ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 517.544

Р.Б. САЛИМОВ, П.Л. ШАБАЛИН

МЕТОД РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ

В работах [1], [2] рассматривалось решение задачи Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости путем сведения ее к соответствующей задаче Римана методом Н.И. Мусхелишвили ([3], с. 139–155).

В данной работе однородная задача Гильберта с бесконечным индексом решается непосредственно путем обобщения на рассматриваемый случай метода регуляризирующего множителя, разработанного Ф.Д. Гаховым ([4], с. 273) и развитого в ряде работ других авторов [5]–[8] для задачи Гильберта с конечным индексом.

Пусть L — вещественная ось в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Требуется найти функцию $\Phi(z) = u(z) + iv(z)$, аналитическую, ограниченную в области D и непрерывно продолжимую во все точки контура L, по краевому условию

$$a(t)u(t) - b(t)v(t) = 0, \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$ — заданные на L действительные функции, причем $a^2+b^2 \neq 0$ всюду на L, включая бесконечно удаленную точку.

Решение поставленной задачи будем рассматривать в классе ограниченных функций.

Перепишем условие (1) в виде

$$\operatorname{Re}[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = 0, \tag{2}$$

где $G(t) = a(t) - ib(t)$, а $\nu(t) = \arg G(t)$. Будем считать выполненными следующие ограничения:

1) $\nu(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho + \widetilde{\nu}(t), & t > 0, \\ \nu^+ |t|^\rho + \widetilde{\nu}(t), & t < 0, \end{cases}$

где ν^-, ν^+, ρ — постоянные, $0 < \rho < 1$, ${\nu^-}^2 + {\nu^+}^2 \neq 0$, $\widetilde{\nu}(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем μ, $0 < \mu < 1$, на всем контуре L, включая бесконечно удаленную точку, — условию $H_L(\mu)$ в обозначениях ([5], с. 113),

2) $|G(t)|$ удовлетворяет условию $H_L(\mu)$.

Возьмем функцию

$$P(z) + iQ(z) = le^{i\alpha} z^\rho = le^{i\alpha} r^\rho e^{i\rho\theta},$$

где l, α — действительные постоянные, $r = |z|$, $\theta = \arg z$ — однозначная непрерывная в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ ветвь $\arg z$, удовлетворяющая соотношению $0 \le \theta \le \pi$. Эта функция является аналитической в области D, а на ее границе L принимает значения

$$P(t) + iQ(t) = l|t|^\rho[\cos(\alpha + \rho\theta) + i\sin(\alpha + \rho\theta)],$$

где $\theta = 0$ при $t > 0$, $\theta = \pi$ при $t < 0$.

Выберем числа $l > 0$, $0 \le \alpha < 2\pi$ так, чтобы

$$l\cos\alpha = \nu^-, \quad l\cos(\alpha + \pi\rho) = \nu^+,$$

т. е. чтобы

$$l\cos\alpha = \nu^-, \quad l\sin\alpha = \frac{\nu^-\cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)}.$$

Отметим, что при этом

$$P(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho, & t > 0; \\ \nu^+ |t|^\rho, & t < 0, \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{cases} (\nu^-\cos(\pi\rho) - \nu^+) t^\rho / \sin(\pi\rho), & t > 0; \\ (\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho)) |t|^\rho / \sin(\pi\rho), & t < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Определим аналитическую ограниченную в области D функцию, граничные значения мнимой части которой равны $\nu(t) - P(t) = \widetilde{\nu}(t)$, формулой ([3], с. 155)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\nu}(t)\frac{dt}{t-z}.$$

На контуре L эта функция принимает значения $\Gamma^+(t) = \Gamma_0(t) + i\widetilde{\nu}(t)$, где $\Gamma_0(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\nu}(t_1)\frac{dt_1}{t_1 - t}$.

