ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 2 (453)

УДК 517.926

*А.В. ДАНЕЕВ, В.А. РУСАНОВ*

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ НАД СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ КОНЕЧНОГО ХАРАКТЕРА

Понятие сильной $(A, B)$-модели, введенное в [1] и развитое в [2]–[5], сопряжено с теоретико-множественными конструкциями Калмана–Месаровича ([6], с. 21; [7], с. 54) применительно к задаче реализации линейной непрерывной конечномерной управляемой системы ([6], с. 353). При этом исследование задачи реализации именно линейной непрерывной системы (дискретный подход см. в [8]) обусловлено не только возможностью в полном объеме использовать богатый арсенал линейной математики, но и тем, что, во-первых, теория математического моделирования подобных систем необходима для локального изучения проблемы реализации нелинейных объектов [9], а во-вторых, аналитический аппарат сильных $(A, B)$-моделей открывает перспективу обобщения в линейной постановке классической детерминированной теории идентификации [3], в частности, на основе использования специальных программных процедур логического вывода (автоматического доказательства теорем) в процессах построения дифференциальных моделей управления (подробности в [2]).

## 1. Постановка задачи

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — вещественное конечномерное банахово пространство, $t_0 < t_1$, $T \widehat{=} [t_0, t_1]$ — отрезок числовой прямой $R$ с мерой Лебега $\mu$ и $L_p(T, \mu, X)$, $1 \le p < \infty$, — банаховы пространства классов эквивалентности $(\mathrm{mod}\,\mu)$ $\mu$-измеримых отображений $\psi : T \to X$, суммируемых по Бохнеру, с нормой $\|\psi\|_p^X \widehat{=} \big(\int_T \|\psi(t)\|_X^p \mu(dt)\big)^{1/p}$. Через $H_{p'}$ $(1 \le p' < \infty)$ обозначим пространство $L_{p'}(T, \mu, R^n) \times L_{p'}(T, \mu, R^m)$ с нормой $\|(\omega_1, \omega_2)\|_{H_{p'}} \widehat{=} [(\|\omega_1\|_{p'}^{R^n})^{p'} + (\|\omega_2\|_{p'}^{R^m})^{p'}]^{1/p'}$, $\omega_1 \in L_{p'}(T, \mu, R^n)$, $\omega_2 \in L_{p'}(T, \mu, R^m)$. Наконец, $AC(T, R^n)$ — линейное многообразие всех абсолютно непрерывных на $T$ функций со значениями в $R^n$ и $\Pi \widehat{=} AC(T, R^n) \times L_{p'}(T, \mu, R^m)$; при этом обозначение конструкции $\Pi$ будет применяться без специального указания на то, что а) множество $\Pi$ — подмножество в $H_{p'}$ (в этом положении точкам из $AC(T, R^n)$ в конструкции $\Pi$ ставятся соответствующие классы эквивалентности из $L_{p'}(T, \mu, R^n)$ и наоборот, если некоторый класс эквивалентности из $L_{p'}(T, \mu, R^n)$ содержит точку из $AC(T, R^n)$, то такая точка единственная), б) топологическая структура в $\Pi$ есть сужение метрической топологии из $H_{p'}$, порожденной нормой $\|\cdot\|_{H_{p'}}$.

Выделим класс линейных многомерных систем, описываемых векторно-матричным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in T, \tag{1}$$

при этом предполагаем, что $x(\cdot) \in AC(T, R^n)$ — решение Каратеодори ($K$-решение), $u(\cdot) \in L_{p'}(T, \mu, R^m)$ — вектор-функция управления, $A(\cdot) \in L_p(T, \mu, \mathcal{L}(R^n, R^n))$, $B(\cdot) \in L_p(T, \mu, \mathcal{L}(R^m, R^n))$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 99-01-01279).

где $p, p' \in (1, \infty)$ и связаны соотношением $1/p + 1/p' = 1$, $\mathcal{L}(R^m, R^n)$ — банахово пространство (с операторной нормой) всех линейных операторов, действующих из $R^m$ в $R^n$; будем допускать нестрогое выражение: "пара $(x, u) \in \Pi$ — $K$-решение системы (1)", если $(x(\cdot), u(\cdot))$ поточечно $\mu$-почти всюду в $T$ удовлетворяет уравнению (1) для некоторой пары операторов $(A(\cdot), B(\cdot)) \in L_p(T, \mu, \mathcal{L}(R^n, R^n)) \times L_p(T, \mu, \mathcal{L}(R^m, R^n))$, при этом саму пару $(A(\cdot), B(\cdot))$ будем называть $(A, B)$-моделью [1].

**Определение 1** ([1]). Подмножество $P \subset \Pi$ обладает

— свойством обыкновенной линейно-дифференциальной совместимости (ОЛД-совместимости), если либо $P = \emptyset$, либо существует такая система (1), что $\operatorname{Span} P$ содержится в классе ее $K$-решений (тогда $P$ назовем ОЛД-совместимым множеством);

— свойством распределенной линейно-дифференциальной совместимости (РЛД-совместимости), когда либо $P = \emptyset$, либо каждое одноэлементное подмножество из $\operatorname{Span} P$ является ОЛД-совместимым множеством (тогда $P$ назовем РЛД-совместимым множеством).

Свойство РЛД-совместимости есть свойство конечного характера ([10], с. 28) (чего нельзя сказать в отношении ОЛД-совместимости), что показывает

**Утверждение 1.** *Пусть $N$ — произвольное фиксированное подмножество из $\Pi$. Тогда свойство РЛД-совместимости по отношению к $N$ есть свойство конечного характера.*

**Определение 2** ([5]). Пусть $N$ — произвольное фиксированное подмножество из $\Pi$ и пусть существуют $P_*$, $P_\#$ (обоюдно или хотя бы $P_\#$) — непустые максимальные, при упорядочении относительно теоретико-множественного включения, подмножества из $N$, обладающие соответственно свойством ОЛД-совместимости и свойством РЛД-совместимости. Тогда линейные пространства, натянутые на $P_*$ и $P_\#$, назовем соответственно обыкновенным пластом над $N$ и распределенным пластом над $N$, и если какой-либо из них содержит множество $N$, то такой пласт будем называть однородным.

