ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 4 (503)

УДК 517.537

П.В. ФИЛЕВИЧ

К ТЕОРЕМЕ ВАЛИРОНА О СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ МАКСИМУМОМ МОДУЛЯ И МАКСИМАЛЬНЫМ ЧЛЕНОМ ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — возрастающая к $+\infty$ последовательность неотрицательных чисел, $\tau(\Lambda) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \ln n/\lambda_n$, а $S(\Lambda)$ — класс целых (абсолютно сходящихся в $\mathbb{C}$) рядов Дирихле

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

которые не являются экспоненциальными полиномами. Для ряда (1) положим $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$ и пусть $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{\sigma\lambda_n} : n \geq 0\}$ — максимальный член, а $\nu(\sigma, F) = \max\{n \geq 0 : |a_n|e^{\sigma\lambda_n} = \mu(\sigma, F)\}$ — центральный индекс этого ряда.

Теорема A ([1]; см. также [2], с. 184). *Пусть $A \in (0, +\infty)$. Если $\tau(\Lambda) < A$, то для каждого целого ряда Дирихле $F \in S(\Lambda)$ выполняется соотношение*

$$M(\sigma, F) = o(\mu(\sigma + A, F)), \quad \sigma \to +\infty.$$

С другой стороны, имеет место

Теорема B ([3]). *Пусть $A \in (0, +\infty)$. Если $\tau(\Lambda) > A$, то существует целый ряд Дирихле $F \in S(\Lambda)$, для которого*

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{M(\sigma, F)}{\mu(\sigma + A, F)} = +\infty.$$

В следующей теореме достаточность условия следует из теоремы A.

Теорема C ([3]). *Пусть $B \in (1, +\infty)$. Для того чтобы для каждого целого ряда Дирихле $F \in S(\Lambda)$ выполнялось неравенство*

$$M(\sigma, F) < \mu(B\sigma, F), \quad \sigma \geq \sigma_0(F),$$

необходимо и достаточно, чтобы $\tau(\Lambda) < +\infty$.

Рассмотрим любую положительную на $(-\infty, +\infty)$ функцию h. В связи с приведенными результатами возникает следующая задача: *установить необходимое и достаточное условие на последовательность Λ, обеспечивающее выполнение соотношения*

$$M(\sigma, F) = o(\mu(\sigma + h(\sigma), F)), \quad \sigma \to +\infty, \tag{2}$$

для каждого ряда Дирихле $F \in S(\Lambda)$.

Решению этой задачи посвящена данная работа.

Положим

$$A(h) = \underline{\lim_{\sigma\to+\infty}} h(\sigma).$$

Теорема 1. *Пусть $A(h) = +\infty$.*

(i) *Если* $\tau(\Lambda) < +\infty$, *то для каждого целого ряда Дирихле* $F \in S(\Lambda)$ *выполняется соотношение* (2).

(ii) *Если* $\tau(\Lambda) = +\infty$, *то существует целый ряд Дирихле* $F \in S(\Lambda)$, *для которого*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{M(\sigma,F)}{\mu(\sigma+h(\sigma),F)} = +\infty. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть* $A(h) \in (0,+\infty)$ *и* $\sup\{\sigma : h(\sigma) < A(h)\} = +\infty$.

(i) *Если* $\tau(\Lambda) < A(h)$, *то для каждого целого ряда Дирихле* $F \in S(\Lambda)$ *выполняется соотношение* (2).

(ii) *Если* $\tau(\Lambda) \geq A(h)$, *то существует целый ряд Дирихле* $F \in S(\Lambda)$, *для которого верно соотношение* (3).

Теорема 3. *Пусть* $A(h) \in [0,+\infty)$ *и* $\sup\{\sigma : h(\sigma) < A(h)\} < +\infty$.

(i) *Если* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp\{-A(h)\lambda_n\} < +\infty$, *то для каждого целого ряда Дирихле* $F \in S(\Lambda)$ *выполняется соотношение* (2).

(ii) *Если* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp\{-A(h)\lambda_n\} = +\infty$, *то существует целый ряд Дирихле* $F \in S(\Lambda)$, *для которого верно соотношение* (3).

