ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 8 (495)

УДК 517.984

Е.В. ВЛАДОВА, М.С. МАТВЕЙЧУК

# О ПЛЮС-ОПЕРАТОРАХ ИЗ АЛГЕБР НЕЙМАНА

Несжимающие и плюс-операторы отражают специфику пространств с индефинитной метрикой ($J$-пространств) [1]. В данной статье вводятся и изучаются аналоги несжимающих и плюс-операторов в алгебрах Неймана. Подробнее с алгебрами Неймана можно познакомиться, например, в ([2]; [3], гл. VI). Использованный здесь способ выделения аналогов плюс-векторов отличается от подхода, предложенного в [4].

## Некоторые общие свойства

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра Неймана в комплексном гильбертовом пространстве $H$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Обозначим через $\mathcal{Z}$ центр алгебры $\mathcal{M}$, а через $\mathcal{Z}^{\mathrm{pr}}$ — множество всех (ортогональных) проекторов из $\mathcal{Z}$. Во множестве всех неотрицательных центральных операторов ($:= \mathcal{Z}^+$) введем частичный порядок $Z_1 \le Z_2$, если $(Z_1x,x) \le (Z_2x,x)$ $\forall x \in H$. Для $Z_1$, $Z_2$ из $\mathcal{Z}^+$ найдется проектор $E \in \mathcal{Z}^{\mathrm{pr}}$ такой, что $Z_1E \le Z_2E$ и $Z_2(I-E) \le Z_1(I-E)$. Положим $Z_1 \wedge Z_2 := Z_1E + Z_2(I-E)$ и $Z_1 \vee Z_2 := Z_2E + Z_1(I-E)$.

Известно утверждение, которое иногда называют теоремой Вижье. *Всякая возрастающая ограниченная сверху сеть ограниченных самосопряженных операторов сильно сходится к некоторому самосопряженному оператору. Предельный оператор есть точная верхняя грань возрастающей сети операторов.*

Пусть $P^+, P^- := I - P^+$ — ортопроекторы в $\mathcal{M}$ такие, что центральные носители [2] проекторов $P^+$, $P^-$ равны $I$. Определим каноническую симметрию $J := P^+ - P^-$ и зафиксируем индефинитную метрику $[x,y] := (Jx,y)$, $x,y \in H$. Оператор $V \in B(H)$ называется *плюс-оператором*, если $[Vx,Vx] \ge 0$ всякий раз, когда $[x,x] \ge 0$, $x \in H$. В [1] плюс-оператор $V$ называется *строгим*, если $\inf\{[Vx,Vx] : [x,x]=1\} > 0$, и *нестрогим* в противном случае. Через $A^\#$ обозначим оператор, сопряженный к $A \in B(H)$ относительно $[\cdot,\cdot]$, т. е. $[Ax,y] = [x,A^\# y]$. Очевидно, $A^\# = JA^*J$. Определим *носитель* вектора $x \in H$ как наименьший проектор $Q_x$ из $\mathcal{Z}$, для которого $x = Q_x x$.

**Лемма 1.** *Если $[x,x] > 0$, то существует наибольший проектор $:= Q_{+x} \in \mathcal{Z}$, $Q_{+x} \ne 0$, такой, что $[qx,x] > 0$ для любого $q \in \mathcal{Z}^{\mathrm{pr}}$, $q \ne 0$, $q \le Q_{+x}$.*

**Доказательство.** Пусть $[x,x] > 0$. Введем множество $\mathcal{Z}_- := \{p \in \mathcal{Z}^{\mathrm{pr}} : [px,x] < 0,\ p \le Q_x\}$. Если $\mathcal{Z}_- = \emptyset$, то положим ${}_{-x}P := 0$. Если $\mathcal{Z}_-$ не пусто, то выберем любое максимальное по включению семейство попарно ортогональных проекторов $\{P_i\}$ из $\mathcal{Z}_-$. Очевидно, $\sum\limits_i P_i < Q_x$. Положим ${}_{-x}P := \sum P_i$. Тогда для любого $q \in \mathcal{Z}^{\mathrm{pr}}$, $q \le Q_x - ({}_{-x}P)$, имеем $[qx,x] \ge 0$.

Введем множество $\mathcal{Z}_0 := \{p \in \mathcal{Z}^{\mathrm{pr}} : [px,x] = 0,\ p \le Q_x - {}_{-x}P\}$. Отметим $0 \in \mathcal{Z}_0$. Выберем в $\mathcal{Z}_0$ максимальное семейство $\{Q_j\} \subseteq \mathcal{Z}_0$ попарно ортогональных проекторов и положим ${}_{0x}P := \sum Q_j$. Очевидно, $Q := Q_x - {}_{-x}P - {}_{0x}P \ne 0$ и

$$[rx,x] > 0 \quad \forall r \in \mathcal{Z}^{\mathrm{pr}} \quad (0 \ne r \le Q). \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации, грант № Е00-1.0-172.

Множество всех проекторов, удовлетворяющих (1), образует направление. Следовательно, по теореме Вижье существует наибольший центральный проектор (обозначим его через $Q_{+x}$) со свойством (1). $\square$

Аналогично лемме 1 доказывается

**Лемма 2.** *Если $[x,x] < 0$, то существует наибольший проектор $:= Q_{-x} \in \mathcal{Z}^{\rm pr}$, $Q_{-x} \neq 0$, такой, что $[qx,x] < 0$ для любого $0 \neq q \in \mathcal{Z}^{\rm pr}$, $q \leq Q_{-x}$.*

**Лемма 3.** *Если $x \in H$, $x \neq 0$, то существуют наибольшие (некоторые, возможно, нулевые) проекторы $Q_{+x}$ ($Q_{-x}$, $Q_{0x}$) из $\mathcal{Z}^{\rm pr}$ такие, что $Q_x = Q_{+x} + Q_{-x} + Q_{0x}$ и*

$$[qx,x] > 0 \quad ([qx,x] < 0, \quad [qx,x] = 0) \quad \forall q \in \mathcal{Z}^{\rm pr}, \quad q \neq 0, \quad q \leq Q_{+x} \quad (Q_{-x},\ Q_{0x}).$$

**Доказательство.** Если хотя бы для одного $p \in \mathcal{Z}^{\rm pr}$ имеет место $[px,x] > 0$, то в силу леммы 1 $\mathcal{F} := \{Q \in \mathcal{Z}^{\rm pr} : Q \leq Q_x\ \forall q \in \mathcal{Z}^{\rm pr},\ 0 \neq q \leq Q,\ [qx,x] > 0\} \neq \emptyset$. Наибольший элемент из $\mathcal{F}$ обозначим через $Q_{+x}$. Если $\mathcal{F} = \emptyset$, то положим $Q_{+x} := 0$.

Если хотя бы для одного ненулевого $p \in \mathcal{Z}^{\rm pr}$ выполнено неравенство $[px,x] < 0$, то аналогично находим $Q_{-x} \neq 0$. В противном случае $Q_{-x} := 0$. Таким образом, $Q_{0x} = Q_x - Q_{+x} - Q_{-x}$. $\square$

Лемма 3, как отмечено рецензентом, есть не что иное, как утверждение о разложении заряда на проекторах абелевой алгебры Неймана.