Может случиться, что над $N$ существует как обыкновенный, так и распределенный пласт (при этом они могут не совпадать), или существует распределенный пласт, но отсутствует обыкновенный ([5], пример 1); наконец, всего этого может не быть! Соотношения между этими различными понятиями важны, поскольку наличие над $N$ обыкновенного (однородного) пласта геометрически равносильно существованию сильной (неопровергнутой) $(A, B)$-модели [1]. Далее, всякое подмножество $N \subset \Pi$ в соответствии с утверждением 1 и леммой Тейхмюллера–Тьюки ([10], с. 28) либо не содержит ни одного непустого подмножества со свойством РЛД-совместимости (а значит, и ОЛД-совместимости), либо над $N$ существует распределенный пласт (возможно, не единственный); что же касается вопроса о существовании обыкновенного пласта над $N$, то ответ на него не столь однозначный ([1]–[5]), в частности, как показано в [5], его существование связано с анализом процедуры индуктивного одноэлементного расширения ОЛД-совместимых множеств. В связи с последним замечанием интерес представляют следующие задачи:

— для непустых ОЛД-совместимых подмножеств $P^*$, $\{(x^*, u^*)\} \subset \Pi$, где $P^*$ не более чем счетно и $(x^*, u^*) \notin P^*$, определить аналитические условия, когда $P^* \cup \{(x^*, u^*)\}$ является ОЛД-совместимым множеством;

— показать, что в классе "пассивных" траекторий ($u \equiv 0$) такие характеристики пластов над счетным множеством $N \subset \Pi$, как распределенный и обыкновенный, эквивалентны.

## 2. Вспомогательные построения

Пусть множество наблюдаемых динамических процессов (множество наблюдений) $N$ — произвольное непустое не более чем счетное подмножество в $\Pi$ и пусть $P_N$ — множество всех элементов из $N$, обладающих (как одноэлементные подмножества в П) свойством ОЛД-совместимости; при этом $P_N$ будем называть характеристическим множеством множества наблюдений $N$ [1].

Условимся отличать в обозначениях элемент $(x, u)$ из $P_N$ как класс эквивалентности (т. е. элемент пространства $H_{p'}$) от конкретного представителя этого класса $(x(\cdot), u(\cdot))$.

Пусть $P^* \subset \operatorname{Span} P_N$ — некоторое линейное ОЛД-совместимое множество. Обозначим через $E^*$ произвольный (но фиксированный и пронумерованный) алгебраический базис в $P^*$ и пусть $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ — заданный элемент из $P_N$. Очевидно, в любой фиксированной точке $t \in T$ возможно разложение $(x^*(t), u^*(t))$ как вектора из $R^{n+m}$ на его проекцию в $\operatorname{Span}\{(x(t), u(t))_i : (x, u)_i \in E^*,\ i = 1, 2, \dots\}$, которую обозначим через $(x^*_-(t), u^*_-(t))$, и дополнение $(x^*_\perp(t), u^*_\perp(t)) \widehat{=} (x^*(t), u^*(t)) - (x^*_-(t), u^*_-(t))$, которое, очевидно, ортогонально (символ $\perp$) к $\operatorname{Span}\{(x(t), u(t))_i : (x, u)_i \in E^*,\ i = 1, 2, \dots\}$.

**Лемма 1.** *Представление* $(x^*, u^*) = (x^*_-, u^*_-) + (x^*_\perp, u^*_\perp)$ *не зависит от* $E^*$ (*т. е. от выбора алгебраического базиса в* $P^*$).

**Лемма 2.** *Пусть* $(x^*, u^*) \in P_N$. *Тогда* $(x^*_-, u^*_-), (x^*_\perp, u^*_\perp) \in H_{p'}$.

Пусть $F$ — семейство классов эквивалентности всех характеристических функций на элементах $\sigma$-алгебры $\mathfrak{S}$ $\mu$-измеримых подмножеств из $T$. Для функциональных множеств $\Phi_E \widehat{=} \{\chi(x, u)_i : \chi \in F,\ (x, u)_i \in E^*,\ i = 1, 2, \dots\}$ и $\Phi_{(x^*_\perp, u^*_\perp)} \widehat{=} \{\chi(x^*_\perp, u^*_\perp) : \chi \in F\}$ через $\Omega_k$ и $\Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ обозначим замыкания в пространстве $H_{p'}$ множеств $\operatorname{Span}\Phi_E$ и $\operatorname{Span}\Phi_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ соответственно, через $\Lambda_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ — семейство всех сигнальных функций [11], отвечающих элементу $(x^*_\perp, u^*_\perp) \in H_{p'}$, т. е. $\Lambda_{(x^*_\perp, u^*_\perp)} \widehat{=} L_{p'}(T, \nu^*_\perp, R)$, где $\nu^*_\perp \widehat{=} \int(\|x^*_\perp(t)\|^{p'}_{R^n} + \|u^*_\perp(t)\|^{p'}_{R^m})\mu(dt)$.

**Лемма 3.** *Пусть* $\Omega_E$ *и* $\Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ *— подпространства из* $H_{p'}$, *введенные выше. Тогда* а) $\Omega_E \cap \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)} = \{0\}$; б) $\Omega_E + \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ *замкнуто в* $H_{p'}$.

**Доказательство.** а) Достаточно убедиться в справедливости утверждения

$$(\forall \omega \neq 0,\ \omega \in \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)})\ (\exists \omega^* \in L_p(T, \mu, R^n) \times L_p(T, \mu, R^m)) :$$
$$(\forall \omega' \in \operatorname{Span}\Phi_E)\ (\{\omega^*, \omega\} \neq 0 \,\&\, \{\omega^*, \omega'\} = 0),$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ означает каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между пространствами $L_{p'}(T, \mu, R^n) \times L_{p'}(T, \mu, R^m)$ и $L_p(T, \mu, R^n) \times L_p(T, \mu, R^m)$.