Если $A(h) = 0$, то не существует последовательности Λ такой, что для каждого целого ряда Дирихле $F \in S(\Lambda)$ выполняется соотношение (2). Такой вывод можно сделать из следующего утверждения, являющегося очевидным следствием утверждения (ii) теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть* $A(h) = 0$. *Для любой последовательности* Λ *существует целый ряд Дирихле* $F \in S(\Lambda)$, *удовлетворяющий соотношению* (3).

2. Вспомогательные результаты

В приведенной ниже лемме 1, которой воспользуемся при доказательстве утверждений (ii) в теоремах 1–3, не предполагается, вообще говоря, целостность ряда Дирихле (1).

Лемма 1. *Пусть* $B \in (-\infty,+\infty]$. *Если для ряда Дирихле* (1) *существует такая возрастающая последовательность* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *неотрицательных целых чисел, что*

$$a_n = 0 \quad (n < n_0); \quad a_{n_k} \neq 0 \quad (k \geq 0);$$
$$\varkappa_k := \frac{\ln|a_{n_k}| - \ln|a_{n_{k+1}}|}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \uparrow B \quad (k \to +\infty);$$
$$|a_n| \leq |a_{n_k}| e^{\varkappa_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)} \quad (n \in (n_k, n_{k+1}),\ k \geq 0),$$

то для всех $\sigma \in (-\infty, B)$ *определены максимальный член* $\mu(\sigma,F)$ *и центральный индекс* $\nu(\sigma,F)$ *этого ряда и, более того, верны следующие соотношения*: 1) $\nu(\sigma,F) = n_0$, *если* $\sigma < \varkappa_0$; 2) $\nu(\sigma,F) = n_{k+1}$, *если* $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ *и* $k \geq 0$; 3) $\mu(\sigma,F) = |a_{n_0}| e^{\sigma\lambda_{n_0}}$, *если* $\sigma < \varkappa_0$; 4) $\mu(\sigma,F) = |a_{n_{k+1}}| e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}$, *если* $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ *и* $k \geq 0$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что утверждения 3) и 4) следуют из утверждений 1) и 2). Докажем 1) и 2).

Пусть $\varkappa_{-1} \in (-\infty, \varkappa_0)$. Считаем, что $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ и $k \geq -1$.

Если $n \in (n_p, n_{p+1}]$ и $p \geq k+1$, то

$$\frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} \leq \frac{|a_{n_p}|e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} = \frac{|a_{n_{p+1}}|e^{\varkappa_p\lambda_{n_{p+1}}}e^{-\varkappa_p\lambda_n}e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} =$$

$$= e^{\sigma(\lambda_n-\lambda_{n_{k+1}})}e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}}-\lambda_n)}\prod_{i=k+1}^{p}\frac{|a_{n_{i+1}}|}{|a_{n_i}|} =$$

$$= e^{\sigma(\lambda_n-\lambda_{n_{k+1}})}e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}}-\lambda_n)}\prod_{i=k+1}^{p}\frac{1}{e^{\varkappa_i(\lambda_{n_{i+1}}-\lambda_{n_i})}} \leq$$

$$\leq \frac{e^{\sigma(\lambda_n-\lambda_{n_{k+1}})}e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}}-\lambda_n)}}{e^{\varkappa_{k+1}(\lambda_{n_p}-\lambda_{n_{k+1}})}e^{\varkappa_p(\lambda_{n_{p+1}}-\lambda_{n_p})}} \leq \frac{e^{\sigma(\lambda_n-\lambda_{n_{k+1}})}}{e^{\varkappa_{k+1}(\lambda_n-\lambda_{n_{k+1}})}} < 1,$$

т. е. $\nu(\sigma, F) \leq n_{k+1}$, если $k \geq 0$, и $\nu(\sigma, F) = n_0$, если $\sigma < \varkappa_0$.