Вектор $x \in H$, $x \neq 0$, назовем $J_{\mathcal{Z}}$-*положительным* (*-неотрицательным, -отрицательным, -неположительным, -нейтральным*), если $Q_x = Q_{+x}$ ($Q_{-x} = 0$, $Q_x = Q_{-x}$, $Q_{+x} = 0$, $Q_x = Q_{0x}$ соответственно). Ниже через $\beta^{++}$, $\beta^{+}$, $\beta^{--}$, $\beta^{-}$ и $\beta^{0}$ будем обозначать множество всех $J_{\mathcal{Z}}$-положительных (-неотрицательных, -отрицательных, -неположительных, -нейтральных) векторов. Отметим, пусть $T \in \mathcal{Z}$, 0 не является собственным числом $T$, и $x \in H$ $J_{\mathcal{Z}}$-положительный (-неотрицательный, -отрицательный, -неположительный, -нейтральный), тогда вектор $Tx$ $J_{\mathcal{Z}}$-положительный (-неотрицательный, -отрицательный, -неположительный, -нейтральный соответственно).

Заметим, что 1) всякий $J_{\mathcal{Z}}$-положительный вектор $x$ является и положительным ($[x,x] > 0$), но обратное неверно; 2) если $\mathcal{M} = B(H)$, то введенные выше определения совпадают с соответствующими [1] определениями положительных, отрицательных и нейтральных векторов.

**Определение 1.** Оператор $V \in \mathcal{M}$ назовем $J_{\mathcal{Z}}$-*плюс-оператором*, если $V\beta^{+} \subseteq \beta^{+}$; *несжимающим*, если $[Vx,Vx] \geq [x,x]$ $\forall x \in H$.

Пусть $V$ $(\neq 0)$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор. Введем множество

$$\Xi := \{Z \in \mathcal{Z}^{+} : [Zx,x] \leq [Vx,Vx]\ \forall x \in \beta^{+}\}.$$

Поскольку $0 \in \Xi$, то $\Xi \neq \emptyset$. Для $Z \in \Xi$ и всех $x \in P^{+}H$, $x \neq 0$, имеем

$$\|Z^{1/2}x\|^2 = [Zx,x] \leq [Vx,Vx] = (JVx,Vx) \leq \|VP^{+}\|^2\|x\|^2. \tag{2}$$

Из (2) заключаем $\|Z^{1/2}P^{+}\| \leq \|VP^{+}\|$. Учитывая, что центральный носитель $P^{+}$ равен $I$, имеем $\|Z^{1/2}\| = \|Z^{1/2}P^{+}\|$. Поэтому $\|Z\| = \|Z^{1/2}P^{+}\|^2 \leq \|VP^{+}\|^2$. Ясно, что $Z_1 \vee Z_2 \in \Xi$ для любых $Z_1, Z_2 \in \Xi$. Таким образом, $\Xi$ с введенным порядком образует ограниченную сверху направленность. По теореме Вижье существует точная верхняя грань $:= \Psi^{V}$ множества $\Xi$ и $Z$ сходится в сильной топологии по направлению к $\Psi^{V}$. Это означает, что $[\Psi^{V}x,x] \leq [Vx,Vx]$ $\forall x \in \beta^{+}$, т. е. $\Psi^{V} \in \Xi$ является наибольшим элементом в $\Xi$.

**Определение 2.** $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор $V$ назовем

1) *равномерно строгим*, если существует число $\lambda > 0$ такое, что $[Vx,Vx] \geq \lambda[x,x]$ для всех $x \in H$;
2) *строгим*, если существует $\lambda > 0$ такое, что $[Vx,Vx] \geq \lambda[x,x]$ для всех $x \in \beta^{++}$;

3) *полустрогим*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует ненулевой проектор $E_\varepsilon \in \mathcal{Z}^{\mathrm{pr}}$ такой, что $[Vx, Vx] \le \varepsilon[x, x]$ для некоторых $x \in \beta^{++}$, $E_\varepsilon x = x$ и для любого ненулевого проектора $E_1 \in \mathcal{Z}$ существуют ненулевой проектор $E_2 \le E_1$, $E_2 \in \mathcal{Z}$, и число $\delta > 0$ такие, что $[Vx, Vx] \ge \delta[x, x]$ $\forall x \in \beta^{++}$, $E_2 x = x$;

4) *нестрогим*, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $(0 \ne)$ $E \in \mathcal{Z}^{\mathrm{pr}}$ существует такой $x \in \beta^{++}$, что $Q_x \le E$ и $[Vx, Vx] \le \varepsilon[x, x]$.

Отметим, что всякий равномерно строгий оператор является и строгим. Классы строгих, полустрогих и нестрогих $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-операторов не пересекаются.

В случае $\mathcal{M} = B(H)$

1) наше определение строгого и равномерно строгого $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператора совпадают;

2) классы нестрогих операторов в нашем смысле и в смысле [1] также совпадают.

Справедливо простое

**Предложение 1.** *Для того чтобы оператор $V \in B(H)$ $(V \in \mathcal{M})$ был строгим плюс-оператором в $H$ с индефинитным произведением $[\cdot, \cdot]$ (был равномерно строгим $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператором), необходимо и достаточно, чтобы существовали число $\lambda > 0$ и оператор $C \in B(H)$ $(C \in \mathcal{M})$, $\|C\| \le 1$, такие, что $C(P^+V + \lambda P^-) = P^-V + \lambda P^+$.*

Всякий плюс-оператор из $\mathcal{M}$ является и $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператором, но обратное неверно. Тем не менее, ниже увидим, что $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-операторы наследуют многие свойства плюс-операторов в $J$-пространствах. В связи со сказанным представляет интерес следствие, которое элементарно вытекает из определения 2.

**Следствие 1.** $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор $V$ равномерно строгий тогда и только тогда, когда $V$ $(\in \mathcal{M})$ — строгий плюс-оператор в $H$ с $[\cdot, \cdot]$.

Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор и пусть $C_V$ — наименьший центральный проектор со свойством $VC_V = V$. Введем множество

$$\Xi := \{Z \in \mathcal{Z}^+ : C_V Z = Z,\ [Vx, Vx] \ge \|ZVx\|^2\ \forall x \in \beta^+\}.$$

Поскольку $0 \in \Xi$, то $\Xi \ne \emptyset$. Так как $|[Vx, Vx]| \le \|Vx\|^2$ $\forall x \in H$, то $Z \le C_V$ $\forall Z \in \Xi$. Кроме того, ясно, что $Z_1 \vee Z_2 \in \Xi$ для любых $Z_1, Z_2 \in \Xi$. Таким образом, $\Xi$ с введенным порядком образует направленность. По теореме Вижье существует точная верхняя грань $:= Z_f^V$ множества $\Xi$ и $Z$ сходится в сильной топологии по направлению к $Z_f^V$. Это означает, что $[Vx, Vx] \ge \|Z_f^V Vx\|^2$ $\forall x \in \beta^+$. Очевидно, $Z_f^V$ — наибольший элемент в $\Xi$.

**Определение 3.** 1) $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор $V$ назовем *фокусирующим* (ср. определение 4.22 [1], с. 154), если существует константа $\gamma > 0$ такая, что $Z_f^V \ge \gamma I$.

2) $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор $V$ называется *полуфокусирующим*, если

$$(Z_f^V x, x) > 0\ \ \forall x \in H,\ \ x \ne 0 \quad \text{и} \quad \inf\{(Z_f^V x, x) : \|x\| = 1\} = 0.$$

Пусть теперь $W \in \mathcal{M}$ — несжимающий оператор: $[Wx, Wx] \ge [x, x]$ $\forall x \in H$. Для любого $x \in H$ имеем

$$\|W\|^2\|x\|^2 + \|x\|^2 \ge \|W\|^2\|x\|^2 - [x, x] \ge [Wx, Wx] - [x, x] \ge 0. \tag{3}$$

Введем множество

$$\Xi' := \{Z \in \mathcal{Z}^+ : [Wx, Wx] \ge [x, x] + \|Zx\|^2\ \forall x \in H\}.$$

Убеждаемся, что $\Xi'$, наделенное порядком $\le$, является направлением. Используя (3), получаем, что для любого $Z \in \Xi'$ справедлива оценка $\|Zx\|^2 \le (\|W\|^2 + 1)\|x\|^2 \Rightarrow \|Z\| \le \sqrt{\|W\|^2 + 1}$.