В силу теорем 1 и 4 из [11] аналитическая структура пространства $\Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ имеет вид $\Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)} = \{\lambda(x^*_\perp, u^*_\perp) : \lambda \in \Lambda_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}\}$. Пусть $\omega$ — произвольно фиксированный ненулевой элемент из $\Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$. Тогда (как только что установлено) $\omega = \lambda(x^*_\perp, u^*_\perp)$ для некоторой функции $\lambda \in \Lambda_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$. Обозначим через $S_+$ и $S_-$ множества, соответственно равные $\{t \in T : \lambda(t) \geq 0\}$ и $\{t \in T : \lambda(t) < 0\}$, и пусть $\chi_+$ и $\chi_-$ — их характеристические функции. Теперь рассмотрим вектор-функцию $\phi_{(x^*_\perp, u^*_\perp)} : T \to R^{n+m}$ вида

$$\phi_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}(t) \widehat{=} \begin{cases} (x^*_\perp(t), u^*_\perp(t))\langle(x^*_\perp(t), u^*_\perp(t)), (x^*_\perp(t), u^*_\perp(t))\rangle^{-1/2}, & (x^*_\perp(t), u^*_\perp(t)) \neq 0; \\ 0, & (x^*_\perp(t), u^*_\perp(t)) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, $(\chi_+ - \chi_-)\phi_{(x^*_\perp, u^*_\perp)} \in L_p(T, \mu, R^n) \times L_p(T, \mu, R^m)$ и $\{(\chi_+ - \chi_-)\phi_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}, \omega\} > 0$. С другой стороны, $\forall (x, u)_i \in E^*$ $(i = 1, 2, \dots)$ в силу конструкции $(x^*_\perp, u^*_\perp)$ для почти всех $t$ из $T$ будет $\langle(x(t), u(t))_i, (x^*_\perp(t), u^*_\perp(t))\rangle = 0$, откуда, используя интегральную форму аналитического представления для $\{\cdot, \cdot\}$, несложно убедиться, что $\forall \omega' \in \operatorname{Span}\Phi_E$ будет $\{(\chi_+ - \chi_-)\phi_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}, \omega'\} = 0$.

б) Наряду с пространством $\Omega_E + \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ с нормой, индуцированной из пространства $H_{p'}$, к которому относится формулировка п. б), рассмотрим пространство $\Omega_E \times \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ с нормой $(\|\omega'\|^{p'}_{H_{p'}} + \|\omega''\|^{p'}_{H_{p'}})^{1/p'}$, $\omega' \in \Omega_E$, $\omega'' \in \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$. Очевидно, пространство $\Omega_E \times \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ банахово. Обозначим через $V$ взаимно однозначное соответствие между пространствами $\Omega_E \times \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ и $\Omega_E + \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$, организованное по правилу $(\omega', \omega'') \to \omega' + \omega''$, которое, очевидно, будет линейным и непрерывным. Если будет непрерывным также и оператор $V^{-1}$, то утверждение п. б) вытекает из следствия теоремы 1 ([12], с. 450), причем непрерывность оператора $V^{-1}$ в силу теоремы 2 ([12], с. 245) можно заменить непрерывностью его сужения $V^{-1} \mid (\operatorname{Span}\Phi_E + \operatorname{Span}\Phi_{(x^*_\perp, u^*_\perp)})$. Покажем это. Пусть $(\omega'_1, \omega'_2) \in \operatorname{Span}\Phi_E$, $(\omega''_1, \omega''_2) \in \operatorname{Span}\Phi_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$, где $\omega'_1, \omega''_2 \in L_{p'}(T, \mu, R^n)$ и $\omega''_1, \omega'_2 \in L_{p'}(T, \mu, R^m)$. Тогда в силу эквивалентности норм в $R^k$ ($k = n+m$, $k = 2$) почти всюду в $T$ справедлива (с учетом $(\omega'_1(t), \omega'_2(t)) \perp (\omega''_1(t), \omega''_2(t))$ в $R^{n+m}$) для соответствующих (сменам норм в $R^k$) констант $c_i > 0$, $i = \overline{1,4}$, следующая цепочка отношений:

$$
\begin{gathered}
\|\omega'_1(t) + \omega''_1(t)\|^{p'}_{R^n} + \|\omega'_2(t) + \omega''_2(t)\|^{p'}_{R^m} \geq \\
\geq c_1(\langle(\omega'_1(t) + \omega''_1(t),\ \omega'_2(t) + \omega''_2(t)),\ (\omega'_1(t) + \omega''_1(t),\ \omega'_2(t) + \omega''_2(t))\rangle^{1/2})^{p'} - \\
- c_1(\langle(\omega'_1(t), \omega'_2(t)),\ (\omega'_1(t), \omega'_2(t))\rangle + \langle(\omega''_1(t), \omega''_2(t)),\ (\omega''_1(t), \omega''_2(t))\rangle)^{1/2})^{p'} \geq \\
\geq c_2(\langle(\omega'_1(t), \omega'_2(t)),\ (\omega'_1(t), \omega'_2(t))\rangle^{1/2} + \langle(\omega''_1(t), \omega''_2(t)),\ (\omega''_1(t), \omega''_2(t))\rangle^{1/2})^{p'} \geq \\
\geq c_3((\|\omega'_1(t)\|^{p'}_{R^n} + \|\omega'_2(t)\|^{p'}_{R^m})^{1/p'} + (\|\omega''_1(t)\|^{p'}_{R^n} + \|\omega''_2(t)\|^{p'}_{R^m})^{1/p'})^{p'} \geq \\
\geq c_4(\|\omega'_1(t)\|^{p'}_{R^n} + \|\omega'_2(t)\|^{p'}_{R^m} + \|\omega''_1(t)\|^{p'}_{R^n} + \|\omega''_2(t)\|^{p'}_{R^m}),
\end{gathered}
$$

откуда с очевидностью следует непрерывность оператора $V^{-1} \mid (\operatorname{Span}\Phi_E + \operatorname{Span}\Phi_{(x^*_\perp, u^*_\perp)})$. $\square$

Везде далее для двух любых замкнутых подпространств из $H_{p'}$ таких, что их пересечение является нуль-подпространством, а векторная сумма замкнута в $H_{p'}$, условимся знак их векторного сложения обозначать через $\oplus$.

