ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 7 (458)

УДК 519.4 + 513.88

В.Б. ЛЕВЕНШТАМ

О МЕТОДЕ УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работах [1], [2] метод усреднения обоснован для задачи об (общих) ограниченных решениях квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка $2k$ с быстро осциллирующей по времени главной частью. В данной работе исследуется задача о периодических по времени решениях для таких уравнений. В § 1 обоснован метод усреднения. Показано, что при определенных условиях в некоторой окрестности стационарного решения v_0 усредненной задачи для больших значений асимптотического параметра ω существует единственное $l\omega^{-1}$-периодическое по времени решение возмущенной задачи ($l\omega^{-1}$ — период коэффициентов этой задачи) и справедлива оценка[1]

$$\|u_\omega - v_0\|_{C^{2k+\gamma,\gamma/2k}} \le c\omega^{-1+\gamma/2k}, \ \ \gamma \in [0,1), \quad c = \mathrm{const}\,.$$

В § 2 при дополнительных условиях гладкости коэффициентов возмущенной задачи построены старшие приближения $\overset{n}{v}_\omega$, $n = 0, 1, \dots$, для которых при любых неотрицательных числах r и s выполняются оценки

$$\|u_\omega - \overset{n}{v}_\omega\|_{C^{r,s}} \le c_n\omega^{-(n+1)+s}, \quad \omega \gg 1,$$

где $c_n = c_n(r,s) = \mathrm{const}$.

1. Обоснование метода усреднения

1°. Пусть k и m — натуральные числа, $l > 0$. Обозначим через $p\Big(= \sum\limits_{i=0}^{2k-1}(m+i-1)!/i!(m-1)!\Big)$ количество всевозможных частных производных гладкой функции $u(x)$, $x \in R^m$, до порядка $2k-1$ включительно. Пусть на множестве $R^m \times C^p \times R^1$ заданы функции $a_\alpha(x,e,\tau)$ и $f(x,e,\tau)$, которые вместе с производными $\frac{\partial a_\alpha}{\partial e_i}(x,e,\tau)$, $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x,e,\tau)$ по компонентам вектора $e \in C^p$ непрерывны по совокупности переменных и l-периодичны по τ. Пусть, кроме того, для произвольного ограниченного множества[2] $M \subset C^p$ эти функции и их указанные производные на множестве $R^m \times M \times R^1$ равномерно ограничены и удовлетворяют по x условию Гёльдера с показателем $\gamma \in (0,1)$ и константой $c(M)$, не зависящей от $(x,e,\tau) \in R^m \times M \times R^1$, а функции $\frac{\partial a_\alpha}{\partial e_i}(x,e,\tau)$ и $\frac{\partial f}{\partial e_i}(x,e,\tau)$ удовлетворяют, кроме того, равномерному относительно x, e, τ условию Липшица по e.

[1] Определение гёльдеровой нормы $\|\cdot\|_{C^{r,s}}$, $r \ge 0$, $s \ge 0$ см. в п. 1°.

[2] Под множеством M можно подразумевать фиксированный шар в C^p, содержащий строго внутри себя все векторы $(\delta^{2k-1}v_0)(x)$, $x \in R^m$, где v_0 — решение усредненной задачи, определенное ниже (обозначение δ^{2k-1} также введено ниже).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 96-01-01417 и 98-01-00136).

Рассмотрим задачу о $l\omega^{-1}$-периодических по времени t решениях квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x, \delta^{2k-1}u, \omega t)\mathcal{D}^\alpha u + f(x, \delta^{2k-1}u, \omega t). \tag{1.1}$$

Здесь ω — большой асимптотический параметр, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ — m-мерный мультииндекс, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$, $\mathcal{D}^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}$, $\delta^{2k-1}u = (u, \ldots, \frac{\partial^{2k-1}u}{\partial x_m^{2k-1}})$ — вектор-функция, составленная из всевозможных частных производных функции u по $x_1, \ldots, x_m$ до порядка $2k-1$ включительно.

Предположим, что для уравнения (1.1) выполнено условие равномерной параболичности, т. е. для всех вещественных векторов $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$ справедлива оценка

$$(-1)^{k+1} \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x, e, \tau)\sigma^\alpha \geq \delta|\sigma|^{2k},$$

где постоянная $\delta = \delta(M)$ не зависит от $(x, e, \tau) \in R^m \times M \times R^1$.

Обозначим через $\mathring{a}_\alpha(x, e)$ и $\mathring{f}(x, e)$ средние функций $a_\alpha(x, e, \tau)$ и $f(x, e, \tau)$ по τ:

$$\mathring{g}(x, e) = l^{-1}\int_0^l g(x, e, \tau)d\tau,$$

где $g = a_\alpha, f$.

Предположим, что усредненная задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} \mathring{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1}v)\mathcal{D}^\alpha v + \mathring{f}(x, \delta^{2k-1}v) \tag{1.2}$$

имеет стационарное решение v_0 такое, что множество векторов $(\delta^{2k-1}v_0)(x)$, $x \in R^m$, в пространстве C^p ограничено. Все решения в данной работе понимаются в классическом смысле.