Следовательно, $Z \leq (\sqrt{\|W\|^2+1})I$. Вновь используя теорему Вижье, убеждаемся, что в $\Xi'$ существует наибольший элемент ($:= Z_r^W$) и $Z$ сходятся по направлению к $Z_r^W$ в сильной топологии. Следовательно,

$$[Wx, Wx] \geq [x, x] + \|Z_r^W x\|^2 \quad \forall x \in H. \tag{4}$$

**Определение 4.** 1) Несжимающий оператор $W$ называется *равномерно растягивающим* (ср. определение 4.23 [1], с. 154), если существует константа $\delta > 0$ такая, что $Z_r^W \geq \delta I$.

2) $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор $W$ называется *полуравномерно растягивающим*, если выполняется неравенство (4), где

$$(Z_r^W x, x) > 0 \ \ \forall x \in H, \quad x \neq 0 \quad \text{и} \quad \inf\{(Z_r^W x, x) : \|x\| = 1\} = 0.$$

**Замечание 1.** Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор. Обозначим через $E$ ортогональный проектор на нулевое подпространство оператора $\Psi^V$. Очевидно, сужение $V$ на $EH$ является нестрогим $J_{\mathcal{Z}_E}$-плюс-оператором. Если спектр сужения $\Psi^V$ на $(I-E)H$ отделен от нуля, то сужение $V/(I-E)H$ есть строгий $J_{\mathcal{Z}_{I-E}}$-плюс-оператор; если нет, то $V/(I-E)H$ — полустрогий $J_{\mathcal{Z}_{I-E}}$-плюс-оператор.

Пусть теперь $B \in B(H)$, $JB \geq 0$. Вновь, как и выше, введем множество $\Xi^B := \{Z \in \mathcal{Z}^+ : [Bx, x] \geq \|Zx\|^2 \ \forall x \in H\}$. Множество $\Xi^B$ является направлением. Если $Z \in \Xi^B$, то $Z \leq \|B\|^{1/2} I$. Обозначим через $Z^B$ наибольший элемент в $\Xi_B$. Будем писать $B >=^J 0$, если $[Z^B x, x] > 0 \ \forall x \neq 0$ и $\inf\{[Z^B x, x] : \|x\| = 1\} = 0$.

## Основные результаты

Всюду ниже пространство $H$ будем считать сепарабельным. Вначале приведем необходимые сведения о разложении сепарабельного пространства $H$ по кольцу $\mathcal{Z}$ в прямой интеграл гильбертовых пространств $H = \int_T H_t \, d\mu$ в смысле теоремы 1 ([3], с. 579). Здесь $T$ — компакт максимальных идеалов алгебры $\mathcal{Z}$ и $\mu$ — конечная мера на $T$. Каждому вектору $\psi \in H$ соответствует единственное с точностью до почти всюду (п. в.) по мере $\mu$ семейство векторов $(\psi_t)$, $\psi_t \in H_t$. При этом $(\psi, \xi) = \int_T (\psi_t, \xi_t)_t \, d\mu$, здесь $(\cdot,\cdot)_t$ — скалярное произведение в $H_t$.

Любой оператор $B \in \mathcal{M}$ раскладывается в прямой интеграл операторов $B = \int_T B_t \, d\mu$ ([3], с. 577), где $B_t$ — ограниченный оператор в $H_t$ (будем писать $B = (B_t)$). В частности, $J = \int_T J_t \, d\mu$, $J_t$ — симметрия в гильбертовом пространстве $H_t$. Заметим, что $A, B \in \mathcal{M}$ влечет $(BA)_t = B_t A_t$ и $A^* = (A_t^*)$ п. в. Если $Q_x$ — носитель вектора $x \in H$, то существует измеримое подмножество $T_x \subseteq T$ такое, что $(Q_x)_t = I_t$, $t \in T_x$, и $(Q_x)_t = 0_t$, $t \in T \setminus T_x$, п. в. Здесь $I_t$, $0_t$ — единица и нуль в $H_t$.

Введем в $H_t$ индефинитную метрику $[\cdot,\cdot]_t := (J_t \cdot, \cdot)_t$. Тогда можем следующим образом охарактеризовать множества $\beta^0$, $\beta^+$ и $\beta^{++}$, $\beta^{--}$: $\beta^0 = \{x \in H : [x_t, x_t]_t = 0$ п. в. по мере $\mu\}$, $\beta^+ = \{x \in H : [x_t, x_t]_t \geq 0$ п. в. по мере $\mu\}$, $\beta^{++} = \{x \in H : [x_t, x_t]_t > 0$ п. в. по мере $\mu$ на $T_x\}$, $\beta^{--} = \{x \in H : [x_t, x_t]_t < 0$ п. в. по мере $\mu$ на $T_x\}$.

Достаточно элементарно доказывается

**Теорема 1.** *Оператор $V = (V_t) \in \mathcal{M}$ является $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператором (-несжимающим) тогда и только тогда, когда операторы $V_t$ в $H_t$ — плюс-операторы (несжимающие) п. в.*

*Если оператор $V = (V_t) \in \mathcal{M}$ равномерно (полуравномерно) растягивающий, то $V_t$ в $H_t$ равномерно растягивающие п. в.*

*Если оператор $V = (V_t) \in \mathcal{M}$ фокусирующий (полуфокусирующий), то $V_t$ в $H_t$ фокусирующие п. в.*

Положим для простоты $[x, y]_t := [x_t, y_t]_t \ \forall x = (x_t),\ y = (y_t) \in H$.

**Лемма 4.** *Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор. Тогда для всех $y \in \beta^{--}$ и $z \in \beta^{++}$ на $\{t \in T : [y,y]_t[z,z]_t \neq 0\}$*

$$\frac{[Vy,Vy]_t}{[y,y]_t} \leq \frac{[Vz,Vz]_t}{[z,z]_t} \quad \textit{п. в.}$$

**Доказательство.** Модифицируем рассуждения из доказательства леммы 1.35 ([1], гл. I), которая соответствует нашей лемме в случае $\mathcal{M} = B(H)$. Можно считать, что $[y,y]_t = -1$ и $[z,z]_t = 1$ при любом $t$. Предположим противоположное: $-[Vy^0,Vy^0]_t > [Vz^0,Vz^0]_t$ для некоторых $y^0$, $z^0$ на множестве $T_1$ ненулевой $\mu$ меры. На $T_1$ рассмотрим вектор-функцию

$$t \to x_t^0 := \varepsilon_t y_t^0 + z_t^0,$$

где $\varepsilon_t$ ($|\varepsilon_t| = 1$) — пока неизвестная измеримая функция. Непосредственно проверяется, что

$$[x_t^0, x_t^0]_t = 2\,\mathrm{Re}(\varepsilon_t[y_t^0, z_t^0]_t), \quad [V_t x_t^0, V_t x_t^0]_t < 2\,\mathrm{Re}(\varepsilon_t[V_t y_t^0, V_t z_t^0]_t).$$