## 3. Теорема о расширении ОЛД-совместимого множества

Пусть $P^* \subset \operatorname{Span} P_N$ является линейным ОЛД-совместимым множеством, $(x^*, u^*) \in P_N$, $(x^*, u^*) \notin P^*$ и пусть $\Omega_{(x^*,u^*)}$ — замыкание в пространстве $H_{p'}$ множества $\operatorname{Span}\{\chi(x^*, u^*) : \chi \in F\}$. Выясним, при каких условиях линейное множество $\Omega_E + \Omega_{(x^*,u^*)}$ замкнуто в топологии пространства $H_{p'}$. Оказывается, что при этих условиях и при дополнительных условиях алгебраического характера ОЛД-совместимое множество $P^*$ расширяемо до ОЛД-совместимого множества $P^* \cup \{(x^*, u^*)\}$. Очевидно, что на этом пути одним из подходов является определение характеристического признака для равенства $\Omega_E + \Omega_{(x^*,u^*)} = \Omega_E \oplus \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$. Эту задачу решают две следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Для подпространств $\Omega_E$ и $\Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ пространства $H_{p'}$ справедливо включение $\Omega_E \oplus \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)} \supset \Omega_E + \Omega_{(x^*,u^*)}$.*

**Доказательство.** В соответствии с теоремой 4 из [11] произвольный элемент $\omega$ пространства $\Omega_{(x^*,u^*)}$ имеет вид $\omega = \lambda^*(x^*, u^*) = \lambda^*((x^*_-, u^*_-) + (x^*_\perp, u^*_\perp))$, $\lambda^* \in \Lambda_{(x^*,u^*)}$, где $\Lambda_{(x^*,u^*)}$ — семейство всех сигнальных функций характеристического элемента $(x^*, u^*)$, т. е. $\Lambda_{(x^*,u^*)} \widehat{=} L_{p'}(T, \nu^{\#}, R)$, где $\nu^{\#} \widehat{=} \int(\|x^*(t)\|^{p'}_{R^n} + \|u^*(t)\|^{p'}_{R^m})\mu(dt)$. Нетрудно установить, что справедливо включение $\Lambda_{(x^*,u^*)} \subset \Lambda_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ и, следовательно, $\lambda^*(x^*_\perp, u^*_\perp) \in \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$ — на основании аналитической структуры $\Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$, приведенной в доказательстве п. а) леммы 3. Таким образом, в силу произвольности выбора $\omega$ теорема 1 будет справедливой, если покажем, что $\lambda^*(x^*_-, u^*_-) \in \Omega_E$. Для доказательства последнего включения используем стандартный подход в задачах аппроксимации, а именно, покажем, что $\{\omega^*, (x^*_-, u^*_-)\} = 0$ для всякого $\omega^* \in L_p(T, \mu, R^n) \times L_p(T, \mu, R^m)$ такого, что $\forall \omega \in \operatorname{Span}\Phi_E$ $\{\omega^*, \omega\} = 0$. Очевидно, для этого достаточно установить, что в $R^{n+m}$ $\omega^*(y) \perp \operatorname{Span}\{(x(t), u(t))_i : (x,u)_i \in E^*,\ i = 1, 2, \dots\}$ почти всюду в $T$.

Пусть $\omega^* \in L_p(T, \mu, R^n) \times L_p(T, \mu, R^m)$ и пусть $\forall \omega \in \operatorname{Span}\Phi_E$ $\{\omega^*, \omega\} = 0$. Разложим вектор-функцию $\omega^*(\cdot)$ в каждой точке $t \in T$ в сумму $\omega^*_-(t) + \omega^*_\perp(t) \widehat{=} \omega^*(t)$, где $\omega^*_-(t) \in \operatorname{Span}\{(x(t), u(t))_i : (x,u)_i \in E^*\} \perp \omega^*_\perp(t)$. Тогда, если $\omega^*_- \neq 0$, то существует $S^* \in \mathfrak{S}$, $\mu(S^*) > 0$ и $\forall t \in S^*$ $\omega^*_0(t) \neq 0$, при этом $\omega^*_- \in L_p(T, \mu, R^n) \times L_p(T, \mu, R^m)$.

Ясно, что в $E^*$ существует пара $(x,u)_i$ такая, что $(x(t),u(t))_i \neq 0$ почти всюду в $S^*$ (в противном случае $\operatorname{Span}\{(x(t),u(t))_i : (x,u)_i \in E^*,\ i=1,2,\dots\} = \{0\}$ почти всюду в $S^*$ и, следовательно, $\omega^*_- = 0$). Обозначим через $S^*_+$ и $S^*_-$ подмножества из $S^*$, соответственно равные $\{t \in S^* : \{\omega^*_-(t),\ (x(t),u(t))_i\} \geq 0\}$ и $\{t \in S^* : \{\omega^*_-(t),\ (x(t),u(t))_i\} < 0\}$. Очевидно, хотя бы одно из подмножеств $S^*_+$ или $S^*_-$ имеет ненулевую меру. Пусть таким подмножеством будет $S^*_+$. Тогда $\chi_{S^*_+}(x,u)_i \in \operatorname{Span}\Phi_E$ и $\{\omega^*_-(t),\ \chi_{S^*_+}(x,u)_i\} > 0$, где $\chi_{E^*_+}(\cdot)$ — характеристическая функция подмножества $S_+$. Ясно, что $\{\omega(t),\ \chi_{S^*_+}(x,u)_i\} > 0$, а это противоречит условиям, определяющим конструкцию $\omega^*$. $\square$