Если же $n \in [n_p, n_{p+1})$, $p \leq k$ и $k \geq 0$, то

$$\frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} \leq \frac{|a_{n_p}|e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}e^{\sigma\lambda_n}}{|a_{n_{k+1}}|e^{\sigma\lambda_{n_{k+1}}}} = \frac{e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}}{e^{\sigma(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n)}}\prod_{i=p}^{k}\frac{|a_{n_i}|}{|a_{n_{i+1}}|} =$$

$$= \frac{e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}}{e^{\sigma(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n)}}\prod_{i=p}^{k}e^{\varkappa_i(\lambda_{n_{i+1}}-\lambda_{n_i})} \leq \frac{e^{\varkappa_k(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}}{e^{\sigma(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n)}}\prod_{i=p}^{k}e^{\varkappa_k(\lambda_{n_{i+1}}-\lambda_{n_i})} = \frac{e^{\varkappa_k(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n)}}{e^{\sigma(\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_n)}} \leq 1,$$

т. е. $\nu(\sigma, F) \geq n_{k+1}$. Таким образом, $\nu(\sigma, F) = n_{k+1}$, если $\sigma \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$ и $k \geq 0$. $\square$

Лемма 2 ([4]). *Из каждой последовательности Λ, для которой $\tau(\Lambda) > A > 0$, можно выделить такую подпоследовательность $\Lambda^* = \{\lambda_k^*\}_{k=0}^{\infty}$, что $\ln p \leq A\lambda_p^* + 1$ для всех $p \geq 1$ и $\ln p_j \geq A\lambda_{p_j}^*$ для некоторой возрастающей последовательности $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$ натуральных чисел.*

3. Доказательство теоремы 1

Утверждение (i) теоремы 1 следует, очевидно, из теоремы A. Докажем утверждение (ii).

Пусть $\tau(\Lambda) = +\infty$. Тогда, как легко видеть,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-c\lambda_n} = +\infty \quad \forall c > 0. \tag{4}$$

Не уменьшая общности, считаем, что $h(\sigma) \uparrow +\infty$, $\sigma \to +\infty$. Положим $\varkappa_0 = 0$ и $\varkappa_{k+1} = \varkappa_k + h(\varkappa_k)$ $(k \geq 0)$. Тогда $\varkappa_k \uparrow +\infty$, $k \to \infty$.

По уже определенной последовательности $\{\varkappa_k\}_{k=0}^{\infty}$ построим целочисленные последовательности $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом. Положим $m_0 = n_0 = 0$, $m_1 = n_1 = 1$, $m_2 = n_2 = 2$ и предположим, что для некоторого $p \geq 2$ уже определены $m_0 \leq n_0 < m_1 \leq n_1 < \cdots < m_p \leq n_p$. Пусть тогда

$$m_{p+1} = \min\{m \geq n_p : (p+1)2^p e^{(h(\varkappa_{p-2})+h(\varkappa_{p-1}))\lambda_{n_p}} \leq e^{h(\varkappa_{p-2})\lambda_m}\},$$

$$n_{p+1} = \min\left\{m \geq m_{p+1} : \sum_{n=m_{p+1}}^{m} e^{-h(\varkappa_{p-1})\lambda_n} \geq p\right\}.$$

Заметим, что возможность определения n_{p+1} следует из (4).

Пусть $k \geq 0$ и

$$a_0 = a_{n_0} = 1; \quad a_{n_{k+1}} = \prod_{j=0}^{k} e^{-\varkappa_j(\lambda_{j+1}-\lambda_j)}; \quad a_n = 0 \quad (n \in (n_k, m_{k+1})); \tag{5}$$

$$a_n = a_{n_k}e^{\varkappa_k(\lambda_{n_k}-\lambda_n)} \quad (n \in [m_{k+1}, n_{k+1})). \tag{6}$$

Рассмотрим ряд Дирихле (1) с определенными так коэффициентами a_n и покажем, что он целый и удовлетворяет соотношению (3). Заметим, что

$$F(s)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=m_p}^{n_p} a_n e^{s\lambda_n}. \tag{7}$$

Согласно лемме 1

$$\mu(\varkappa_k,F)=a_{n_{k+1}}e^{\varkappa_k\lambda_{n_{k+1}}}=a_{n_k}e^{\varkappa_k\lambda_{n_k}}\geq a_{n_p}e^{\varkappa_k\lambda_{n_p}}\quad (k\geq 0,\ \ p\geq 0).$$