Поскольку $\varepsilon_t = e^{i\theta_t}$, где $\theta_t \in [0, 2\pi)$, то всегда можно выбрать аргумент $\theta_t$ так, чтобы

$$\mathrm{Re}(\varepsilon_t[y_t^0, z_t^0]_t) = 0, \quad \mathrm{Re}(\varepsilon_t[V_t y_t^0, V_t z_t^0]_t) \leq 0.$$

Продолжим функцию $\varepsilon_t$ на $T$, полагая $\varepsilon_t := 1$ для $t \in T \setminus T_1$. Продолжим также вектор-функцию $x_t^0$ на $T$, полагая $x_t^0 := 0$ для $t \in T \setminus T_1$. Продолжение обозначим через $x^0 := (x_t^0)$. По построению $[Vx^0, Vx^0] < 0$, что невозможно по предположению об операторе $V$. $\square$

Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор. Введем множество

$$\Xi_- := \{Z \in \mathcal{Z} : [Zy,y] \leq [Vy,Vy] \ \forall y \in \beta^-\}.$$

Для $Z = (z(t)I_t) \in \Xi_-$ и $y = (y_t) \in P^-H$, $\|y_t\| = 1$, по лемме 4 имеем

$$\|VP^-\|^2[y,y]_t = -\|VP^-\|^2\|y\|_t^2 \leq -[V_t y_t, V_t y_t] \leq z(t) \leq \Psi^V(t) \ \ (\leq \|VP^+\|^2).$$

Таким образом, в $\Xi_-$ существует наибольший элемент $:= \Xi^V$ и $\Xi^V \leq \Psi^V$.

**Замечание 2.** Пусть $V = (V_t)$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор. Тогда $[Vx,Vx] \geq [Zx,x]$ $\forall x \in H$, если $Z \in \mathcal{Z}^+$ и $\Xi_+^V := \max\{0, \Xi^V\} \leq Z \leq \Psi^V$.

Для доказательства достаточно воспользоваться леммой 4 и любой измеримой функцией $f(t) : \Psi^V(t) \geq f(t) \geq \Xi_+^V(t)$. Затем положить $Z := (f(t)I_t)$. $\square$

Отметим, что $Z = \Psi^V$ — наибольший (а $Z = \Xi_+^V$ наименьший) неотрицательный центральный оператор, для которого выполнено замечание 2.

**Следствие 2.** Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор. Тогда 1) $V$ равномерно строгий $\Leftrightarrow$ $(\Psi^V)^{-1}$ существует и ограничен и $\Psi^V \geq \|\Xi_+^V\|I$; 2) $V$ строгий $\Leftrightarrow$ $(\Psi^V)^{-1}$ существует и ограничен; 3) $V$ полустрогий $\Leftrightarrow$ $(\Psi^V x, x) > 0$ $\forall x \in H \setminus \{0\}$ и $\Psi^V$ не обратим; 4) $V$ нестрогий $\Leftrightarrow$ $\Psi^V = 0$.

**Доказательство.** При доказательстве удобнее действовать функциями. Ниже будем считать, что $\Psi^V = (\beta^V(t)I_t)$ и $\Xi_+^V = (\xi_+^V(t)I_t)$. Обозначим через $\beta^{V\infty}$ ($\beta_\infty^V$) существенную верхнюю ($= \|\Psi^V\|$) (нижнюю) грань функции $\beta(t)$. Аналогичные обозначения введем для $\xi_+^V$. Докажем, например, 1).

Пусть $V$ — равномерно строгий $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор и для некоторого $c > 0$ выполнено неравенство $[Vx,Vx] \geq c[x,x]$ $\forall x \in H$. Тогда очевидно

$$\beta_\infty^V = \sup\{\lambda : [Vx,Vx] \geq \lambda[x,x], \ x \in H\} > 0.$$

Неравенство $\beta_\infty^V \geq \xi^{V\infty}$ следует из леммы 4, определения функций $\beta^V(t)$, $\xi_+^V(t)$ и неравенства $\beta^V(t) \geq c \geq \xi_+^V(t)$.

Обратно, пусть $\beta^V_\infty > 0$ и $\beta^V_\infty \geq \xi^{V\infty}$. Выберем любое $c > 0$ такое, что $\beta^V_\infty \geq c \geq \xi^{V\infty}$. Тогда в силу леммы 4 для всех $y \in \beta^{--}$ и $z \in \beta^{++}$ на $\{t \in T : [y,y]_t[z,z]_t \neq 0\}$

$$\frac{[Vy,Vy]_t}{[y,y]_t} \leq c \leq \frac{[Vz,Vz]_t}{[z,z]_t} \quad \text{п. в.}$$

Следовательно, $[Vx,Vx]_t \geq c[x,x]_t$ п. в. для всех $x \in H$. Это означает, что $[Vx,Vx] \geq c[x,x]$ для всех $x \in H$. $\square$

Обозначим через $\mathcal{Z}^{++}$ множество всех положительных операторов из $\mathcal{Z}$, имеющих ограниченный обратный.

**Теорема 2.** *$J_\mathcal{Z}$-плюс-оператор $V$ строгий тогда и только тогда, когда существует $Z \in \mathcal{Z}^{++}$ такой, что оператор $W := ZV$ несжимающий.*

**Доказательство.** Пусть $V$ — строгий $J_\mathcal{Z}$-плюс-оператор. В силу условия 2) следствия 2 имеем $(\Psi^V)^{-1/2} = ((\beta^V)^{-1/2}(t)I_t) \in \mathcal{Z}$. Следовательно, функция $(\beta^V(t))^{-1/2}$ п. в. ограничена. Положим $W = (\Psi^V)^{-1/2}V$. Тогда $W \in \mathcal{M}$ и

$$[W_tx_t, W_tx_t]_t = (\beta^V(t))^{-1}[V_tx_t, V_tx_t]_t \geq [x_t,x_t]_t.$$

По теореме 1 оператор $W$ несжимающий.

Обратно. Пусть $V$ — $J_\mathcal{Z}$-плюс-оператор и $W = ZV$ несжимающий. Поскольку $Z$ неотрицательный и центральный, то $Z = (f(t)I_t)$, где $f(t) > 0$ п. в. (существенная верхняя грань функции $f$ совпадает с $\|Z\|$). Из ограниченной обратимости $Z$ следует, что существенная нижняя грань функции $f$ строго больше нуля ($= \|Z^{-1}\|$). Далее

$$[x_t,x_t]_t \leq [W_tx_t, W_tx_t]_t = f^2(t)[V_tx_t, V_tx_t]_t.$$

Это влечет $0 < \|Z\|^{-2} \leq f^{-2}(t) \leq \beta^V(t)$ п. в. Следовательно, $\beta^V_\infty > 0$. По условию 2) следствия 2 $V$ строгий. $\square$

Непосредственно из определений вытекает

**Следствие 3.** В сепарабельном гильбертовом пространстве оператор $V$ полуфокусирующий (полуравномерно растягивающий) тогда и только тогда, когда $Z^V_f = (g(t)I_t)$ $(Z^V_r = (g(t)I_t))$, где функция $g(t) > 0$ п. в. и существенная нижняя грань $g(t)$ равна нулю.

Следующая теорема по существу является переформулировкой теоремы 4.24 ([1], гл. II) с аналогичным доказательством.

