нелинейной теории пологих оболочек* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 9. – С. 60–70.
3. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1988. – 509 с.
4. Терегулов И.Г. *Определяющие соотношения для физически нелинейных анизотропных и композитных оболочек при конечных деформациях*, I // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 5. – С. 33–41.
5. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Камский политехнический институт

Поступила
27.04.1996