Поэтому, учитывая (6), имеем

$$\sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}} a_n e^{\varkappa_k\lambda_n}=\sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}} a_{n_p}e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}e^{\varkappa_k\lambda_n}\leq \mu(\varkappa_k,F)\sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}} e^{-\varkappa_k\lambda_{n_p}}e^{\varkappa_p(\lambda_{n_p}-\lambda_n)}e^{\varkappa_k\lambda_n}=$$
$$=\mu(\varkappa_k,F)\sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}} e^{-(\varkappa_p-\varkappa_k)(\lambda_n-\lambda_{n_p})}\qquad (k\geq 0,\ \ p\geq 0). \tag{8}$$

Далее заметим (см. определение n_{p+1}), что

$$\sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}} e^{-h(\varkappa_{p-1})\lambda_n}\leq p+1\quad (p\geq 1).$$

Учитывая это неравенство, а также воспользовавшись (8) и определением m_{p+1}, для всех $k\geq 0$ получаем следующую оценку остатка ряда (7) в точке $\varkappa_k$:

$$[\mu(\varkappa_k,F)]^{-1}\sum_{p\geq k+2}\sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}} a_n e^{\varkappa_k\lambda_n}\leq \sum_{p\geq k+2}\sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}} e^{-(\varkappa_p-\varkappa_k)(\lambda_n-\lambda_{n_p})}=$$
$$=\sum_{p\geq k+2} e^{(\varkappa_p-\varkappa_k)\lambda_{n_p}}\sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}}\frac{e^{-(\varkappa_p-\varkappa_{p-1})\lambda_n}}{e^{(\varkappa_{p-1}-\varkappa_k)\lambda_n}}\leq \sum_{p\geq k+2}\frac{e^{(\varkappa_p-\varkappa_k)\lambda_{n_p}}}{e^{(\varkappa_{p-1}-\varkappa_k)\lambda_{m_{p+1}}}}\sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}} e^{-h(\varkappa_{p-1})\lambda_n}\leq$$
$$\leq\sum_{p\geq k+2}\frac{e^{(\varkappa_p-\varkappa_{p-2})\lambda_{n_p}}}{e^{(\varkappa_{p-1}-\varkappa_{p-2})\lambda_{m_{p+1}}}}(p+1)=\sum_{p\geq k+2}\frac{e^{(h(\varkappa_{p-2})+h(\varkappa_{p-1}))\lambda_{n_p}}}{e^{h(\varkappa_{p-2})\lambda_{m_{p+1}}}}(p+1)\leq$$
$$\leq\sum_{p\geq k+2}\frac{1}{2^p}=\frac{1}{2^{k+1}}<+\infty.$$

Отсюда следует, что ряд (7) сходится абсолютно в $\mathbb{C}$, поэтому $F\in S(\Lambda)$.

Кроме этого, для всех $k\geq 0$, воспользовавшись (6) и определением n_{k+2}, имеем

$$M(\varkappa_k,F)\geq\sum_{n=m_{k+2}}^{n_{k+2}} a_n e^{\varkappa_k\lambda_n}=a_{n_{k+1}}e^{\varkappa_{k+1}\lambda_{n_{k+1}}}\sum_{n=m_{k+2}}^{n_{k+2}} e^{-(\varkappa_{k+1}-\varkappa_k)\lambda_n}=$$
$$=\mu(\varkappa_{k+1},F)\sum_{n=m_{k+2}}^{n_{k+2}} e^{-h(\varkappa_k)\lambda_n}\geq \mu(\varkappa_k+h(\varkappa_k),F)(k+1),$$

т. е. выполнено (3). $\square$

4. Доказательство теоремы 2

Если $\tau(\Lambda) < A(h)$, то, фиксируя любое число $A \in (\tau(\Lambda), A(h))$ и применяя теорему A, легко получим утверждение (i). Докажем утверждение (ii).

Пусть $\tau(\Lambda) \geq A(h)$. Так как $S(\Lambda^*) \subset S(\Lambda)$ (если Λ^* — подпоследовательность последовательности Λ), то согласно лемме 2 можем считать, что $\tau(\Lambda) = A(h)$. В противном случае вместо последовательности Λ рассматриваем ее подпоследовательность Λ^*, удовлетворяющую условиям леммы 2 при $A = A(h)$.