Прежде чем сформулировать теорему 1, напомним определения некоторых банаховых пространств и введем необходимые обозначения.

Через C^r, $r \geq 0$, обозначается банахово пространство непрерывных в R^m функций $u(x)$, имеющих непрерывные и равномерно ограниченные производные по x до порядка $r_0 = [r]$ ($[r]$ — целая часть r) включительно и удовлетворяющие условию

$$\|u\|_{C^r} = \sup_{x\in R^m}\sum_{|\alpha|\leq r_0} |\mathcal{D}^\alpha u(x)| + \delta_r \sup_{x''\neq x'}\sum_{|\alpha|=r_0} |\mathcal{D}^\alpha u(x'') - \mathcal{D}^\alpha u(x')|/|x''-x'|^{(r-r_0)} < \infty,$$

где $\delta_r = 0$ при r целом и $\delta_r = 1$ при r нецелом.

Через $C^{r,\mu}$, где $r \geq 0$, $\mu \in [0, 1)$, обозначается банахово пространство непрерывных в R^{m+1} функций $u(x, t)$, имеющих непрерывные производные по x до порядка $r_0 = [r]$ включительно и удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{C^{r,\mu}} = \sup_{(x,t)\in R^{m+1}}\sum_{|\alpha|\leq r_0} |\mathcal{D}^\alpha u(x, t)| + \delta_r \sup_{(x',t)\neq(x'',t)}\sum_{|\alpha|=r_0} |\mathcal{D}^\alpha u(x'', t) - \mathcal{D}^\alpha u(x', t)|/|x''-x'|^{r-r_0} +$$
$$+ \delta_\mu \sup_{(x,t')\neq(x,t'')}\sum_{|\alpha|\leq r_0} |\mathcal{D}^\alpha u(x, t'') - \mathcal{D}^\alpha u(x, t')|/|t''-t'|^{\mu} < \infty.$$

Пусть $r, s \geq 0$. Если функция $u(x, t) \in C^{r,s-s_0}$, где $s_0 = [s]$, имеет непрерывные по t производные до порядка s_0 включительно, которые также принадлежат пространству $C^{r,s-s_0}$, то определим ее $C^{r,s}$-норму с помощью равенства

$$\|u\|_{C^{r,s}} = \sum_{i=0}^{s_0} \left\|\frac{\partial^i u(x, t)}{\partial t^i}\right\|_{C^{r,s-s_0}}.$$

Для функций $u(x,t)$, заданных на декартовом произведении $R^m \times [a_1, a_2]$, где $-\infty < a_1 < a_2 < \infty$, аналогичным образом вводится норма $\|u\|_{C^{r,s}_{[a_1,a_2]}}$.

Через L обозначим линейный оператор, действующий в пространстве C^γ по правилу

$$Lv = \sum_{|\alpha|=2k} \overset{\circ}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1}v_0)\mathcal{D}^\alpha v + \sum_{|\alpha|=2k} \{[D_e \overset{\circ}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}v)\}\mathcal{D}^\alpha v_0 +$$
$$+ [(D_e \overset{\circ}{f})(x, \delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}v), \quad v \in D(L) = C^{2k+\gamma}.$$

Здесь $[(D_e a)(x, \overset{\circ}{e})](e) = \sum\limits_{i=0}^{p} \frac{\partial a(x,\overset{\circ}{e})}{\partial e_i} e_i$ — частный дифференциал функции $a(x,e)$ по группе переменных e.

Теорема 1. *Пусть усредненная задача* (1.2) *имеет стационарное решение* $v_0 \in C^{2k-1+\gamma}$ *и спектр* $\sigma(L)$ *оператора* L *не содержит нуля. Тогда для любого* $\gamma_1 \in (0,\gamma)$ *найдутся такие положительные числа* ρ_0 *и* ω_0, *что при* $\omega > \omega_0$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Уравнение* (1.1) *имеет в шаре* $S^{\rho_0}_{C^{2k+\gamma_1,\gamma_1/2k}}(v_0) := \{u \in C^{2k+\gamma_1,\gamma_1/2k} : \|u - v_0\|_{C^{2k+\gamma_1,\gamma_1/2k}} \le \rho_0\}$ *единственное* $l\omega^{-1}$*-периодическое по* t *решение* u_ω, *причем справедлива точная по параметру* ω *оценка*
$$\|u_\omega - v_0\|_{C^{2k+\gamma_1,\gamma_1/2k}} \le c\omega^{-1+\gamma_1/2k}, \quad c = \mathrm{const}\,.$$