**Теорема 3.** *Для $J_\mathcal{Z}$-плюс-оператора $V$ следующие условия эквивалентны*:
а) *$V$ колинеарен некоторому равномерно растягивающему оператору*;
б) *$V$ — фокусирующий равномерно строгий $J_\mathcal{Z}$-плюс-оператор*;
в) $\Psi^V \geq \lambda I \geq \Xi^V_+$ *для некоторого* $\lambda > 0$;
г) *существует число $\nu_0 > 0$ такое, что $V^\# V - \nu_0 I >>^J 0$.*

По определению $A >>^J 0$ означает, что существует $\gamma > 0$ такое, что $[Ax,x] \geq \gamma\|x\|^2$ $\forall x \in H$.

## 1. Полустрогие операторы в $H$

**Теорема 4.** *Пусть $V$ — $J_\mathcal{Z}$-плюс-оператор и $Z \in \mathcal{Z}^{++}$. Тогда следующие условия эквивалентны*:
а) $V^\# V - Z^{-2} >>^J 0$;
б) *$ZV$ — равномерно растягивающий оператор*;
в) $\Psi^V \geq Z^{-2} + \gamma I > Z^{-2} - \gamma I \geq \Xi^V_+$ *для некоторого* $\gamma > 0$.

**Доказательство** в целом следует доказательству теоремы 4.24 ([1], гл. II).

а) $\Rightarrow$ б). Пусть $V^{\#}V - Z^{-2} >>^J 0$, т. е. для некоторого $\gamma > 0$ $[(V^{\#}V - Z^{-2})x, x] \geq \gamma\|x\|^2$ $\forall x \in H$. Отсюда $[Vx, Vx] \geq [Z^{-2}x, x] + \gamma\|x\|^2$ $\forall x \in H$. Положим $W := ZV$ и $x = Zy$. Тогда

$$[Wy, Wy] = [VZy, VZy] \geq [Z^{-2}Zy, Zy] + \gamma\|Z^{-1}y\|^2 \geq [y, y] + \gamma\|Z\|^{-2}\|y\|^2 \quad \forall y \in H.$$

Итак, $W = ZV$ — равномерно растягивающий оператор.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $[ZVx, ZVx] \geq [x, x] + \gamma\|x\|^2$ для любого $x \in H$ и некоторого $\gamma > 0$. Пусть $x = Z^{-1}y$. Тогда $[Vy, Vy] \geq [Z^{-1}y, Z^{-1}y] + \gamma\|Z\|^{-2}\|y\|^2$ для всех $y \in H$. Следовательно, $[V_t y_t, V_t y_t] \geq z^{-2}(t)[y_t, y_t] + \gamma\|Z^{-2}\|\,\|y_t\|^2$ п.в.

Пусть $x = (x_t) \in \beta^{++}$, $[x_t, x_t] = 1$ и $y = (y_t) \in \beta^{--}$, $[y_t, y_t] = -1$. Тогда получаем

$$\beta^V(t) = \inf_{[x_t, x_t]=1}[V_t x_t, V_t x_t] \geq \inf_{[x_t, x_t]=1}\{z^{-2}(t) + \gamma\|Z^{-2}\|\,\|x_t\|^2\} \geq$$
$$\geq z^{-2}(t) + \gamma\|Z^{-2}\| \quad (\gamma > 0)$$

и

$$\xi^V(t) = \sup_{[x_t, x_t]=-1}\{-[V_t x_t, V_t x_t]\} \leq$$
$$\leq \sup_{[x_t, x_t]=-1}\{z^{-2}(t) - \gamma\|Z^{-2}\|\,\|x_t\|^2\} \leq z^{-2}(t) - \gamma\|Z^{-2}\|.$$

Учитывая, что $z^{-2}(t) \geq \frac{1}{\|Z^2\|}$ п. в., подберем $0 < \gamma_1 < \gamma$ так, чтобы $z^{-2}(t) - \gamma_1\|Z^{-2}\| > 0$ п. в. Наконец получаем

$$\beta^V(t) \geq z^{-2}(t) + \gamma_1\|Z^{-2}\| > z^{-2}(t) - \gamma_1\|Z^{-2}\| > \xi_+^V(t) := \max\{0, \xi^V(t)\}.$$

в) $\Rightarrow$ а). Из в) и замечания 2 следует, что

$$[V_t x_t, V_t x_t] \geq z^{-2}(t)[x_t, x_t] + \gamma[x_t, x_t]; \quad [V_t x_t, V_t x_t] \geq z^{-2}(t)[x_t, x_t] - \gamma[x_t, x_t];$$
$$[V_t x_t, V_t x_t] \geq z^{-2}(t)[x_t, x_t]$$

п. в. $\forall x \in H$, т. е.

$$[(V^{\#}V - (Z^{-2} + \gamma))x, x] \geq 0; \quad [(V^{\#}V - (Z^{-2} - \gamma))x, x] \geq 0;$$
$$[(V^{\#}V - Z^{-2})x, x] \geq 0. \tag{5}$$

Предположим теперь, что а) не выполнено. В силу (5) имеем $V^*JV - JZ^{-2} \geq 0$. В силу предположения существует последовательность $(x_n) \subset H$, $\|x_n\| = 1$, такая, что

$$((V^*JV - JZ^{-2})x_n, x_n) \to 0. \tag{6}$$

Отсюда $(V^*JV - JZ^{-2})^{1/2}x_n \to 0$. Но тогда $(V^*JV - JZ^{-2})x_n \to 0$.

Убедимся, что последовательность $x_n = (x_n(t))$ может состоять только из дефинитных векторов. Определим оператор $I^{+n} = (I_t^{+n})$ по следующему правилу:

$$I_t^{+n} = I, \text{ если } [x_n(t), x_n(t)] \geq 0; \quad I_t^{+n} = 0, \text{ если } [x_n(t), x_n(t)] < 0,$$

и

$$I_t^{+n} = \sqrt{1 + 1/n}P_t^+ + \sqrt{1 - 1/n}P_t^-, \quad \text{когда} \quad [x_n(t), x_n(t)] = 0.$$

Отметим, что в последнем случае $\|I_t^{+n}x_n(t)\| = \|x_n(t)\|$.

По аналогии определим оператор $I_t^{-n} = (I_t^{-n})$:

$$I_t^{-n} = 0, \text{ если } [x_n(t), x_n(t)] \geq 0; \quad I_t^{-n} = I, \text{ если } [x_n(t), x_n(t)] < 0.$$

Определим еще последовательности векторов $x_{+n} := I^{+n}x_n$, $x_{-n} := I^{-n}x_n$ и $x'_n := x_{+n} + x_{-n}$. По построению $\|x'_n\| = \|x_n\|$ $(= 1)$. (Это означает, что для бесконечного числа номеров или $\|x_{+n}\|^2 \geq 1/2$, или $\|x_{-n}\|^2 \geq 1/2$.) Кроме того, опять же по построению $\|x_n - x'_{+n}\| \to 0$, если

$n \to \infty$. Это означает, что для последовательности $x'_n$ соотношение (6) также выполнено. Из (6), примененого к $x'_n$, следует

$$((V_t^* J_t V_t - J_t Z_t^{-2}) x_n(t)', x_n(t)') \to 0 \ \text{ п. в.},$$

когда $n \to \infty$. Таким образом, $(V_t^* J_t V_t - J_t Z_t^{-2}) x'_n \to 0$, когда $n \to \infty$ п. в. по мере $\mu$. Это означает, что $(V^* J V - J Z^{-2}) x_{\pm n} \to 0$, если $n \to \infty$. Выберем из последовательностей $(x_{+n})$, $(x_{-n})$ такую подпоследовательность, у которой длина каждого из векторов не меньше $1/\sqrt{2}$. Не ограничивая общности, можно считать, что выбранная подпоследовательность состоит из всех векторов или последовательностей $(x_{+n})$ или $(x_{-n})$. Разделим каждый вектор выбранной последовательности на его длину и вновь полученную последовательность обозначим через $(x_n)$. По построению для нее выполнено (6), и последовательность состоит из дефинитных векторов.