Далее, согласно равенству $\sup\{\sigma : h(\sigma) < A(h)\} = +\infty$ найдем такую возрастающую к $+\infty$ последовательность $\{\varkappa_k\}_{k=0}^{\infty}$ положительных чисел, что для каждого $k \geq 0$ выполняются неравенства

$$h(\varkappa_k) < A(h), \quad \varkappa_k + 4A(h) < \varkappa_{k+1}. \tag{9}$$

По последовательности $\{\varkappa_k\}_{k=0}^{\infty}$ определим возрастающие последовательности неотрицательных целых чисел $\{m_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ так, чтобы имели место соотношения

$$n_0 = 0, \quad m_k = [n_k/2], \quad m_1 > 2, \quad \lambda_{m_{k+1}} > 2\lambda_{n_k}, \tag{10}$$

$$\ln n_{k+1} - h(\varkappa_k)\lambda_{n_{k+1}} \geq k, \quad \ln m_k \leq 2A(h)\lambda_{m_k}, \tag{11}$$

где k — любое неотрицательное целое число. Последнее неравенство возможно в силу равенства $\tau(\Lambda) = A(h)$.

Определим a_n для каждого $n \geq 0$ согласно равенствам (5) и (6). Рассмотрим ряд Дирихле F с такими коэффициентами a_n (его можно представить в виде (7)) и покажем, что он является искомым.

При любом $k \geq 0$ согласно (8)–(11) получим

$$[\mu(\varkappa_k, F)]^{-1} \sum_{p \geq k+1} \sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}} a_n e^{\varkappa_k \lambda_n} \leq \sum_{p \geq k+1} \sum_{n=m_{p+1}}^{n_{p+1}} e^{-(\varkappa_p - \varkappa_k)(\lambda_n - \lambda_{n_p})} \leq$$

$$\leq \sum_{p \geq k+1} \frac{n_{p+1} - m_{p+1} + 1}{e^{(\varkappa_p - \varkappa_k)(\lambda_{m_{p+1}} - \lambda_{n_p})}} \leq \sum_{p \geq k+1} \frac{2m_{p+1}}{e^{4(p-k)A(h)\lambda_{m_{p+1}}/2}} \leq$$

$$\leq \sum_{p \geq k+1} \frac{2m_{p+1}}{e^{4(p-k)\ln m_{p+1}/4}} = 2 \sum_{p \geq k+1} \frac{1}{m_{p+1}^{p-k-1}} \leq 2 \sum_{p \geq k+1} \frac{1}{2^{p-k-1}} = 4 < +\infty.$$

Таким образом, F — целый ряд Дирихле, т. е. $F \in S(\Lambda)$.

Далее из (9) видим, что $\varkappa_k + h(\varkappa_k) \in [\varkappa_k, \varkappa_{k+1})$. Поэтому по лемме 1

$$\mu(\varkappa_k + h(\varkappa_k), F) = a_{n_{k+1}} e^{(\varkappa_k + h(\varkappa_k))\lambda_{n_{k+1}}}.$$

Следовательно, учитывая (6), (5), (10) и (11), имеем

$$M(\varkappa_k, F) \geq \sum_{n=m_{k+1}}^{n_{k+1}-1} a_n e^{\varkappa_k \lambda_n} = \sum_{n=m_{k+1}}^{n_{k+1}-1} a_{n_k} e^{\varkappa_k(\lambda_{n_k} - \lambda_n)} e^{\varkappa_k \lambda_n} = (n_{k+1} - m_{k+1}) a_{n_k} e^{\varkappa_k \lambda_{n_k}} =$$

$$= (n_{k+1} - m_{k+1}) a_{n_{k+1}} e^{\varkappa_k \lambda_{n_{k+1}}} = \mu(\varkappa_k + h(\varkappa_k), F) e^{\ln(n_{k+1} - m_{k+1}) - h(\varkappa_k)\lambda_{n_{k+1}}} \geq$$

$$\geq \mu(\varkappa_k + h(\varkappa_k), F) e^{\ln n_{k+1} - h(\varkappa_k)\lambda_{n_{k+1}} - \ln 2} \geq \mu(\varkappa_k + h(\varkappa_k), F) e^{k - \ln 2},$$