2. *Если спектр* $\sigma(L)$ *лежит строго внутри левой комплексной полуплоскости, то решение* u_ω *экспоненциально устойчиво при произвольном выборе начального момента времени* s, *причем равномерно по* ω *и по* s. *Это означает существование таких положительных чисел* r_0, ν_1, ν_2, *что для любого* $s \in R^1$ *и любой функции* $\psi \in C^{2k+\gamma_1}$, *удовлетворяющей условию* $\|u_\omega(x,s) - \psi(x)\|_{C^{2k+\gamma_1}} \le r_0$, *существует решение* $u^s_\omega(x,t)$, $t \ge s$, *задачи Коши для уравнения* (1.1) *с начальным условием* $u^s_\omega(x,s) = \psi(x)$, *и при* $t \ge s$ *справедлива оценка*
$$\|u_\omega(x,t) - u^s_\omega(x,t)\|_{C^{2k+\gamma_1}} \le \nu_1 \exp[-\nu_2(t-s)]\|u_\omega(x,s) - u^s_\omega(x,s)\|_{C^{2k+\gamma_1}}.$$

2°. Как известно, оператор L порождает в пространстве C^γ аналитическую полугруппу $\exp(tL)$, которая является эволюционным оператором уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Lv = 0. \tag{1.3}$$

Отсюда, из теоремы об отображении спектра для аналитических полугрупп и предположения $0 \notin \sigma(L)$ следует, что при некотором (фиксируемом здесь) числе $T > 0$ спектр $\sigma(\exp(TL))$ оператора $\exp(TL)$ не содержит единицы.

Рассмотрим вспомогательное линейное параболическое уравнение

$$L_\omega u := \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x, \delta^{2k-1}b_\omega(x,t), \omega t)\mathcal{D}^\alpha u -$$
$$- \sum_{|\alpha|=2k} \{[(D_e \overset{\circ}{a}_\alpha)(x, \delta^{2k-1}c_\omega(x,t))](\delta^{2k-1}u)\}\mathcal{D}^\alpha v_0 - [(D_e \overset{\circ}{f})(x, \delta^{2k-1}d_\omega(x,t))](\delta^{2k-1}u) = 0, \tag{1.4}$$

где $b_\omega, c_\omega, d_\omega \in C^{2k-1+\gamma,0}$ — зависящие от параметра $\omega > 0$ функции. Введем величину $t_\omega = [T\omega l^{-1}]l\omega^{-1}$. Пусть $U_\omega(t,\tau)$, $-\infty < \tau < t < \infty$, — оператор сдвига по траекториям уравнения (1.4) (эволюционный оператор), а $V_\omega(s) = U_\omega(s + t_\omega, s)$, $s \in R$ — оператор, являющийся в случае t_ω-периодических по t функций b_ω, c_ω, d_ω оператором монодромии, отвечающим периоду t_ω. Через $\mathrm{Hom}(B_1, B_2)$, где B_1, B_2 — банаховы пространства, обозначается пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2, с равномерной операторной нормой.

Справедлива

Лемма. *Пусть* $\gamma_1 \in (0,\gamma)$. *Тогда существуют такие положительные числа* ω_1, r_1 *и* c_1, *что при всех* $\omega > \omega_1$ *и любых функциях* b_ω, c_ω *и* d_ω, *лежащих в шаре* $S^{r_1}_{C^{2k-1+\gamma_1,0}}(v_0)$, *спектр оператора* $V_\omega(s)$, $s \in R$ *в пространстве* $C^{2k+\gamma_1}$ *не содержит единицы и, более того, справедлива оценка*

$$\|[I - V_\omega(s)]^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(C^{2k+\gamma_1},C^{2k+\gamma_1})} \le c_1.$$

Доказательство несложно и опускается. Отметим лишь некоторые оценки ([3], с. 64–115; [2]), на которые оно опирается.

Пусть $s \in R^1$, $T_0 > 0$. Обозначим через $G(t-\tau,x,\xi)$ и $G_\omega(t,\tau,x,\xi)$, $s < \tau < t < s+T_0$, фундаментальные решения задачи Коши для уравнений (1.3) и (1.4) соответственно. Пусть $h \in R^m$, $h_1 \in R^1$,

$$\Delta_{h,h_1} f(x,t) = f(x+h,t+h_1) - f(x,t),$$
$$v_\omega(x,t,\psi) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{R^m} G_\omega(t,\tau,x,\xi)\psi(\xi,\tau)d\xi, \quad s \le t_0 < t \le s+T_0.$$

Имеют место следующие соотношения для функций G_ω (а также аналогичные оценки и для G):

$$|D_x^\alpha G_\omega(t,\tau,x,\xi)| \le c_0(t-\tau)^{-(m+|\alpha|)/2k}\exp[-c_1\rho(t,\tau,x,\xi)], \tag{1.5}$$
$$\begin{aligned}|\Delta_{h,h_1} D_x^\alpha G_\omega(t,\tau,x,\xi)| \le c_0(t-\tau)^{-(m+|\alpha|+\gamma')/2k}[|h|^{\gamma'} + |h_1|^{\gamma'/2k}] \times \\ \times \max\{\exp[-c_1\rho(t,\tau,x-\xi)], \exp[-c_1\rho(t,\tau,x+h-\xi)]\},\end{aligned} \tag{1.6}$$
$$|\Delta_{h,h_1} D_x^\alpha v_\omega| \le c_0[|h|^{\gamma'} + |h_1|^{\gamma'/2k}][t-t_0]^{(2k-|\alpha|+\gamma-\gamma')/2k}\|\psi\|_{C^{\gamma,0}}. \tag{1.7}$$

Здесь $\rho(t,\tau,x) = \sum\limits_{i=1}^{m}[|x_i|(t-\tau)^{-1/2k}]^{2k/(2k-1)}$, $0 \le h_1 \le a(t-\tau)$ при некоторой постоянной $a > 0$, c_0, c_1 — положительные постоянные, не зависящие от ω, t_0, t, τ, x, ξ, h, h_1, s и ψ, $0 < \gamma' \le \gamma$, причем при $|\alpha| = 2k$, $\gamma' < \gamma$.