С учетом изложенного выше перепишем краевое условие (2) в виде

$$\mathrm{Re}[e^{-\Gamma^+(t)} e^{-ile^{i\alpha}t^\rho}\Phi(t)] = 0. \tag{4}$$

Введем функцию

$$F(z) = ie^{-\Gamma(z)} e^{-ile^{i\alpha}z^\rho}\Phi(z), \quad \mathrm{Im}\, z > 0, \tag{5}$$

аналитическую в области D. Согласно (4)

$$\mathrm{Im}\, F^+(t) = 0 \tag{6}$$

всюду на L. Последнее позволяет аналитически продолжить функцию $F(z)$ на полуплоскость $\mathrm{Im}\, z < 0$ по закону $F(z) = \overline{F(\overline{z})}$. Поэтому согласно (5) имеем

$$F(z) = -ie^{-\overline{\Gamma(\overline{z})}} e^{ile^{-i\alpha}\overline{\overline{z}^\rho}}\,\overline{\Phi(\overline{z})}, \quad \mathrm{Im}\, z < 0. \tag{7}$$

Формулы (5), (7) определяют целую функцию $F(z)$, порядок которой не может превосходить ρ.

Для функции $Q(z) = r^\rho l\sin(\alpha + \rho\theta)$ имеем

$$Q(re^{i\theta}) = \frac{r^\rho}{\sin\pi\rho}[\nu^-\cos[(\pi - \theta)\rho] - \nu^+\cos\rho\theta]. \tag{8}$$

Таким образом, для любого решения $\Phi(z)$ однородной краевой задачи выполняется соотношение (5), в котором $F(z)$ — целая функция, принимающая действительные значения на L. Итак, если однородная краевая задача имеет ограниченное в области D решение $\Phi(z)$, то порядок роста ρ_F целой функции $F(z)$, определяемой формулами (5), (7), не превосходит ρ.

Пусть $F(z)$ — произвольная целая функция, принимающая действительные значения на L, тогда для функции $\Phi(z)$, определяемой формулой (5), выполняется краевое условие (4).

Теорема 1. *Для того чтобы решение $\Phi(z)$ однородной краевой задачи было ограниченным в области D, необходимо и достаточно, чтобы порядок ρ_F целой функции $F(z)$, входящей в соотношение (5) для указанного решения $\Phi(z)$, не превосходил ρ и на контуре L для всех достаточно больших $|t|$ выполнялось неравенство*

$$|F(t)| \le Ce^{Q(t)}, \quad C = \mathrm{const}. \tag{9}$$

Теорема 2. *Общее решение однородной краевой задачи* (2) *дается формулой*

$$\Phi(z) = -ie^{\Gamma(z)}e^{ile^{i\alpha}z^{\rho}}F(z), \tag{10}$$

где $F(z)$ — *произвольная целая функция, порядок которой не превосходит* ρ, *принимающая вещественные значения на* ∂D, *подчиненные условию* (9).

Теорема 3. *Пусть* $\rho < 1/2$. *Тогда однородная краевая задача* (4)

a) *не имеет нетривиальных ограниченных решений, если и только если* $\nu^- \cos(\rho\pi) < \nu^+$, *либо* $\nu^+ \cos(\rho\pi) > \nu^-$;

b) *имеет единственное решение, если и только если* $\nu^- \cos(\rho\pi) = \nu^+$, $\nu^+ \cos(\rho\pi) < \nu^-$, *либо* $\nu^+ \cos(\rho\pi) = \nu^-$, $\nu^- \cos(\rho\pi) > \nu^+$, *вида*

$$\Phi(z) = iAe^{\Gamma(z)}e^{ile^{i\alpha}z^{\rho}}, \quad \operatorname{Im} A = 0;$$

c) *имеет бесконечное множество ограниченных решений, если и только если* $\nu^- \cos(\rho\pi) > \nu^+$, $\nu^- > \nu^+ \cos(\rho\pi)$.

Доказательство основано на сравнении индикатора роста $h_F(\theta)$ функции $F(z)$ и функции $h(\theta) = [\nu^+ \cos\rho\theta - \nu^- \cos\rho(\theta - \pi)]/sin\rho\pi$ и теореме Фрагмена–Линделёфа.