1) Если все $x_n \in \beta^{++}$, то в силу (5) имеем

$$((V^* J V - J Z^{-2}) x_n, x_n) \geq ((V^* J V - J Z^{-2} - \gamma J) x_n, x_n) \geq 0.$$

Учитывая (6), получаем $(V^* J V - J Z^{-2} - \gamma J) x_n \to 0$. Но тогда $J x_n \to 0$, что невозможно.

2) Если все $x_n \in \beta^{--}$, то снова в силу (5) имеем

$$((V^* J V - J Z^{-2}) x_n, x_n) \geq ((V^* J V - J Z^{-2} + \gamma J) x_n, x_n) \geq 0.$$

Это влечет $(V^* J V - J Z^{-2} + \gamma J) x_n \to 0$ и снова $J x_n \to 0$, что опять невозможно. Итак, предположение неверно. Следовательно, в) влечет а). $\square$

**Теорема 5.** *Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$V$ с точностью до множителя из $\mathcal{Z}^{++}$ равномерно растягивающий;*

2) *$V$ — фокусирующий строгий $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор.*

**Доказательство.** 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $Z \in \mathcal{Z}^{++}$ такой, что $W := ZV$ равномерно растягивающий. Тогда в силу теоремы 4 оператор $V$ строгий. Имеем $[Wx, Wx] \geq [x, x] + \delta \|x\|^2 \ \forall x \in H$ и для некоторого $\delta > 0$.

Пусть теперь $x \in \beta^+$ и $y = Zx$. Тогда

$$[Vy, Vy] = [Wx, Wx] \geq \delta \|x\|^2 = \delta \|Z^{-1} y\|^2 \geq \delta \|Z\|^{-2} \|y\|^2 \geq \delta \|Z\|^{-2} \|V\|^{-2} \|Vy\|^2.$$

Учтем теперь, что в силу определения $Z$ имеем $Z\beta^+ = \beta^+$. Таким образом, $V$ — фокусирующий строгий оператор.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $V$ — фокусирующий строгий $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор: $[Vx, Vx] \geq \gamma \|Vx\|$ $(x \in \beta^+)$. Введем оператор $S_\varepsilon := (1 - \varepsilon) P^+ + P^-$ и пусть $V_\varepsilon = S_\varepsilon V$. Для всех $t \in T$, $x \in \beta^+$ и достаточного малого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned}[V_\varepsilon x, V_\varepsilon x]_t = [(V - \varepsilon P^+ V) x, (V - \varepsilon P^+ V) x]_t = [Vx, Vx]_t + \\ + (\varepsilon^2 - 2\varepsilon)[P^+ V x, P^+ V x]_t \geq (\gamma + \varepsilon^2 - 2\varepsilon) \|Vx\|_t^2 \geq (\gamma + \varepsilon^2 - 2\varepsilon) \|V_\varepsilon x\|_t^2. \quad (7)\end{aligned}$$

Последнее означает, что $V_\varepsilon$ — фокусирующий оператор.

Обозначим через $T_0$ множество всех $t \in T$ таких, что $\xi^V(t) > 0$. В неравенстве (7) доказано, что $[V_\varepsilon x, V_\varepsilon x]_t \leq [Vx, Vx]_t$ для всех $t \in T$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поэтому п. в. для $t \in T_0$ имеем

$$(0 <) \quad \xi^V(t) \leq \xi^{V_\varepsilon}(t) \leq \beta^{V_\varepsilon}(t) \leq \beta^V(t).$$

Пусть теперь $x = (x_t) \in \beta^+$ такой, что $[x_t, x_t] = 1$. Тогда из отрицательности числа $\varepsilon^2 - \varepsilon$ для малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$[V_\varepsilon x, V_\varepsilon x] = [Vx, Vx] + (\varepsilon^2 - 2\varepsilon)[P^+ V x, P^+ V x] \leq (1 - \varepsilon)^2 [Vx, Vx].$$

Поэтому $\beta^{V_\varepsilon}(t) \leq (1 - \varepsilon)^2 \beta^V(t) < \beta^V(t)$ для всех $t$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $2\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$. Подводя итог, для $t \in T_0$ имеем

$$\beta^V(t) - \xi^V(t) = \beta^V(t) - (1 - \varepsilon)^2 \beta^V(t) + (1 - \varepsilon)^2 \beta^V(t) - \xi^V(t) \geq (2\varepsilon - \varepsilon^2) \beta^V(t) \geq (2\varepsilon - \varepsilon^2) \beta_\infty^V > 0.$$

Для точек $t \notin T_0$ имеем $\beta^V(t) - \xi^V(t) \geq \beta^V(t) \geq \beta^V_\infty$.

Обозначим $\gamma := (1/2)(2\varepsilon - \varepsilon^2)\beta^V_\infty$ и положим $Z := (z(t)^{-1/2} I_t)$, где $z(t) := (1/2)(\beta^V(t) + \xi^V_+(t))$. Выше убедились, что для данных $\gamma$ и $Z$ выполнено условие в) теоремы 4. Применим теперь условие б) теоремы 4. $\square$

**Следствие 4.** Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор, тогда

1) множество $K_V$ всех операторов $Z \in \mathcal{Z}^{++}$ таких, что $ZV$ равномерно растягивающий, открыто в равномерной топологии,

2) замыкание множества $K_V$ совпадает с операторами $Z \in \mathcal{Z}^{++}$ такими, что $ZV$ — несжимающий оператор.

**Доказательство.** 1) Пусть $Z = (z(t)I_t) \in \mathcal{Z}^{++}$ такой, что $ZV$ равномерно растягивающий. По условию в) теоремы 4 для некоторого $\gamma > 0$ имеем $\beta^V(t) \geq z^{-2}(t) + \gamma > z^{-2}(t) - \gamma \geq \xi^V_+(t)$ п.в. По $\gamma > 0$ подберем $\varepsilon(\gamma) > 0$ так, чтобы для любой измеримой функции $z_0(t)$ такой, что $|z_0(t) - z(t)| < \varepsilon(\gamma)$ п.в., выполнялось неравенство $|z^{-2}(t) - z_0^{-2}(t)| < \frac{\gamma}{2}$ п.в. Тогда $z^{-2}(t) + \gamma \geq z_0^{-2} + \frac{\gamma}{2} \geq z_0^{-2}(t) - \frac{\gamma}{2} \geq z^{-2}(t) - \gamma$ п.в. Таким образом, открытая окрестность $\{Z_0 \in \mathcal{M}^{++} : \|z - z_0\| < \varepsilon(\gamma)\}$ принадлежит множеству $K_V$.