откуда и следует (3). □

5. Доказательство теоремы 3

Докажем утверждение (i). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-A(h)\lambda_n\} < +\infty$, то при каждом таком ε определено целое число

$$N(\varepsilon) = \min\Big\{N \geq 1 : \sum_{n=N}^{\infty} \exp\{-A(h)\lambda_n\} < \varepsilon\Big\}.$$

Рассмотрим любой целый ряд Дирихле $F \in S(\Lambda)$ вида (1). Этот ряд согласно определению класса $S(\Lambda)$ не является экспоненциальным полиномом, поэтому, как известно, $\gamma(\sigma) := \ln \mu(\sigma, F)/\sigma \to +\infty$, $0 < \sigma \to +\infty$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{N(\varepsilon)-1} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leq \mu(0,F) \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)-1} e^{\sigma\lambda_n} \leq \mu(0,F) N(\varepsilon) e^{\sigma\lambda_{N(\varepsilon)}} =$$
$$= \mu(0,F) N(\varepsilon) (\mu(\sigma,F))^{\lambda_{N(\varepsilon)}/\gamma(\sigma)} \leq \varepsilon\mu(\sigma,F), \quad \sigma \geq \sigma_1(\varepsilon). \tag{12}$$

Так как $\sup\{\sigma : h(\sigma) < A(h)\} < +\infty$, то $h(\sigma) \geq A(h)$, $\sigma \geq \sigma_2$. Поэтому для всех $\sigma \geq \sigma_3(\varepsilon) = \max\{\sigma_1(\varepsilon), \sigma_2\}$ согласно (12) и определению $N(\varepsilon)$ имеем

$$M(\sigma,F) \leq \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)-1} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} + \sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} |a_n| e^{\sigma\lambda_n} \leq$$
$$\leq \varepsilon\mu(\sigma,F) + \sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} |a_n| e^{(\sigma+h(\sigma))\lambda_n} e^{-A(h)\lambda_n} \leq$$
$$\leq \varepsilon\mu(\sigma,F) + \varepsilon\mu(\sigma+h(\sigma),F) \leq 2\varepsilon\mu(\sigma+h(\sigma),F).$$

Отсюда ввиду произвольности ε получаем (2).

Докажем (ii). Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-A(h)\lambda_n\} = +\infty$. Тогда, полагая $n_0 = 0$, видим, что для каждого $k \geq 0$ определено

$$n_{k+1} = \min\Big\{N \geq n_k + 1 : \sum_{n=n_k}^{N} e^{-A(h)\lambda_n - 1} \geq k\Big\}.$$

Зафиксируем какое-либо $\varkappa_0 \geq 0$ и для всех $p \geq 1$ положим $\varkappa_{2p-1} = \varkappa_{2p-2} + h(\varkappa_{2p-2})$,

$$\varkappa_{2p} = \min\Big\{\sigma \geq \varkappa_{2p-1} + 1 : h(\sigma) \leq A(h) + \frac{1}{\lambda_{n_{2p+2}}};\ \frac{n_{2p+2}}{e^{(\sigma-\varkappa_{2p-2})(\lambda_{n_{2p}+1}-\lambda_{n_{2p}})}} \leq \frac{1}{2^p}\Big\}.$$

Ясно, что $\varkappa_k \uparrow +\infty$, $k \to \infty$.

Пусть $a_0 = a_{n_0} = 1$ и для каждого $k \geq 0$

$$a_{n_{k+1}} = \prod_{j=0}^{k} e^{-\varkappa_j(\lambda_{j+1}-\lambda_j)}, \quad a_n = a_{n_k} e^{\varkappa_k(\lambda_{n_k}-\lambda_n)} \quad (n \in (n_k, n_{k+1})). \tag{13}$$

Рассмотрим ряд Дирихле (1) с определенными так коэффициентами a_n и покажем, что он является искомым.