Пусть $\nu^- - \nu^+ < 0$, и $\Phi(z)$ — ограниченное решение задачи (4). Тогда для функции (8) имеем $Q(re^{i\pi/2}) < 0$, следовательно, $|F(re^{i\pi/2})| < C$ в силу симметрии $|F(re^{-i\pi/2})| < C$, поэтому по принципу Фрагмена–Линделёфа $|F(z)| < C$ во всей плоскости, т. е. $F(z) \equiv 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Если* $\nu^- - \nu^+ < 0$, *то однородная краевая задача* (4) *имеет только нулевое решение.*

Теорема 5. *Если* $\rho \geq 1/2$ *и выполняются условия* $\nu^- < 0$ *или* $\nu^+ > 0$, *то однородная краевая задача* (4) *имеет только нулевое решение.*

Действительно, пусть $\rho \geq 1/2$ и $\nu^- < 0$, а задача (4) имеет ненулевое ограниченное решение, тогда индикатор роста функции $F(z)$ удовлетворяет условию $h_F(\pi/2\rho) = h_F(-\pi/2\rho) \leq \nu^- < 0$, что противоречит известному (напр., [9], с. 84) соотношению $h_F(\theta + \pi/\rho) + h_F(\theta) \geq 0$.

Пусть неравенства

$$\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+ > 0, \quad \nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho) > 0 \tag{11}$$

выполняются одновременно. Соотношение (9) для достаточно больших $|t|$ с учетом (3) запишем так

$$|F(t)| \leq \begin{cases} Ce^{\frac{\nu^- \cos\pi\rho - \nu^+}{\sin\pi\rho}t^{\rho}}, & t > 0; \\ Ce^{\frac{\nu^- - \nu^+ \cos\pi\rho}{\sin\pi\rho}|t|^{\rho}}, & t < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Эти последние неравенства выполняются для любой целой функции $F(z)$ порядка $\rho_F < \rho$ при условии (11).

Ясно, что в рассматриваемом случае утверждение теоремы 2 можно уточнить:

Теорема 6. *В случае, когда имеют место неравенства* (11), *общее решение однородной краевой задачи* (4) *дается формулой* (10), *где* $F(z)$ — *произвольная целая функция, принимающая на* L *действительные значения, порядок которой* $\rho_F \leq \rho$, *и при* $\rho_F = \rho$ *удовлетворяющая соотношениям* (12) *для достаточно больших* $|t|$.

Пусть $\rho \geq 1/2$, $\nu^- \geq 0$, $\nu^+ \leq 0$ и имеют место соотношения

$$\nu^- \cos(\rho\pi) - \nu^+ > 0, \quad \nu^- - \nu^+ \cos(\rho\pi) < 0 \tag{13}$$

или

$$\nu^- \cos(\rho\pi) - \nu^+ < 0, \quad \nu^- - \nu^+ \cos(\rho\pi) > 0. \tag{14}$$

В случае, когда имеют место (13), второе неравенство (12) показывает, что при $\rho_F < \rho$ следует $\lim\limits_{t\to-\infty}[(\ln|F(t)|)/|t|^{\rho_F}] = -\infty$, что невозможно ([10], с. 259; [9], с. 74), поэтому будем считать $\rho_F = \rho$.

Таким образом, справедлива

Теорема 7. *Пусть $\rho \geq 1/2$ и $\nu^- \geq 0$, $\nu^+ \leq 0$, выполняются неравенства* (13) *или* (14)*, тогда общее решение однородной краевой задачи* (4) *дается формулой* (10)*, где $F(z)$ — произвольная, принимающая на L действительные значения, целая функция порядка ρ, удовлетворяющая неравенствам* (12).

Авторы выражают благодарность Ф.Н. Гарифьянову, обратившему их внимание на необходимость выполнения условий $\nu^- \geq 0$, $\nu^+ \leq 0$ для существования ненулевого решения в случае $\rho > 1/2$.

Литература

1. Сандрыгайло И.Е. *О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. – 1974. – № 6. – С. 16–23.
2. Алекна П.Ю. *Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости* // Лит. матем. сб. – 1977. – № 1. – С. 5–12.
3. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.
4. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
5. Говоров Н.В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* – М.: Наука, 1986. – 239 с.
6. Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – 303 с.
7. Чибрикова Л.И., Салехов Л.Г. *К решению краевой задачи Гильберта* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1971. – Вып. 8. – С. 155–175.
8. Салимов Р.Б., Селезнев В.В. *К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1979. – Вып. 16. – С. 149–162.
9. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
10. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций.* Т. 2. – М.: Наука, 1968. – 624 с.

Казанская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступила
12.09.2000