**Теорема 2.** *Пусть* $T_0 \hat{=} \{t \in T : (x^*_\perp(t), u^*_\perp(t)) = 0\}$ *и* $\chi_-(\cdot)$ *— характеристическая функция множества* $T \setminus T_0$*. Тогда* $\Omega_E \oplus \Omega_{(x^*_\perp,u^*_\perp)} \subset \Omega_e + \Omega_{(x^*,u^*)}$*, если и только если* $\Lambda_{(x^*_\perp,u^*_\perp)} \subset \chi_-\Lambda_{(x^*,u^*)}$.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть $\lambda_\omega \in \Lambda_{(x^*_\perp,u^*_\perp)}$ и пусть $\omega \hat{=} \lambda_\omega(x^*_\perp,u^*_\perp)$, а значит, $\omega \in \Omega_E \oplus \Omega_{(x^*_\perp,u^*_\perp)} \subset \Omega_E + \Omega_{(x^*,u^*)}$. Тогда, с одной стороны, вектор $\omega$ однозначно представим в виде $\omega = \omega' + \lambda_\omega(x^*_\perp,u^*_\perp)$, где $\omega' = 0 \in \Omega_E$, а с другой, — $\omega = \omega'' + \lambda(x^*,u^*) = \omega'' + \lambda(x^*_-,u^*_-) + \lambda(x^*_\perp,u^*_\perp)$, где $\omega'' \in \Omega_E$, $\lambda \in \Lambda_{(x^*,u^*)}$. Из доказательства теоремы 1 следует $\lambda(x^*_-,u^*_-) \in \Omega_E$ и $\lambda(x^*_\perp,u^*_\perp) \in \Omega_{(x^*_\perp,u^*_\perp)}$, откуда $\omega' = \omega'' + \lambda(x^*_-,u^*_-)$ и $\lambda_\omega(x^*_\perp,u^*_\perp) = \lambda(x^*_\perp,u^*_\perp)$. Таким образом, с учетом линейной изометрии между банаховыми пространствами $\Lambda_{(x^*_\perp,u^*_\perp)}$ и $\Omega_{(x^*_\perp,u^*_\perp)}$ будет $\lambda_\omega = \chi_-\lambda$ и (в силу произвольности выбора $\lambda_\omega$) $\Lambda_{(x^*_\perp,u^*_\perp)} = \chi_-\Lambda_{(x^*,u^*)}$.

**Достаточность.** Пусть $\omega \in \Omega_E \oplus \Omega_{(x^*_\perp,u^*_\perp)}$. Тогда имеем $\omega = \omega' + \lambda_\omega(x^*_\perp,u^*_\perp)$, где $\omega' \in \Omega_E$, $\lambda_\omega \in \Lambda_{(x^*_\perp,u^*_\perp)}$. Так как $\lambda_\omega \in \chi_-\Lambda_{(x^*,u^*)} \subset \Lambda_{(x^*,u^*)}$, то $\omega' + \lambda_\omega(x^*_\perp,u^*_\perp) = \omega' + \lambda_\omega(x^*_\perp,u^*_\perp) + \lambda_\omega(x^*_-,u^*_-) - \lambda_\omega(x^*_-,u^*_-) = \omega' - \lambda_\omega(x^*_-,u^*_-) + \lambda_\omega(x^*,u^*)$ и, следовательно, $\omega \in \Omega_E + \Omega_{(x^*,u^*)}$ — на основании $\omega' - \lambda_\omega(x^*_-,u^*_-) \in \Omega_E$ и $\lambda_\omega(x^*,u^*) \in \Omega_{(x^*,u^*)}$. $\square$

**Следствие 1.** Равенство $\Omega_E \oplus \Omega_{(x^*_\perp,u^*_\perp)} = \Omega_E + \Omega_{(x^*,u^*)}$ имеет место, если и только если $\Lambda_{(x^*_\perp,u^*_\perp)} = \chi_-\Lambda_{(x^*,u^*)}$.

**Пример 1.** Пусть $n = m = 1$, $p = p' = 2$, $T = [0,1]$, $N = \{(e^t,0),(e^t + t^2/2, t)\}$, $P^* = \{\alpha(e^t,0) : \alpha \in R\}$, $(x^*,u^*) = (e^t + t^2/2, t)$; простую проверку того, что $P^*$ является ОЛД-совместимым множеством (см. теорему 2 [1]), и $(x^*,u^*) \in P_N$ (см. теорему 1 [1]), опускаем. Тогда $\chi_-\Lambda_{(x^*,u^*)} = L_2(T,\mu,R)$ в то время как $\Lambda_{(x^*_\perp,u^*_\perp)} = L_2(T,\nu,R)$, где $\nu = \int t^2\mu(dt)$. Ясно, что $1/t \in \Lambda_{(x^*_\perp,u^*_\perp)}$, но $1/t \in L_2(T,\mu,R)$. Таким образом, $\Lambda_{(x^*_\perp,u^*_\perp)} \not\subset \chi_-\Lambda_{(x^*,u^*)}$ и, следовательно, $\Omega_E \oplus \Omega_{(x^*_\perp,u^*_\perp)} \not\subset \Omega_E + \Omega_{(x^*,u^*)}$.

Описание условий, при которых такие характеристики пласта над множеством наблюдений $N$, как обыкновенный и распределенный, совпадают, может быть основано на свойстве расширяемости ОЛД-совместимого множества до нового с аналогичным свойством. Одну из аналитических конструкций такого расширения выражает

**Теорема 3.** *Пусть* $P^* \subset \operatorname{Span} P_N$ *— линейное ОЛД-совместимое множество,* $E^* \hat{=} \{(x,u)_i\}_{i=1,2,\dots}$ *— его алгебраический базис,* $(x^*,u^*) \in P_N$*,* $\alpha_i : T \to R$ $(i = 1,2,\dots)$ *— функции, определенные в соответствии с представлением* $(x^*_-(t),u^*_-(t)) = \sum\limits_i \alpha_i(t)(x(t),u(t))_i$*, где в фиксированной точке* $t \in T$ *для каждого* $i$ *все* $\alpha_i(t)$*, за исключением конечного числа, равного* $\dim\operatorname{Span}\{(x(t),u(t))_i : (x,u)_i \in E^*,\ i = 1,2,\dots\}$*, равны нулю, и пусть* $T_0 \hat{=} \{t \in T : (x^*_\perp(t),u^*_\perp(t)) = 0\}$*. Тогда* $\{(x^*,u^*)\} \cup P^*$ *является ОЛД-совместимым множеством, если имеют место следующие два свойства*:

а) $\Lambda_{(x^*_\perp,u^*_\perp)} \subset \chi_-\Lambda_{(x^*,u^*)}$*, где* $\chi_-(\cdot)$ *— характеристическая функция множества* $T \setminus T_0$*;*

б) *почти всюду в* $T_0$ *справедливо равенство* $\dot{x}^*(t) = \sum\limits_i \alpha_i(t)\dot{x}_{(i)}(t)$*, где* $x_{(i)}$ *— первая компонента пары* $(x,u)_i \in E^*$.