Вначале из леммы 1 и (13) получим

$$\mu(\varkappa_k, F) = a_{n_k} e^{\varkappa_k\lambda_{n_k}} = a_{n_{k+1}} e^{\varkappa_k\lambda_{n_{k+1}}} > a_{n_{k+1}+1} e^{\varkappa_k\lambda_{n_{k+1}+1}} > a_{n_{k+1}+2} e^{\varkappa_k\lambda_{n_{k+1}+2}} > \cdots \tag{14}$$

Далее, для любого $k \geq 0$, воспользовавшись (14), (13) и определением $\varkappa_{2p}$, имеем

$$\sum_{n \geq n_{2k+2}+1} a_n e^{\varkappa_{2k}\lambda_n} = \sum_{p \geq k+1} \sum_{n=n_{2p}+1}^{n_{2p+2}} a_n e^{\varkappa_{2k}\lambda_n} \leq$$
$$\leq \sum_{p \geq k+1} n_{2p+2} a_{n_{2p}+1} e^{\varkappa_{2k}\lambda_{n_{2p}+1}} = \sum_{p \geq k+1} n_{2p+2} a_{n_{2p}} e^{\varkappa_{2p}(\lambda_{n_{2p}} - \lambda_{n_{2p}+1})} e^{\varkappa_{2k}\lambda_{n_{2p}+1}} =$$
$$= \sum_{p \geq k+1} a_{n_{2p}} e^{\varkappa_{2k}\lambda_{n_{2p}}} \frac{n_{2p+2}}{e^{(\varkappa_{2p} - \varkappa_{2k})(\lambda_{n_{2p}+1} - \lambda_{n_{2p}})}} \leq \mu(\varkappa_{2k}, F) \sum_{p \geq k+1} \frac{n_{2p+2}}{e^{(\varkappa_{2p} - \varkappa_{2p-2})(\lambda_{n_{2p}+1} - \lambda_{n_{2p}})}} \leq$$
$$\leq \mu(\varkappa_{2k}, F) \sum_{p \geq k+1} \frac{1}{2^p} = \mu(\varkappa_{2k}, F) \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

Отсюда следует, что F — целый ряд Дирихле, поэтому $F \in S(\Lambda)$.

Докажем, что для этого ряда выполняется (3). Действительно, из определений $\varkappa_{2k+1}$, $\varkappa_{2k}$ и n_{2k+2} для всех $k \geq 0$ получим

$$M(\varkappa_{2k}, F) \geq \sum_{n=n_{2k+1}}^{n_{2k+2}} a_n e^{\varkappa_{2k}\lambda_n} = \sum_{n=n_{2k+1}}^{n_{2k+2}} a_{2k+1} e^{\varkappa_{2k+1}(\lambda_{n_{2k+1}} - \lambda_n)} e^{\varkappa_{2k}\lambda_n} =$$
$$= a_{2k+1} e^{\varkappa_{2k+1}\lambda_{n_{2k+1}}} \sum_{n=n_{2k+1}}^{n_{2k+2}} e^{-h(\varkappa_{2k})\lambda_n} \geq$$
$$\geq \mu(\varkappa_{2k+1}, F) \sum_{n=n_{2k+1}}^{n_{2k+2}} \exp\left\{ -\left(A(h) + \frac{1}{\lambda_{n_{2k+2}}} \right) \lambda_n \right\} \geq$$
$$\geq \mu(\varkappa_{2k+1}, F) \sum_{n=n_{2k+1}}^{n_{2k+2}} e^{-A(h)\lambda_n - 1} \geq \mu(\varkappa_{2k+1}, F)(2k+1) = \mu(\varkappa_{2k} + h(\varkappa_{2k}), F)(2k+1),$$

откуда и следует (3). □

Замечание. При доказательстве утверждения (ii) не пользовались условием $\sup\{\sigma : h(\sigma) < A(h)\} < +\infty$, поскольку в случае $A(h) > 0$ оно излишне, а в случае $A(h) = 0$ — заведомо выполнено.

Литература

1. Valiron G. *Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet* // Bull. Soc. Math. France. – 1924. – V. 52. – P. 86–98.
2. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
3. Притула Я.Я. *Про максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-матем. – 1995. – Вип. 43. – С. 25–30.
4. Шеремета М.Н. *О поведении максимума модуля целого ряда Дирихле вне исключительного множества* // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57. – № 2. – С. 283–296.

Львовский национальный университет

Поступила 09.04.2002