3°. Перейдем к доказательству первого утверждения теоремы 1. Обозначим через $C_w(t,\tau,x,\xi)$ и $U_w(t,\tau)$, $0 \le \tau < t \le 2t_\omega$, соответственно фундаментальное решение задачи Коши и оператор сдвига по траекториям уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x,\delta^{2k-1}(w+v_0),\omega t)\mathcal{D}^\alpha u - \sum_{|\alpha|=2k}\{[(D_e\mathring{a}_\alpha)(x,\delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}u)\}\mathcal{D}^\alpha v_0 - \\ - [(D_e\mathring{f})(x,\delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}u) = 0, \quad w \in C^{2k-1+\gamma,0}_{[0,2t_\omega]}.\end{aligned}$$

Пусть $\gamma_1 \in (0,\gamma)$. Согласно лемме 1 найдутся такие положительные числа r_1, ω_1 и c_1, что при всех w, лежащих в шаре $S^{r_1} := S^{r_1}_{C^{2k-1+\gamma_1,0}_{[0,2t_\omega]}}(0)$ и всех $\omega > \omega_1$ справедлива оценка

$$\|[I - U_w(t_\omega,0)]^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(C^{2k+\gamma_1},C^{2k+\gamma_1})} \le c_1.$$

При $\omega > \omega_1$ определим оператор P, действующий из шара S^{r_1} в пространство $C^{2k+\gamma_1,\gamma_1/2k}_{[0,2t_\omega]}$ по правилу

$$\begin{aligned}[P(w)](x,t) = U_w(t_\omega,0)[I - U_w(t_\omega,0)]^{-1}\int_0^{t_\omega} d\tau \int_{R^m} G_w(t_\omega,\tau,x,\xi) \times \\ \times \Bigg\{ \sum_{|\alpha|=2k} [a_\alpha(\xi,\delta^{2k-1}(w+v_0),\omega\tau) - \mathring{a}_\alpha(\xi,\delta^{2k-1}v_0) - [(D_e\mathring{a}_\alpha)(\xi,\delta^{2k-1}v_0)]]\mathcal{D}^\alpha v_0 + \\ + f(\xi,\delta^{2k-1}(w+v_0),\omega t) - \mathring{f}(\xi,\delta^{2k-1}v_0) - [(D_e\mathring{f}_\alpha)(\xi,\delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}w)\Bigg\}d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^m} G_w(t,\tau,x,\xi)\{\dots\}d\xi\end{aligned} \tag{1.8}$$

Можно показать (см., напр., [4], с. 34), что сужение на участок $t \in [0, 2t_\omega]$ каждого t_ω-периодического по t решения u уравнения (1.1), для которого $u - v_0 \in S^{r_1}$, удовлетворяет уравнению

$$u = P(u - v_0) + v_0, \tag{1.9}$$

и наоборот, каждое t_ω-периодическое продолжение решения уравнения (1.9) является t_ω-периодическим решением уравнения (1.1).

Докажем, что существуют такие числа $\omega \geq \omega_1$ и $r_0 \in (0, r_1]$, что при $\omega > \omega_0$ оператор P в шаре $\widetilde{S}^{r_0} := \{w \in S^{r_0}_{C^{2k+\gamma_1,\gamma_1/2k}_{[0,2t_\omega]}}(0) : w(x, t + t_\omega) = w(x, t),\ t \in [0, t_\omega]\}$ является сжатием. Пусть функции $w_1, w_2 \in \widetilde{S}^{r_1}$. Обозначим разность $w_2 - w_1$ через w и воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} P(w_2) - P(w_1) = U_{w_1}(t, 0)[I - U_{w_1}(t_\omega, 0)]^{-1} \int_0^{t_\omega} d\tau \times \\ \times \int_{R^m} G_{w_1}(t_\omega, \tau, x, \xi) \Big\{ \sum_{|\alpha|=2k} \Big\{ \int_0^1 (D_e a_\alpha)[\xi, \delta^{2k-1}(s w_2 + (1-s) w_1 + v_0), \omega\tau] ds (\delta^{2k-1} w) \mathcal{D}^\alpha P(w_2) + \\ + \Big[\int_0^1 (D_e a_\alpha)[\xi, \delta^{2k-1}(s w_2 + (1-s) w_1 + v_0), \omega\tau] ds - (D_e \mathring{a}_\alpha)(\xi, \delta^{2k-1} v_0) \Big] (\delta^{2k-1} w) \mathcal{D}^\alpha v_0 \Big\} + \\ + \Big[\int_0^1 (D_e f)[\xi, \delta^{2k-1}(s w_2 + (1-s) w_1 + v_0), \omega\tau] ds - (D_e \mathring{f})(\xi, \delta^{2k-1} v_0) \Big] (\delta^{2k-1} w) \Big\} d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{R^m} G_{w_1}(t, \tau, x, \xi) \{\dots\} d\xi. \end{aligned} \tag{1.10}$$