**Доказательство.** Пусть множества $S_+ = S \cap T_0$ и $S_- = S \setminus T_0$ для произвольного, но фиксированного $S \in \mathfrak{S}$. Через $\chi_+(\cdot)$ обозначим характеристическую функцию множества $T_0$. Кроме того, заметим, что для всякой пары $(x_0, u_0) \in \mathrm{Span}\{\{(x^*, u^*)\} \cup P^*\}$ при некотором целом $k$ имеет место $(x_0, u_0) = (x^0, u^0) + \alpha_0(x^*, u^*)$, где $(x^0, u^0) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i^0 (x, u)_i$, $\alpha_0, \alpha_i^0 \in R$, $(x, u)_i \in E^*$, $i = \overline{1, k}$.

Тогда, с одной стороны, в силу п. а) теоремы 3 и следствия 1 будет $\Omega_E + \Omega_{(x^*, u^*)} = \Omega_E \oplus \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)} = \chi_+(\Omega_E \oplus \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}) \oplus \chi_-(\Omega_E \oplus \Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}) = \chi_+\Omega_E \oplus (\chi_-\Omega_E \oplus \chi_-\Omega_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}) = \chi_+\Omega_E \oplus (\chi_-\Omega_E \oplus \chi_-\Omega_{(x^*, u^*)})$, т. е. $\chi_-\Omega_E + \chi_-\Omega_{(x^*, u^*)}$ — замкнутое подпространство пространства $H_{p'}$. С другой стороны, в соответствии с теоремой 2 [1] $\nu_-^0(S) \leq (\nu_+^0(S))^{1/p}(\nu^0(S))^{1/p'}$, $\nu_-^*(S) \leq (\nu_+^*(S))^{1/p}(\nu^*(S))^{1/p'}$, где

$$
\begin{aligned}
\nu_-^0(S) &\widehat{=} \int_S \|\dot{x}^0(t)\|_{r^n} \mu(dt), \\
\nu^0(S) &\widehat{=} \int_S (\|x^0(t)\|^{p'}_{R^n} + \|u^0(t)\|^{p'}_{R^m}) \mu(dt), \\
\nu_-^*(S) &\widehat{=} \int_S \|\alpha_0 \dot{x}^*(t)\|_{R^n} \mu(dt), \\
\nu^*(S) &\widehat{=} \int_S (\|\alpha_0 x^*(t)\|^{p'}_{R^n} + \|\alpha_0 u^*(t)\|^{p'}_{R^m}) \mu(dt);
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$\nu_+^0$ и $\nu_+^*$ — некоторые положительные меры, абсолютно непрерывные относительно $\mu$ и не зависящие от выбора $S$ и $(x_0, u_0)$.

В силу теоремы 2 [1], а также неравенства Гёльдера справедливость теоремы 3 будет установлена, если покажем, что для некоторой положительной меры $\nu_+$, абсолютно непрерывной относительно $\mu$ и не зависящей от выбора $S$ и $(x_0, u_0)$, имеет место $\nu_-(S_+) \leq (\nu_+(S_+))^{1/p}(\nu(S_+))^{1/p'}$, $\nu_-(S_-) \leq (\nu_+(S_-))^{1/p}(\nu(S_-))^{1/p'}$,

$$
\begin{aligned}
\nu_-(S) &\widehat{=} \int_S \|\dot{x}_0(t)\|_{R^n} \mu(dt), \\
\nu(S) &\widehat{=} \int_S (\|x_0(t)\|^{p'}_{R^n} + \|u_0(t)\|^{p'}_{R^m}) \mu(dt).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Пусть пространство $\chi_-(\Omega_E \times \Omega_{(x^*, u^*)})$ наделено нормой $(\|\chi_-\omega'\|^{p'}_{H_{p'}} + \|\chi_-\omega''\|^{p'}_{H_{p'}})^{1/p'}$, $\omega' \in \Omega_E$, $\omega'' \in \Omega_{(x^*, u^*)}$; ясно, что это пространство будет банаховым. Обозначим через $V$ взаимно однозначное соответствие между пространством $\chi_-(\Omega_E \times \Omega_{(x^*, u^*)})$ и подпространством $\chi_-\Omega_E \oplus \chi_-\Omega_{(x^*, u^*)}$ пространства $H_{p'}$ (с нормой, индуцированной из $H_{p'}$), организованное по правилу $(\chi_-\omega', \chi_-\omega'') \to \chi_-\omega' + \chi_-\omega''$, которое будет линейным и непрерывным. На основании теоремы Банаха об обратном операторе ([12], с. 225) заключаем, что непрерывен также и оператор $V^{-1}$. Пусть $c^*$ — его норма и $c \widehat{=} \max[1, c^*]$.

Покажем, что мера $\nu_+ \widehat{=} c^p(\nu_+^0 + \nu_+^*)$ отвечает выдвинутому выше требованию для подмножества $S_-$. С учетом формул (2) и (3) имеем

$$
\begin{aligned}
\nu_-(S_-) = \int_{S_-} \|\dot{x}^0(t) + \alpha_0 \dot{x}^*(t)\|_{R^n} \mu(dt) &\leq \int_{S_-} \|\dot{x}^0(t)\|_{R^n} \mu(dt) + \int_{S_-} \|\alpha_0 \dot{x}^*(t)\|_{R^n} \mu(dt) \leq \\
&\leq (\nu_+^0(S_-))^{1/p}(\nu^0(S_-))^{1/p'} + (\nu_+^*(S_-))^{1/p}(\nu^*(S_-))^{1/p'} \leq \\
&\leq c(\nu_+^0(S_-) + \nu_+^*(S_-))^{1/p}(\nu(S_-))^{1/p'}(\nu_+(S_-))^{1/p}(\nu(S_-))^{1/p'}.
\end{aligned}
$$