2) Пусть теперь $Z_0$ ($\in \mathcal{Z}^+$) — точка прикосновения в равномерной топологии множества $K_V$. Убедимся, что оператор $Z_0$ имеет ограниченный обратный. Действительно, поскольку для любого оператора $Z = (z(t)I_t) \in K_V$ имеем $\beta^V(t) \geq z^{-2}(t)$ п.в., то $Z^2(t) \geq \frac{1}{\beta^V(t)} \geq \frac{1}{\beta^V\infty} > 0$. Следовательно, $z_0^2(t) \geq \frac{1}{\beta^V\infty}$. Поэтому $Z_0$ имеет ограниченный обратный. Функция $Z \to Z^{-1}$ непрерывна в равномерной топологии. Следовательно, $Z^{-2}$ — точка прикосновения множества $K_V^{-2} := \{Z^{-2} : Z \in K_V\}$. Таким образом, справедливо неравенство

$$\beta^V(t) \geq z_0^{-2}(t) \geq \xi^V_+(t), \qquad \text{если } \ \xi^V_+(t) > 0,$$

и

$$\beta^V(t) \geq z_0^{-2}(t) \geq \|Z\|^{-2} > 0, \quad \text{если } \ \xi^V_+(t) = 0.$$

В силу замечания 2 имеем $[V_t x_t, V_t x_t] \geq z_0^{-2}(t)[x_t, x_t]$ п.в. для всех $x \in H$. Поэтому $[ZVx, ZVx] \geq [x, x]$, т.е. $ZV$ — несжимающий оператор. $\square$

Из условия в) теоремы 4 элементарно выводится

**Замечание 3.** Множество $K_V$ из следствия 4 ограничено в равномерной топологии тогда и только тогда, когда $\xi^V_\infty > 0$.

Из теорем 4, 5 вытекает

**Следствие 5.** Всякий фокусирующий строгий оператор есть прямая конечная сумма $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-операторов, сужения которых на свои носители есть равномерно строгие фокусирующие операторы.

## 2. Полуфокусирующие операторы в $H$

Перейдем теперь к изучению полуфокусирующих и полуравномерно растягивающих операторов. Следующая теорема объединяет теоремы 4 и 5. Интересно при этом учесть следствие 6.

**Теорема 6.** *Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор. Следующие условия эквивалентны:*

i) *$V$ — с точностью до множителя из $\mathcal{Z}^{++}$ полуравномерно растягивающий оператор;*

ii) *$V$ — строгий полуфокусирующий оператор;*

iii) *$\Psi^V \in \mathcal{Z}^{++}$, $\Psi^V - \Xi^V_+ \in \mathcal{Z}^+ \setminus \mathcal{Z}^{++}$ и $((\Psi^V - \Xi^V_+)x, x) > 0$ $\forall x \in H$, $x \neq 0$;*

iv) *существует оператор $Z \in \mathcal{Z}^{++}$ такой, что $V^\# V - Z >=^J 0$.*

**Доказательство.** i) $\Rightarrow$ ii). Пусть $Z \in \mathcal{Z}^{++}$ такой, что $W := ZV$ полуравномерно растягивающий: $[ZVx, ZVx] \geq [x, x] + \|Z_r^W x\|^2$ $\forall x \in H$. Отсюда следует, что $V$ строгий и $[Vx, Vx] \geq [Z^{-1}x, Z^{-1}x] + \|Z_r^W Z^{-1}x\|^2$. Таким образом,

$$[Vx, Vx] \geq \|Z_r^W Z^{-1}x\|^2 \geq \left\| \frac{Z_r^W Z^{-1}}{\|V\|} Vx \right\|^2 \quad \forall x \in \beta^+.$$

Последнее неравенство означает, что $Z_f^V \geq \frac{Z_r^W Z^{-1}}{\|V\|}$. Если предположить, что $V$ строгий фокусирующий, то в силу теоремы 5 оператор $V$ с точностью до множителя из $\mathcal{Z}^{++}$ равномерно растягивающий. Это противоречит i). Итак, i) влечет ii).

ii) $\Rightarrow$ iii). Пусть $V$ строгий полуфокусирующий. В силу условия 2) следствия 2 $\Psi^V \in \mathcal{Z}^{++}$. Пусть $Z_f^V = (z(t)I_t)$. Обозначим

$$T_n := \{t \in T : z(t) > 1/n\} \quad \text{и} \quad H_n := \int_{T_n} H_t d\mu_t + \int_{T \setminus T_n} 0 d\mu_t.$$

По выбору $T_n$ сужение $V$ на $H_n$ является строгим равномерно растягивающим. В силу теоремы 4 имеем $\beta^V(t) - \xi_+^V(t) > \gamma_n$ п. в. на $T_n$ для некоторой постоянной $\gamma_n > 0$. Но поскольку $Z_f^V > 0$, то $\bigcup\limits_n T_n = T$ и, следовательно, $\beta^V(t) - \xi_+^V(t) > 0$ п. в., т. е. $((\Psi^V - \Xi_+^V)x, x) > 0$ $\forall x \in H$. Если предположить, что существует $\gamma > 0$ такая, что $\beta^V(t) - \xi_+^V(t) > \gamma$ для почти всех $t$, то в силу теорем 4 и 5 оператор $V$ должен быть строгим фокусирующим. Получаем противоречие с ii). Итак, существенная нижняя грань разности $\beta^V(t) - \xi_+^V(t)$ равна нулю. Это означает, что

$$\Psi^V - \Xi_+^V \in \mathcal{Z}^+ \setminus \mathcal{Z}^{++}.$$

iii) $\Rightarrow$ iv). Пусть $Z := (1/2(\beta^V(t) + \xi_+^V(t))I_t)$. Убедимся, что оператор $Z$ искомый. По замечанию 2 имеем $[(V^\# V - Z)x, x] \geq 0$ $\forall x$. Без ограничения общности можно считать, что $\beta^V(t) - \xi_+^V(t) > 0$ $\forall t \in T$. Пусть $T_n$ из ii). Тогда $\bigcap\limits_n T_n = \emptyset$. Обозначим через $P_n$ ортопроектор на подпространство $H_n$ (см. ii)). Для сужения $V$ на $H_n$ выполнено условие в) теоремы 4. По условию а) теоремы 4 имеем

$$(V^\# V - Z)P_n >>^J 0, \quad [(V^\# V - Z)x, x] \geq \gamma_n \|x\|^2 \quad \forall x \in H_n.$$

Обозначим $A := V^\# V - Z$ и $Z^A = (z^A(t)I_t)$. Тогда $z^A(t) \geq \gamma_n$ $\forall t \in T_n$. Следовательно, $Z^A > 0$. Если предположить, что $Z^A > \gamma I$ для некоторого $\gamma > 0$, то будем иметь $V^\# V - Z >>^J 0$. В силу теоремы 4 это противоречит выполнению условия iii).

iv) $\Rightarrow$ i). Пусть iv) выполнено. Обозначим $A := V^\# V - Z$ и $W := Z^{-1/2}V$. Из неравенства $A >=^J 0$ следует $[Wx, Wx] \geq [x, x] + \|Z^{-1/2}Z^A x\|^2$ $\forall x \in H$. Тогда $Z_r^W \geq Z^{-1/2}Z^A > 0$. Предположим на время, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено неравенство $Z_r^W \geq \delta I$. По теореме 4 должно выполняться неравенство $V^\# V - Z >>^J 0$. Получаем противоречие с iv). Следовательно, $\inf\{(Z_r^W x, x) : \|x\| = 1\} = 0$. $\square$

Из теорем 4 и 6 вытекает

**Следствие 6.** Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор. Тогда не существует операторов $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}^{++}$ таких, что $Z_1 V$ равномерно растягивающий и в то же время $Z_2 V$ полуравномерно растягивающий.

Согласно следующему предложению для полуравномерно растягивающих операторов нет аналога условия 1) следствия 4.