С помощью оценок (1.5)–(1.7) из равенств (1.8), (1.10) выводятся соотношения

$$\|P(w)\|_{C^{2k+\gamma_1,\gamma_1/2k}_{[t_\omega,2t_\omega]}} \leq d_1(r_1, \omega_1),$$
$$\|P(w_2) - P(w_1)\|_{C^{2k+\gamma_1,\gamma_1/2k}_{[t_\omega,2t_\omega]}} \leq d_2(r_1, \omega_1) \|w_2 - w_1\|_{C^{2k+\gamma_1,\gamma_1/2k}_{[0,t_\omega]}},$$

где функции d_i таковы, что $\lim_{r_1 \to 0, \omega_1 \to \infty} d_i(r_1, \omega_1) = 0$, $i = 1, 2$. Отсюда следует указанное в начале абзаца утверждение, а вслед за тем в силу принципа сжатых отображений и утверждение 1 теоремы 1.

Утверждение 2 теоремы 1 доказывается аналогично второму утверждению теоремы 3 [2].

2. Старшие приближения

1°. Пусть функции $a_\alpha(x, e, \tau)$, $|\alpha| = 2k$, и $f(x, e, \tau)$, входящие в уравнение (1.1), удовлетворяют предположениям п. 1° § 1 и следующим дополнительным условиям. Существуют их непрерывные производные по всем аргументам любого порядка, и для произвольного ограниченного в C^p множества M (см. сноску в п. 1° § 1) при всех $(x, e, \tau) \in R^m \times M \times R^1$ выполняются оценки

$$\left| D_x^\beta D_e^\gamma \frac{\partial^i}{\partial \tau^i} g(x, e, \tau) \right| \leq c_{\alpha,\beta,i}, \tag{2.1}$$

где $g = a_\alpha$ или f, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ — произвольные мультииндексы, i — произвольное целое неотрицательное число, $c_{\alpha,\beta,i} = \mathrm{const}$.

Введем следующие обозначения. Для любых l-периодических по τ функций $a(x, e, \tau)$, $v(x, \tau)$ обозначим через $M_\tau a = \mathring{a}$, $M_\tau v = \mathring{v}$ их средние по τ, а через $\overset{1}{a}$, $\overset{1}{v}$ — их осциллирующие составляющие, так что

$$a = \mathring{a} + \overset{1}{a}, \quad v = \mathring{v} + \overset{1}{v},$$

где

$$\mathring{a}(x, e) = l^{-1} \int_0^l a(x, e, \tau) dt, \quad \mathring{v}(x, e) = l^{-1} \int_0^l v(x, e, \tau) d\tau.$$

Уравнение (1.1) теперь можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \sum_{|\alpha|=2k} [\overset{\circ}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1}u) + \overset{1}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1}u, \omega t)]\mathcal{D}^\alpha u + [\overset{\circ}{f}(x, \delta^{2k-1}u) + \overset{1}{f}(x, \delta^{2k-1}u, \omega t)]. \qquad (2.2)$$

Будем искать приближение к $l\omega^{-1}$-периодическому по t решению u_ω уравнения (2.2) в виде суммы

$$\overset{n}{v}_\omega(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \omega^{-1} v_i(x, \omega t) = \sum_{i=0}^{n} \omega^{-1}[\overset{\circ}{v}_i(x) + \overset{1}{v}_i(x, \omega t)]. \qquad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в уравнение (2.2), раскладывая формально коэффициенты в ряды Тейлора по группе переменных $\delta^{2k-1}u$ с центром разложения $\delta^{2k-1}v_0$, а затем группируя члены с одинаковыми степенями ω отдельно для стационарных и осциллирующих слагаемых, приходим к следующим задачам:

$$\frac{\partial \overset{1}{v}_0}{\partial \tau} = 0, \quad \sum_{|\alpha|=2k} \overset{\circ}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1}\overset{\circ}{v}_0)\mathcal{D}^\alpha \overset{\circ}{v}_0 + \overset{\circ}{f}(x, \delta^{2k-1}\overset{\circ}{v}_0) = 0, \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial \overset{1}{v}_1}{\partial t} = \sum_{|\alpha|=2k} \overset{1}{a}_\alpha(x, \delta^{2k-1}\overset{\circ}{v}_0, \tau)\mathcal{D}^\alpha \overset{\circ}{v}_0 + \overset{1}{f}(x, \delta^{2k-1}\overset{\circ}{v}_0, \tau), \qquad (2.5)$$