Далее, покажем, что мера $\nu_+ = c^p(\nu_+^0 + \nu_+^*)$ обладает конструкцией, отвечающей аналогичному требованию и для подмножества $S_+$. С этой целью конкретизируем $\nu_+^0$ аналитическим представлением $\nu_+^0(S) \widehat{=} \int\limits_S (\|A(t)\|^p_{\mathcal{L}(R^n, R^n)} + \|B(t)\|^p_{\mathcal{L}(R^m, R^n)}) \mu(dt)$, где $(A(\cdot), B(\cdot))$ — $(A, B)$-модель, отвечающая ОЛД-совместимому множеству $P^*$. Теперь с учетом свойства б) из условий теоремы 3 имеем

$$\nu_-(S_+) = \int_{S_+} \|\dot{x}^0(t) + \alpha_0 \dot{x}^*(t)\|_{R^n}\mu(dt) = \int_{S_+} \left\|\dot{x}^0(t) + \alpha_0 \sum_i \alpha_i(t)\dot{x}_{(i)}(t)\right\|_{R^n}\mu(dt) =$$

$$= \int_{S_+} \left\|A(t)x^0(t) + B(t)u^0(t) + \alpha_0 \sum_i \alpha_i(t)A(t)x_{(i)}(t) + \alpha_0 \sum_i \alpha_i(t)B(t)u_{(i)}\right\|_{R^n}\mu(dt) =$$

$$= \int_{S_+} \|A(t)x_0(t) + B(t)u_0(t)\|_{R^n}\mu(dt) \le$$

$$\le \left(\int_{S_+} \|A(t)\|^p_{\mathcal{L}(R^n,R^n)}\mu(dt)\right)^{1/p} \left(\int_{S_+} \|x_0(t)\|^{p'}_{R^n}\mu(dt)\right)^{1/p'} +$$

$$+ \left(\int_{S_+} \|B(t)\|^p_{\mathcal{L}(R^m,R^n)}\mu(dt)\right)^{1/p} \left(\int_{S_+} \|u_0(t)\|^{p'}_{R^m}\mu(dt)\right)^{1/p'} \le$$

$$\le \left(\int_{S_+} (\|A(t)\|^p_{\mathcal{L}(R^n,R^n)} + \|B(t)\|^p_{\mathcal{L}(R^m,R^n)})\mu(dt)\right)^{1/p} \left(\int_{S_+} (\|x_0(t)\|^{p'}_{R^n} + \|u_0(t)\|^{p'}_{R^m})\mu(dt)\right)^{1/p'} \le$$

$$\le (\nu_+(S_+))^{1/p}(\nu(S_+))^{1/p'}. \quad \square$$

Теорема 3 в общем случае не имеет обращения, что показывает

**Пример 2.** В конструкции примера 1 условие б) теоремы 3 выполнено, тогда как условие а) ходом рассуждений примера 1 опровергается. При этом $\mathrm{Span}\{P^* \cup \{(x^*, u^*)\}\}$ обладает свойством ОЛД-совместимости, т. к. множество $P^* \cup \{(x^*, u^*)\}$ реализуется дифференциальной системой вида $\dot{x} = x + u$ (проверяется прямым вычислением).

## 4. Некоторые следствия для множества наблюдений со специальной структурой

В этом разделе обратимся к изучению свойств пластов над счетным множеством наблюдений $N$ специальной структуры, а именно, с характеристическим множеством $P_N$, состоящим исключительно из "пассивных" траекторий, т. е. $(x, u) \in P_N \Rightarrow u \equiv 0$.

**Утверждение 2.** *Пусть имеет место посылка теоремы* 3 *при условии, что $P_N$ состоит из пассивных траекторий. Тогда для наличия свойства ОЛД-совместимости для $P^* \cup \{(x^*, u^*)\}$ необходимо выполнение условий* а) *и* б) *из формулировки теоремы* 3.

**Доказательство.** Подтвердим справедливость условия а), т. к. условие б) очевидно. Пусть $\mu(T \setminus T_0) \ne 0$. Тогда $T \setminus T_0 = T$, т. к. в противном случае существует момент $t^0 \in T$, при котором $x^*(t^0) = \sum_i \alpha_i x_{(i)}(t^0)$ (где все константы $\alpha_i$, за исключением конечного числа, равны нулю), откуда $x^*(\cdot) = \sum_i \alpha_i x_{(i)}(\cdot)$ в силу единственности решения системы (1) с $(A, B)$-моделью, отвечающей множеству $\mathrm{Span}\{P^* \cup \{(x^*, 0)\}\}$, и проходящего в $t^0$ через точку $x^*(t^0)$. Следовательно, существуют такие константы $c_j > 0$, $j = \overline{1,4}$, что $\inf_{t \in T} \|x^*(t)\|^{p'}_{R^n} = c_1$, $\sup_{t \in T} \|x^*(t)\|^{p'}_{R^n} = c_2$, $\inf_{t \in T} \|x^*_\perp(t)\|^{p'}_{R^n} = c_3$, $\sup_{t \in T} \|x^*_\perp(t)\|^{p'}_{R^n} = c_4$ и, значит, совпадают классы суммируемых с $p'$-степенью на $T$ функций соответственно по мерам $\nu' = \int \|x^*(t)\|^{p'}_{R^n}\mu(dt)$ и $\nu'' = \int \|x^*_\perp(t)\|^{p'}_{R^n}\mu(dt)$. Таким образом, $\Lambda_{(x^*, u^*)} = \Lambda_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$. $\square$

**Утверждение 3.** *Если счетное множество $N \subset \Pi$ таково, что включение $(x, u) \in P_N$, где $P_N$ — характеристическое множество множества наблюдений $N$, влечет $u \equiv 0$, то всякое линейное множество $P \subset \mathrm{Span}\, P_N$, обладающее свойством РЛД-совместимости, является ОЛД-совместимым множеством.*

**Доказательство.** Пусть $P$ — множество из формулировки утверждения 3 и пусть $E_p$ — его алгебраический базис. Покажем вначале, что $\dim P \le n$. С этой целью достаточно установить, что для любой системы $\{(x,0)_i : (x,0)_i \in P,\ x_{(i)} \not\equiv 0,\ i=\overline{1,n+1}\}$ существует набор констант $\alpha_i$, $i=\overline{1,n+1}$, таких, что $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_{(i)}(\cdot) = 0$, где некоторые из $\alpha_i$ не равны нулю.