**Предложение 2.** *Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор с точностью до множителя $Z \in \mathcal{Z}^{++}$ полуравномерно растягивающий. Для любого $\delta > 0$ найдется $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор $V_\delta$ с точностью до множителя из $\mathcal{Z}^{++}$ равномерно растягивающий и такой, что $\|V - V_\delta\| < \delta$.*

**Доказательство.** Обозначим $W := ZV$. Для любого $x \in H$ имеем $[Wx, Wx] \geq [x, x] + \|Z_r^W x\|^2$. Пусть $Z_r^W = (z(t)I_t)$. Введем оператор $I_\delta := (I_\delta(t))$, где $I_\delta(t) = I_t$, если $z(t) \geq \delta$, и $I_\delta(t) := \sqrt{1+\delta^2}P_t^+ + \sqrt{1-\delta^2}P_t^-$, если $z(t) < \delta$. Пусть $T_\delta := \{t \in T : z(t) < \delta\}$. Положим $V_\delta := VI_\delta$ и $W_\delta := ZV_\delta$. Тогда для любого $x \in H$

$$[W_\delta x, W_\delta x] \geq [I_\delta x, I_\delta x] + \|I_\delta Z_r^W x\|^2 \geq$$
$$\geq \int_{T\setminus T_\delta} [x_t, x_t] d\mu_t + \int_{T_\delta} [x_t, x_t] d\mu_t + \int_{T\setminus T_\delta} z^2(t)\|x_t\|^2 d\mu_t \geq [x, x] + \delta^2\|x\|^2.$$

Итак, оператор $W_\delta$ равномерно растягивающий. По построению $V_\delta$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор и $\|V - V_\delta\| \leq \|V\|\|I - I_\delta\|$. Для достаточно малых $\delta$ будем иметь $\|I - I_\delta\| < \frac{\varepsilon}{\|V\|}$. Следовательно, $V_\delta$ — искомый оператор. $\square$

Не в каждой алгебре $\mathcal{M}$ существуют полуравномерно растягивающие $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-операторы. Например, они не существуют, когда $\mathcal{Z}$ имеет конечный спектр. Это связано с тем, что мера $\mu$ каждой точки спектра ненулевая. Тем не менее справедлива

**Теорема 7.** *Если в $\mathcal{M}$ имеется хотя бы один полуравномерно растягивающий оператор, то замыкание в равномерной топологии множества всех $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-операторов с точностью до множителя из $\mathcal{Z}^{++}$ полуравномерно растягивающих совпадает с множеством всех с точностью до множителя из $\mathcal{Z}^{++}$ несжимающих операторов.*

**Доказательство.** Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор и $Z \in \mathcal{Z}^{++}$ такие, что $W := ZV$ — полуравномерно растягивающий оператор. Без ограничения общности можно считать, что $Z_r^W < I$. Как в предложении 2, определим центральный оператор $I_n := \sqrt{I + Z_r^W/n}P^+ + \sqrt{I - Z_r^W/n}P^-$. Очевидно, $\|I - I_n\| \geq 1/n$. Пусть теперь $V_0$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор и $Z_0 \in \mathcal{Z}^{++}$ такие, что $W_0 := Z_0V_0$ — несжимающий оператор. Определим оператор $W_n := I_nW_0$. Тогда $[W_nx, W_nx] \geq [I_nx, I_nx] = [I_n^2x, x] = [x, x] + \left\|\frac{Z_r^W}{n}x\right\|^2$. Таким образом, в любой равномерной окрестности оператора $V_0$ найдется $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор ($V_n = I_nV_0$) с точностью до множителя ($Z_0$) из $\mathcal{Z}^{++}$ такой, что $\|V_0 - V_n\| \leq \|V_0\|\,\|I - I_n\| \leq \frac{\|V_0\|}{n}$. $\square$

Поскольку в определении равномерно растягивающих операторов $V$ включение $V \in \mathcal{M}$ не используется, справедлив полный аналог теоремы 4.27 ([1], гл. II).

**Теорема 8.** *Множество равномерно растягивающих операторов открыто в равномерной операторной топологии в алгебре $\mathcal{M}$ и его замыкание совпадает с множеством всех несжимающих операторов.*

Рассматривая полустрогие операторы, получим новое утверждение.

**Теорема 9.** i) *Множество $\mathcal{V}_\mathrm{p}$ всех $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-операторов, с точностью до множителя из $\mathcal{Z}^{++}$ совпадающих с равномерно растягивающими операторами, открыто в алгебре $\mathcal{M}$ в равномерной топологии.*

ii) *Замыкание $\mathcal{V}_p$ содержит множество всех с точностью до множителя из $\mathcal{Z}^{++}$ несжимающих $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-операторов.*

**Доказательство.** i) Пусть $V \in \mathcal{V}_p$. В силу теоремы 4 существуют число $\delta > 0$ и оператор $Z \in \mathcal{Z}^+$ такие, что $((V^*JV - JZ)x, x) \geq \delta\|x\|^2$ $\forall x \in H$. Для любого оператора $V' \in \mathcal{M}$ такого, что $\delta' := \delta - 2\|V\|\,\|V' - V\| - \|V' - V\|^2 > 0$, имеют место неравенства

$$((V'^*JV' - JZ)x, x) = ((V + V' - V)^*J(V + V' - V) - JZ)x, x) \geq$$
$$\geq ((V^*JV - JZ)x, x) - (2\|V\|\,\|V' - V\| + \|V' - V\|)\|x\|^2 \geq [x, x] + \delta'\|x\|^2.$$

В силу теоремы 4 оператор $V'$ с точностью до множителя ($=Z^{-1/2}$) из $\mathcal{Z}^{++}$ равномерно растягивающий, т. е. $V' \in \mathcal{V}_p$. Пункт i) доказан.

ii) Пусть $V$ — $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператор и $Z \in \mathcal{Z}^{++}$ такие, что $W := ZV$ несжимающий. Определим оператор $I_\varepsilon := \sqrt{1+\varepsilon}P^+ + \sqrt{1-\varepsilon}P^-$. Оператор $I_\varepsilon$ является $J_{\mathcal{Z}}$-плюс-оператором и выполнена оценка $[WI_\varepsilon x, WI_\varepsilon x] \geq [I_\varepsilon x, I_\varepsilon x] = [x,x] + \varepsilon\|x\|^2$. Поэтому $VI_\varepsilon$ с точностью до множителя $Z$ равномерно растягивающий. При этом $\|VI_\varepsilon - V\| \leq \|V\|\,\|I_\varepsilon - I\| \to 0$, если $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $V$ — предел в равномерной топологии последовательности из $\mathcal{V}_p$. $\square$

**Замечание 4.** Нулевой оператор принадлежит замыканию $\mathcal{V}_p$ в равномерной топологии.

Действительно, пусть $V \in \mathcal{V}_p$. Тогда для любого $n \in N$ справедливо включение $(1/n)V \in \mathcal{V}_p$. Ясно, что $(1/n)V \to 0$.

Многочисленные примеры изученных выше операторов приведены в [5].

## Литература


1. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* – М.: Наука, 1986. – 352 с.
2. Dixmier J. *Les algebres d'operateurs dans l'expace Hilbertien* (*algebres de von Neumann*). – Paris: Gauthier–Villars. – 1969. – 367 p.
3. Наймарк М.А. *Нормированные кольца.* – М.: Наука, 1968. – 664 с.
4. Владова Е.В., Матвейчук М.С. *Унитарнопорожденная билинейная форма как аналог индефинитной метрики* // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань, 2000. – Т. 5. – С. 51–52.
5. Владова Е.В. *Плюс-операторы и мера в пространстве с унитарнопорожденной полуторалинейной формой*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Саратов, 2001. – 100 с.



*Ульяновский государственный педагогический университет*

*Новороссийский филиал Кубанского государственного университета*



*Поступила* 28.12.2001