$$L\overset{\circ}{v}_1 = -M_\tau \Big\{ \sum_{|\alpha|=2k} \{[(D_e \overset{1}{a}_\alpha)(x, \delta^{2k-1}\overset{\circ}{v}_0, \tau)](\delta^\beta \overset{1}{v}_1)\mathcal{D}^\alpha \overset{\circ}{v}_0 -$$

$$- \overset{1}{a}_\alpha(x, \delta^\beta \overset{\circ}{v}_0, \tau)\mathcal{D}^\alpha \overset{1}{v}_1\} - [(D_e \overset{1}{f})(\delta^\beta \overset{\circ}{v}_0, \tau)](\delta^\beta \overset{1}{v}_1)\Big\}, \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial \overset{1}{v}_k}{\partial \tau} = \overset{1}{\varphi}_k(x, \tau), \qquad (2.7)$$

$$L\overset{\circ}{v}_k = \psi_k(x), \quad 1 < k \le n, \quad \tau = \omega t. \qquad (2.8)$$

Здесь осциллирующие функции $\overset{1}{\varphi}_k$ имеют нулевое среднее по τ и выражаются через функции $\overset{\circ}{v}_i$, $\overset{1}{v}_i$ с номерами $i \le k-1$, а стационарные функции ψ_k определяются с помощью этих же функций и $\overset{1}{v}_k$.

Из первого уравнения (2.4) находим $\overset{1}{v}_0 = 0$. Второму уравнению (2.4) согласно предположениям п. 1° § 1 удовлетворяет функция $\overset{\circ}{v}_0 = v_0$, где v_0 — стационарное решение усредненного уравнения (1.2). При этом для любого $r \ge 0$ $v_0 \in C^r$, в чем можно убедиться, например, с помощью непосредственного многократного дифференцирования по x уравнения (1.2) и применения после каждого дифференцирования оценки (1.7).

Для нахождения решения $\overset{1}{v}_1$ уравнения (2.5) обозначим для краткости правую часть последнего через $\overset{1}{\varphi}_1(x, \tau)$. Тогда, очевидно, единственное решение уравнения (2.5) примет вид

$$\overset{1}{v}_1(x, \tau) = \int_0^\tau \varphi_1(x, s)ds - l^{-1}\int_0^l d\tau \int_0^\tau \varphi_1(x, s)ds.$$

При этом из данного представления и (2.1) следуют оценки

$$\|\overset{1}{v}_1\|_{C^{r,s}} \le \overset{1}{c}_{r,s}, \quad \overset{1}{c}_{r,s} = \text{const}, \quad r, s \ge 0. \qquad (2.9)$$

Функция $\overset{\circ}{v}_1$ однозначно находится из уравнения (2.6), поскольку оператор L по условию п. 1° § 1 обратим. При этом для любого $r \ge 0$ $\overset{\circ}{v}_1 \in C^r$, что устанавливается с учетом (2.1), (2.9) так же, как и аналогичное утверждение для v_0 (см. выше). (Для единообразия изложения мы рассматриваем $\overset{\circ}{v}_1$ как стационарное решение соответствующего параболического уравнения.)

Если функции $\overset{\circ}{v}_i$, $\overset{1}{v}_i$, $i \le k-1$, определены, причем при любых $r, s \ge 0$ функции $\overset{\circ}{v}_i \in C^r$, $\overset{1}{v}_i \in C^{r,s}$, то описанным выше способом из уравнений (2.7) и (2.8) однозначно найдем функции $\overset{1}{v}_k$ и $\overset{\circ}{v}_k$ соответственно. При этом для любых чисел $r, s \ge 0$ справедливы соотношения

$$\|\overset{\circ}{v}_k\|_{C^r} + \|\overset{1}{v}_k\|_{C^{r,s}} \le \overset{k}{c}_{r,s}, \quad \overset{k}{c}_{r,s} = \text{const}\,.$$

Теорема 2. *Существует такое число $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ для любых неотрицательных чисел r и s при всех натуральных n выполняются оценки*

$$\|u_\omega - \overset{n}{v}_\omega\|_{C^{r,s}} \le c_{n,r,s}\omega^{-(n+1)+s}, \tag{2.10}$$

где u_ω — указанное в теореме 1 $l\omega^{-1}$-периодическое по t решение уравнения (1.1), $\overset{n}{v}_\omega$ — приближение (2.3), а $c_{n,r,s}$ — не зависящие от ω постоянные.