Пусть $\{(x,0)\}_{i=\overline{1,n+1}}$ — такая система. Тогда существует точка $t^0 \in T$, в которой имеет место $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_{(i)}(t^0) = 0$, где не все $\alpha_i$ равны нулю. Так как любая линейная комбинация элементов из $P$ обладает ОЛД-свойством, то для $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i (x,0)_i$ существует дифференциальная система (1), обладающая решением $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i (x,0)_i$ и, следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_{(i)}(\cdot) = 0$ в силу единственности решения такой системы, а также равенства $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_{(i)}(t^0) = 0$. Таким образом, $\dim P \le n$.

Теперь покажем, что $P$ — ОЛД-совместимое множество. Доказательство данного включения проведем по индукции. Пусть $M_k$ означает следующее утверждение: если $E_k \subset E_p$, $\dim \operatorname{Span} E_k = k$, то $\operatorname{Span} E_k$ обладает свойством ОЛД-совместимости. Утверждение $M_1$ проверяется непосредственно. Предположим, что $M_{k-1}$ справедливо для некоторого $k > 1$. Пусть $(x^*, u^*) \in E_p$ и $(x^*, u^*) \notin E_{k-1}$, при этом ОЛД-совместимое множество $\operatorname{Span} E_{k-1}$ обозначим через $P^*$, и пусть $(x^*_\perp, u^*_\perp)$ — конструкция, рассмотренная выше в отношениях между $(x^*, u^*)$ и $P^*$. Нетрудно установить, что $T_0 = \{t \in T : (x^*_\perp(t), u^*_\perp(t)) = 0\} = \emptyset$, откуда следует, что существуют такие константы $c_j > 0$, $j = \overline{1,4}$, что $\inf\limits_{t\in T} \|x^*(t)\|^{p'}_{R^n} = c_1$, $\sup\limits_{t\in T} \|x^*(t)\|^{p'}_{R^n} = c_2$, $\inf\limits_{t\in T} \|x^*_\perp(t)\|^{p'}_{R^n} = c_3$, $\sup\limits_{t\in T} \|x^*_\perp(t)\|^{p'}_{R^n} = c_4$, и, значит (как уже отмечалось при доказательстве утверждения 2), $\Lambda_{(x^*,u^*)} = \Lambda_{(x^*_\perp, u^*_\perp)}$, откуда утверждение 3 верно в силу теоремы 3. □

Из доказанного утверждения вытекает

**Утверждение 4.** *Если $u \equiv 0$ для каждой пары $(x,u) \in P_N$, где $P_N$ — характеристическое множество некоторого счетного множества наблюдений $N$, то любой обыкновенный пласт над $N$ является распределенным пластом над $N$ и наоборот.*

## 5. Заключение

Проблема аналитического описания условий, при которых распределенный и обыкновенный пласты эквивалентны, с одной стороны, является математически "самодостаточной", т. к. представляет теоретический интерес для понимания тонкой тополого-алгебраической структуры множества наблюдаемых динамических процессов $P$ (в пространстве $H_{p'}$), реализуемого системой вида (1), а с другой, имеет практическую ценность, т. к. условия, определяющие включение $P$ в систему множеств со свойством РЛД-совместимости, являются более слабыми и конструктивными (см. теорему 1 [1]) в сравнении с условиями включения $P$ в семейство ОЛД-совместимых множеств (см. теорему 2 [1]). Следующий шаг в этом исследовании, возможно, состоит в выяснении, насколько свойство замкнутости множества $\Omega_E + \Omega_{(x^*,u^*)}$ в топологии пространства $H_{p'}$, позволившее получить теорему 3 о расширении ОЛД-совместимого множества, зависит от следствия 1.

## Литература


1. Данеев А.В., Русанов В.А. *Об одной теореме существования сильной модели* // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 8. – С. 64–73.
2. Vassilyev S.N., Rusanov V.A., Daneev A.V. *About automatic construction of mathematical models by methods of structural and parametrical identification* // Proc. Symp. Appl. Math. and

Optimization. CESA'96 IMACS-IEE/SMC Multiconference. Comput. eng. in systems appl. – Lille, France, 1996. – P. 27–31.

3. Данеев А.В., Русанов В.А. *Геометрические характеристики свойств существования конечномерных $(A, B)$-моделей в задачах структурно-параметрической идентификации* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 1. – С. 3–8.
4. Lakeyev A.V., Rusanov V.A. *On existence of linear nonstationary partially realizing models* // Proc. Symp. Appl. Math. and Optimization. CESA'98 IMACS-IEE/SMC Multiconference. Comput. eng. in systems appl. – Nabeul-Hammamet, Tunisia, 1998. – P. 201–205.
5. Данеев А.В., Русанов В.А. *Порядковые характеристики свойств существования сильных линейных конечномерных дифференциальных моделей* // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 1. – С. 43–50.
6. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. *Очерки по математической теории систем.* – М.: Мир, 1971. – 400 с.
7. Месарович М., Такахара Я. *Общая теория систем: математические основы.* – М.: Мир, 1978. – 312 с.
8. Виллемс Я. *От временнóго ряда к линейной системе* // Теория систем. Матем. методы и моделир. / Под ред. А.Н. Колмогорова, С.П. Новикова. – М.: Мир, 1989. – С. 8–191.
9. Ван дер Шафт А. *К теории реализации нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями высшего порядка* // Теория систем. Матем. методы и моделир. / Под ред. А.Н. Колмогорова, С.П. Новикова. – М.: Мир, 1989. – С. 192–237.
10. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 752 с.
11. Данеев А.В., Русанов В.А. *К методам качественной теории идентификации сложных динамических систем* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 355. – № 2. – С. 174–177.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 442 с.

*Иркутский государственный*
*технический университет*
*Институт динамики систем*
*и теории управления СО РАН*

*Поступили*
*первоначальный вариант* 17.05.1996
*окончательный вариант* 30.12.1998