Доказательство. Пусть $\overset{n}{v}'_\omega = \overset{n}{v}_\omega + \omega^{-(n+1)}\overset{1}{v}_{n+1}$. Подставляя $u = \overset{n}{v}' + w$ (здесь и далее индекс ω будем опускать) в уравнение (1.1), получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} \{a_\alpha(x, \delta^{2k-1}(\overset{n}{v}' + w), \omega t)\mathcal{D}^\alpha w - [(D_e \overset{\circ}{a}_\alpha)(x, \delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}w)\mathcal{D}^\alpha v_0\} - \\ - [(D_e \overset{\circ}{f})(x, \delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}w) = \sum_{|\alpha|=2k} [a_\alpha(x, \delta^{2k-1}(\overset{n}{v}' + w), \omega t) - a_\alpha(x, \delta^{2k-1}\overset{n}{v}', \omega t)]\mathcal{D}^\alpha \overset{n}{v}' - \\ - \sum_{|\alpha|=2k} [(D_e \overset{\circ}{a}_\alpha)(x, \delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}w)\mathcal{D}^\alpha v_0 + f(x, \delta^{2k-1}(\overset{n}{v}' + w), \omega t) - \\ - f(x, \delta^{2k-1}\overset{n}{v}') - [(D_e \overset{\circ}{f})(x, \delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}w) + \omega^{-(n+1)}a(x, \omega t, \omega) := \Phi(x, w, \omega t, \omega). \end{gathered} \tag{2.11}$$

Здесь $a(x, \tau, \omega)$ — бесконечно дифференцируемая по $(x, \tau) \in R^{m+1}$ при любом $\omega > 0$ функция, причем для произвольных $r, s \ge 0$ справедлива оценка

$$\|a\|_{C^{r,s}} \le c_{r,s},$$

где постоянная $c_{r,s}$ не зависит от $\omega > 1$. Это легко устанавливается с использованием известной оценки остаточного члена ряда Тейлора и неравенства (2.1).

Для любого $v \in C^{2k-1+\gamma_0,0}$, $\gamma_0 \in (0,1)$ обозначим через $G_v(t, \tau, x, \xi)$ и $U_v(t, \tau)$ соответственно фундаментальное решение и оператор сдвига по траекториям уравнения

$$\begin{gathered} L_v(w) := \frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} \{a_\alpha(x, \delta^{2k-1}(\overset{n}{v}' + v), \omega t)\mathcal{D}^\alpha w - \\ - [(D_e \overset{\circ}{a}_\alpha)(x, \delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}w)\mathcal{D}^\alpha v_0\} - [(D_e \overset{\circ}{f})(x, \delta^{2k-1}v_0)](\delta^{2k-1}w) = 0. \end{gathered}$$

Пусть, как и в §1, $t_\omega = [T\omega l^{-1}]l\omega^{-1}$. В силу леммы 1 существуют такие положительные числа r_1 и ω_1, что для всех $\omega > \omega_1$ и всех $v \in \widetilde{S}^{r_1} := \{v : \|v\|_{C^{2k+\gamma_0,\gamma_0/2k}_{[0,2t_\omega]}} \le r_1,\, v(x, t + t_\omega) = v(x,t),\, t \in [0, t_\omega]\}$ оператор $I - U_v(t_\omega, 0)$ обратим в $C^{2k+\gamma_0}$ и, более того,

$$\|[I - U_v(t_\omega, 0)]^{-1}\|_{\mathrm{Hom}(C^{2k+\gamma_0}, C^{2k+\gamma_0})} \le c(r_1, \omega_1), \tag{2.12}$$

где постоянная $c(r_1, \omega_1)$ не зависит от v, ω.

При $\omega > \omega_1$ обозначим через $N_\omega(w)$ оператор, действующий из $\widetilde{S}^{\,r_1}$ в $C^{2k+\gamma_0,\gamma_0/2k}_{[0,2t_\omega]}$ по правилу

$$N_\omega(w) := U_w(t,0)[I - U_w(t_\omega,0)]^{-1}\int_0^{t_\omega} d\tau \int_{R^m} G_w(t_\omega,\tau,x,\xi)\Phi(\xi,w,\omega\tau,\omega)d\xi + \\ + \int_0^t d\tau \int_{R^m} G_w(t,\tau,x,\xi)\Phi(\xi,w,\omega\tau,\omega)d\xi, \quad t \in [0,2t_\omega]. \quad (2.13)$$

Корректность такого определения следует из оценок (2.12), (1.7). Заметим, что при $\omega > \omega_1$ сужение на участок $t \in [0,t_\omega]$ каждого $l\omega^{-1}$-периодического по t решения u уравнения (1.1), для которого $u - \overset{n}{v}{}'_\omega \in \widetilde{S}^{\,r_1}$, удовлетворяет уравнению $u = N_\omega(u - \overset{n}{v}{}'_\omega) + \overset{n}{v}{}'_\omega$, и наоборот, каждое $l\omega^{-1}$-периодическое продолжение решения последнего уравнения является $l\omega^{-1}$-периодическим решением уравнения (1.1).

Обозначим через r_ω величину $2\|N_\omega(0)\|_{C^{\gamma_0,\gamma_0/2k}_{[0,t_\omega]}}$. В силу соотношений (2.11)–(2.13), (1.7) $r_\omega \le c\omega^{-(n+1)}$, $\omega > \omega_1$, $c = \mathrm{const}$. Нетрудно доказать существование такого числа $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ оператор N_ω в шаре $\widetilde{S}^{\,r_\omega}$ является сжатием. Отсюда следует, что $w_\omega = u_\omega - \overset{n}{v}{}'_\omega \in \widetilde{S}^{\,r_\omega}$ и, в частности,

$$\|u_\omega - \overset{n}{v}{}'_\omega\|_{C^{2k+\gamma_0,0}} \le c_n\omega^{-(n+1)}, \quad c_n = \mathrm{const}\,.$$

Для получения оценок погрешности в старших нормах, т. е. оценок (2.10), перепишем равенство (2.11) в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x,\delta^{2k-1}(\overset{n}{v}{}' + w),\omega t)\mathcal{D}^\alpha w - \sum_{|\beta|\le 2k-1} b_\beta(x,\omega t)\mathcal{D}^\beta w = \omega^{-(n+1)}a(x,\omega t,\omega), \quad (2.14)$$

где

$$\sum_{|\beta|\le 2k-1} b_\beta(x,\omega t)\mathcal{D}^\beta w := \sum_{|\alpha|=2k}\int_0^1 [(D_e a_\alpha)(x,\delta^{2k-1}\overset{n}{v}{}' + \delta^{2k-1}w,\omega t)]ds(\delta^{2k-1}w)\mathcal{D}^\alpha \overset{n}{v}{}' + \\ + \int_0^1 [(D_e f)(x,\delta^{2k-1}\overset{n}{v}{}' + \delta^{2k-1}w,\omega t)]ds(\delta^{2k-1}w).$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.14) на участке $t \in [-1,T]$, где T то же, что и в § 1, с начальным условием

$$w(x,-1) = u_\omega(x,-1) - \overset{n}{v}{}'(x,-1).$$

Оценка (2.10) при $s = 0$ устанавливается путем многократного дифференцирования этой задачи по x и применения оценок (1.5)–(1.7) на участке $t \in [0,T]$.

Из уравнения (2.14) для производной $\frac{\partial w}{\partial t}$ следуют те же оценки, которые только что получены для w при $s = 0$ (заметим, что w не содержит $\overset{1}{v}_{n+1}$). Для оценки старших производных по t перепишем еще раз (2.14) в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2k} \overset{\circ}{a}_\alpha(x,\delta^{2k-1}(\overset{n}{v}{}' + w))\mathcal{D}^\alpha w = \sum_{|\alpha|=2k} \overset{1}{a}_\alpha(x,\delta^{2k-1}(\overset{n}{v}{}' + w),\omega t)\mathcal{D}^\alpha w + \\ + \sum_{|\beta|\le 2k-1} b_\beta(x,\omega t)\mathcal{D}^\beta w + \omega^{-(n+1)}a(x,t\omega,\omega). \quad (2.15)$$

С помощью многократного дифференцирования уравнения (2.15) по x, t, полученных выше оценок для w и неравенств (1.5)–(1.7) выводим для $r \ge 0$, $s \ge 0$ оценки

$$\|u_\omega - \overset{n}{v}{}'_\omega\|_{C^{r,s}_{[0,T]}} \le d_{n,r,s}\omega^{-(n+2)+s}, \quad d_{n,r,s} = \mathrm{const}\,.$$

Учитывая $l\omega^{-1}$-периодичность по t функции w и структуру функции $\overset{1}{v}_{n+1}$, приходим к оценкам (2.10). $\square$

2°. Из доказательства теоремы 2 вытекает следующее

Замечание. Если r и s — фиксированные неотрицательные числа, то для построения n-го приближения $\overset{n}{v}_\omega$ с оценкой (2.10) достаточно в дополнение к условиям п. 1° § 1 выполнения следующих требований (вместо условий п. 1° § 2). Функции $a_\alpha(x, e, \tau)$ и $f(x, e, \tau)$ имеют непрерывные производные вида $D_x^\beta D_e^\gamma \frac{\partial^i}{\partial \tau^i}$, где $|\beta| \leq k_0 = \max(0, [r] - 2k)$, $i \leq k_1 = \max(0, [s] - 1)$, $|\gamma| \leq n + 1 + k_0 + k_1$, причем эти производные удовлетворяют условию Гёльдера по совокупности переменных x, e, τ с показателем $\alpha_1 > \{r\}$, $\alpha_2 = \max(\alpha_1, \alpha_3)$, $\alpha_3 = \{s\}$ соответственно, и константами, не зависящими от $(x, e, \tau) \in R^m \times M \times R^1$, где $\{b\}$ означает дробную часть числа $b > 0 : \{b\} = b - [b]$.

Литература

1. Левенштам В.Б. *Экспоненциальная дихотомия и метод усреднения для параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 318. – № 6. – С. 1316–1319.
2. Левенштам В.Б. *Усреднение квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующей главной частью. Экспоненциальная дихотомия* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1992. – Т. 56. – № 4. – С.813–852.
3. Эйдельман С.Д. *Параболические системы.* – М.: Наука, 1964. – 444 с.
4. Красносельский М.А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1966. – 499 с.

Ростовский государственный университет

Поступили
первый вариант 11.06.1996
окончательный вариант 13.11.1998